
群论笔记

version: June 23, 2026

林海轩

haixuan.lin2005@gmail.com

compile date: July 21, 2026

群论笔记

version: June 23, 2026

林海轩

compile date: July 21, 2026

献给我的父母－给予我肉身, 承载好奇的灵魂.

前言

著名数学家 David Hilbert 曾说过:「Wir müssen wissen — wir werden wissen」(我们必须知道;我们终将知道).

知北遊於玄水之上，登隱弇之丘，而適遭無為謂焉。知謂無為謂曰：「予欲有問乎若：何思何慮則知道？何處何服則安道？何從何道則得道？」三問而無為謂不答也，非不答，不知答也。知不得問，反於白水之南，登狐闕之丘，而睹狂屈焉。知以之言也問乎狂屈。狂屈曰：「唉！予知之，將語若，中欲言而忘其所欲言。」知不得問，反於帝宮，見黃帝而問焉。黃帝曰：「無思無慮始知道，無處無服始安道，無從無道始得道。」

知問黃帝曰：「我與若知之，彼與彼不知也，其孰是邪？」黃帝曰：「彼無為謂真是也，狂屈似之，我與汝終不近也。夫知者不言，言者不知，故聖人行不言之教。道不可致，德不可至。仁可為也，義可虧也，禮相偽也。故曰：『失道而後德，失德而後仁，失仁而後義，失義而後禮。禮者，道之華而亂之首也。』故曰：『為道者日損，損之又損之，以至於無為，無為而無不為也。』今已為物也，欲復歸根，不亦難乎！其易也，其唯大人乎！生也死之徒，死也生之始，孰知其紀！人之生，氣之聚也，聚則為生，散則為死。若死生為徒，吾又何患！故萬物一也，是其所美者為神奇，其所惡者為臭腐；臭腐復化為神奇，神奇復化為臭腐。故曰：『通天下一氣耳。』聖人故貴一。」

知謂黃帝曰：「吾問無為謂，無為謂不應我，非不我應，不知應我也。吾問狂屈，狂屈中欲告我而不我告，非不我告，中欲告而忘之也。今予問乎若，若知之，奚故不近？」黃帝曰：「彼其真是也，以其不知也；此其似之也，以其忘之也；予與若終不近也，以其知之也。」

狂屈聞之，以黃帝為知言。

—《莊子·外篇·知北遊》

引文所示哲理,不外乎尊崇返朴 — 所谓求知,恰在于以自然性消解疑惑 — 谓之曰「道」.

林海轩

上海, July 21, 2026

Contents

前言	v
* 0 集合论	1
0.1 集合论公理系	1
0.2 序结构	4
0.3 Grothendieck 宇宙	9
I 基础群论	11
1 群论中的基本概念	13
1.1 半群, 么半群, 群, 子群	14
1.2 陪集, 正规子群, 商群	20
1.3 对称群, 交错群, 单群, 二面体群	27
* 1.4 五次及以上方程无根式解	32
2 对群的操作	37
2.1 群的同态与同构	37
2.2 内外直积	43
2.3 群作用	46
2.4 半直积	56
2.5 群扩张	61
2.5.1 核是 Abel 群时的扩张	63
* 2.5.2 核不是 Abel 群时的扩张	67
* 3 对群的进一步讨论	85
3.1 Sylow 定理	85
3.2 群的可解性	87

Contents

3.3	有限生成 Abel 群	89
3.4	Krull–Schmidt 定理	93
3.5	自由群	100
4	几何学中的群	107
4.1	同伦群	107
4.2	同调群	109
* 5	图论速成课 (A crash course of graph theory)	111
5.1	图	111
5.2	路	113
5.3	树	113
5.4	流	113
II	基础代数学的必要补充	115
6	环论速成课 (a crash course of ring theory)	117
6.1	环, 域, 代数, 及延伸概念	117
6.2	理想与商环	122
6.3	环的同态与同构	127
6.4	域的特征	131
* 6.5	主理想整区	133
6.6	多项式环	134
6.7	环的可解性	138
* 6.8	Wedderburn 小定理	140
7	模论速成课 (a crash course of module theory)	143
7.1	模及其延伸概念	143
7.2	模的同态与同构	145
7.3	模的生成	146
* 7.4	无限维线性空间	149
* 7.5	模不变基数条件	150
7.6	张量积	153
7.7	模的可解性	165
7.8	Wedderburn–Artin 定理	168
* 7.9	Artin 模与 Noether 模	171
8	代数速成课 (a crash course of algebra)	173

Contents

8.1	张量代数	173
8.2	Clifford 代数	179
8.3	旋量代数	182
9	范畴论速成课 (a crash course of category theory)	185
9.1	范畴论中的基本概念	185
9.1.1	范畴	186
9.1.2	函子	192
9.1.3	自然变换	194
9.2	可表达性	198
9.2.1	Yoneda 引理	198
9.2.2	泛性质	206
* 9.3	最优构造	207
9.3.1	伴随	208
9.3.2	极限	212
9.3.3	完备	217
9.3.4	Kan 延拓	219
III	有限群表示理论	221
10	初见群表示	223
10.1	线性表示	223
10.2	表示的约分	226
10.3	若干不可约表示构造方法	230
10.4	有限群不可约表示	234
10.5	群函数	236
10.6	特征标	241
10.7	表示的张量积	247
10.8	直积表示	248
10.9	分导表示	249
10.10	诱导表示	249
11	广义表示一瞥	251
11.1	投影表示	251
11.2	共表示	259
11.3	实表示	268
12	Clifford 代数的表示	275

Contents

12.1	Grothendieck 群	275
12.2	Clifford 代数的半单性	277
IV	连续群	279
* 13	拓扑群	281
13.1	拓扑群及其性质	282
13.2	局部紧 Tychonoff 拓扑群上的积分	287
14	Lie 群	291
14.1	Lie 群中的基本概念	293
14.2	若干重要 Lie 群	310
15	Lie 代数	313
15.1	有限维半单 Lie 代数	313
* 15.2	对半单 Lie 代数的进一步讨论	315
V	代数学	325
* 16	古典同调代数速成课 (a crash course of classical homological algebra)	327
16.1	加性范畴	328
16.2	Abel 范畴	332
16.3	正合列	333
16.4	模的投射, 内射与平坦	334
16.5	复形同调	334
16.6	导出函子	334
16.6.1	左导出函子与 Ext	334
16.6.2	右导出函子与 Ext	334
16.6.3	泛 δ 函子	334
16.6.4	K 群	334
16.7	同调群	334
16.7.1	系数在群的模的上同调群	334
16.7.2	非交换上同调群	334
17	么半范畴	335
17.1	融贯性	339
17.2	配边范畴	342

17.3	辫结构	343
17.4	中心	350
17.5	融合范畴	350
17.6	拓扑序	350
VI	表示论	353
VII	群论在凝聚态物理中的运用	355
18	点群	357
18.1	点群的分类	357
19	晶体空间群	359
19.1	晶体对称性	359
19.2	Brillouin 区	361
19.3	波矢星和小旁群	362
20	Fermi 子双群	363
20.1	神奇的 Fermi 子旋转	363
21	Fermi 子拓扑分类理论	365
21.1	拓扑相	365
21.2	非平凡相	368
21.3	xxx	368
VIII	附录	373
* A	有限单群分类	375
A.1	陈述	375
A.1.1	单群族	375
A.1.2	散在单群	378
A.2	推论	380
A.2.1	关于阶	380
A.2.2	关于结构	382
A.2.3	其他应用	384
A.3	历史	385

Contents

B	能带论	393
B.1	Bloch 波	394
B.2	能带的近似求解	398
B.2.1	平面波	398
B.2.2	近自由电子	400
B.2.3	紧束缚	403
B.3	Bloch 电子半经典动力学	407
B.3.1	电子波包	407
B.3.2	动力学	408
C	几何相	413
C.1	绝热定理	413
C.2	Berry 相位	416
C.3	Aharonov-Bohm 效应	423
D	Dirac 符号体系的数学基础	427
D.1	Hilbert 空间	428
D.2	广义函数	428
D.3	线性算符	430
D.4	Dirac 符号	432
* E	一篇对 Yang-Baxter 方程的短综述	433
E.1	一维 δ -势多体相互作用问题的可积性	434
	参考文献	436
	词汇表	437

标注 * 的内容为拓展



集合论

Contents

0.1	集合论公理系	1
0.2	序结构	4
0.3	Grothendieck 宇宙	9

这一切只是虚张声势的线性代数.

— 李文威《代数学方法: 卷一》

对物理系 (和大部分数学系) 学生来说, 系统学习集合论并不是必要的, 故本章的目的不在于完整论述整个集合论根基, 而是为了整个笔记之完整性, 作为补充地, 引入必要的集合论概念, 以保证思维的完整性.

本章主要参考李文威《代数学方法: 卷一》[李文威 23], 诸概念与证明均大段摘抄, 并删改了一些作者认为超出所需的内容.

0.1 集合论公理系

现代数学的一切都基于集合, 我们要给出集合的「定义」:

Postulate 0.1. 集合无法被更基本的数学语言定义. 用自然语言来说, 集合是一些相互区别的人所感知的对象汇集成的整体.

有一些事情需要注意: 这里的「一些」不能太多, 否则会引发悖论, 如著名的 Russell 悖论; 人所感知的对象, 一般指的是数学对象, 是经过抽象的, 不必含有现实意义; 对象的意义必须是确定的,

* Chapter 0. 集合论

不能模糊.

ZFC 公理系统 (ZFC axiom system) (Zermelo–Fraenkel 公理族 + 选择公理) 的引入, 一个重要的意义就是描述哪些集合是合法的, 以保证基于此建立的数学体系自治.

Axiom 0.1 [外延公理 (axiom of extensionality)]. 两个集合相等, 当且仅当它们的元素相同.

外延公理保证了集合的元素的互异型和无序性, 且指出, 两个集合相等, 等价于互相包含.

给出一个集合的方法最常用的是描述法, 即给出一个性质 P , 满足该性质的所有数学对象都召集进来为一个集合. 但是性质 P 不能太泛, 否则集合会大到引起矛盾. 所以必须对描述法提到的性质 P 加以限制, 分离公理正是为了解决此问题:

Axiom 0.2 [分离公理 (axiom of separation)]. 设 P 为关于集合的一个性质, 记 $P(U)$ 为集合 U 满足性质 P , 则对任意的集合 X , 存在集合 $Y = \{U \in X : P(U)\}$.

分离公理实际上只能允许构造那些来自集合的集合, 这个构造有一种不断变小的趋势. 我们还需要为往大的构造提供公理支持, 这就是配对公理和并集公理:

Axiom 0.3 [配对公理 (axiom of pairing)]. 任意的 x, y 存在集合 $\{x, y\}$, 其元素恰好为 x, y .

Axiom 0.4 [并集公理 (axiom of union)]. 对任意的集合 X , 存在相应的并集

$$\bigcup X := \{u : \exists v \in X \text{ s.t. } u \in v\}.$$

幂集构造操作是必要的, 将之作为一个公理:

Axiom 0.5 [幂集公理 (axiom of power)]. 对任意集合 X , 其子集构成一个集合

$$\mathcal{P}(X) := \{U : U \subseteq X\}.$$

我们先来看看目前的公理能构造出什么样的数学宇宙, 最有名的就是 **von Neumann 宇宙 (von Neumann universe)**, 先声明/构造¹ 一个空集 $\emptyset$, 然后迭代取幂集构造 $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$.

¹ 仅仅使用一阶逻辑无法构建数学宇宙, 至少要一次额外的声明, 这可以理解推理的源头. 目前我们没有引入任何声明性公理, 所以最好的方法是直接声明一个空集, 或者任意一个集合 I , 再通过分离公理构造出空集.

0.1. 集合论公理系

直观上, von Neumann 宇宙中的每一步似乎可以和自然数集 $\mathbb{N}$ 对应上, 从而可以构造出自然数集. 但是这实际上涉及到对构造这个操作的本质理解, 即构造这个手段能不能达到无限次 (见 **超级任务** 概念, 被称为现代的 Zeno 悖论). 在 ZFC 内部引入无穷公理来直接声明类似这样的超级任务在逻辑体系内是可以被完成的:

Axiom 0.6 [无穷公理 (axiom of infinity)]. 存在无穷集.

于是我们可以合法地写下类似下面这个元素

$$\{ \emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots \}, \quad (1)$$

注意省略号的合法性由无穷公理保证.

以下的替换公理常被认为是分离公理的更强形式, 但因为各种原因后者常被保留.

Axiom 0.7 [替换公理 (axiom of substitution)]. 设 F 为以一个集合 X 为定义域的函数, 则存在集合 $F(X) = \{F(x) : x \in X\}$.

在分离公理和替换公理中用到的性质 P 和函数 F 不是集合论下的寻常定义, 实际为一阶逻辑的合式, 故无循环论证的嫌疑 [李文威 23].

目前的公理无法排除无穷从属降链的存在, 例如 $x = \{x\}$, 这样的情况是我们不希望看到的. 引入正则公理:

Axiom 0.8 [正则公理 (axiom of regularity)]. 任意非空集合都含有一个对从属关系 $\in$ 的极小元素.

正则公理指出, 我们说谈论的集合宇宙存在原子对象, 其他集合可以由这些原子对象构造而成.

最后要介绍的也是历史上争议最大的公理, 是选择公理. 直观上选择公理是符合直觉的, 也很好用, 放弃其会导致很多重要的定理无法证明. 另一方面, 接受选择公理也会引起一些反直觉的结果 (但这其中并无矛盾), 这实际上是因为选择公理是**反构造主义**的, 其语义强调「存在某种选择函数, 即便我们无法构造出来」.

Axiom 0.9 [选择公理 (axiom of choice)]. 设集合 X 每一个元素均非空, 则存在函数 $g : X \rightarrow \bigcup X$ 使得对任意的 $x \in X$, 均有 $g(x) \in x$.

这里的 X 应当设想为一族非空集合, 选择函数 g 的意思是能从每个集合 $x \in X$ 中选出一个元素. 当 X 是有限集合时, 你可以御驾亲征地从每个集合 x 中随便地选出一个元素, 然后记录你的

* Chapter 0. 集合论

选择, 最后规定你的选择就是 g . 然而当 X 是无限集时, 上面的方案似乎就失效了, 这又回到了超任务那个哲学问题. 那么这种情况下究竟是否存在选择函数 g 呢, 我们只好接受或拒绝选择公理, 在 ZFC 中我们接受之.

在 ZFC 内, 我们仅讨论集合, 另一些公理体系如 **NBG 系统** (von Neumann–Bernays–Gödel) 还定义了**类 (class)** 的概念, 所谓类, 通俗地讲就是滥用概括原则得到的过于大的「集合」, 例如「所有的集合」. 凡集合都是类, 不是集合的类称为**真类**, 在 ZFC 中必须回避真类, 但是本章我们必须涉及到对其的讨论.

0.2 序结构

Definition 0.1. 设 P 是集合, 称 P 是**预序集 (preordered set)**, 如果其上的二元关系 $\leq$ 满足:

- **反身性:** $\forall x \in P, x \leq x$;
- **传递性:** $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \implies x \leq z$.

称 P 是**偏序集 (partially ordered set)**, 如果还满足

- $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \implies x = y$.

如果 P 偏序且非空, 且对任何 $x, y \in P$, 子集 $\{x, y\}$ 均有上界, 则称 P 为**滤过偏序集 (filtered partially ordered set)**. 如果偏序集 P 中的任一对元素 x, y 皆可比大小 (即: 或者 $x \leq y$, 或者 $y \leq x$), 则称 P 为**全序集 (totally ordered set)**, 全序集均滤过. 如果全序集 P 的每个非空子集均有极小元, 则称 P 是**良序集 (well-ordered set)**.

一个严格的概念的包含关系链为

$$\text{良序集} \subseteq \text{全序集} \subseteq \text{滤过偏序集} \subseteq \text{偏序集} \subseteq \text{预序集}.$$

Example. 这里提供一些事例辅助理解概念:

- 预序但不偏序: $x \preceq y \iff x \leq y + 1$. 反对称性不满足;
- 滤过偏序但不全序: $\mathbb{R}^n$ 上的逐点比较, $(x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_n) \iff x_i \leq y_i, \forall i$. 例如 $(0, 1)$ 和 $(1, 0)$ 不可比较.
- 全序但不良序: $\mathbb{R}$, 通常的小于关系, 注意 $(0, 1)$ 无极小元.
- 良序: $\mathbb{N}$.

下面我们引入序数的概念, 其是构建集合论宇宙的关键:

0.2. 序结构

Definition 0.2 [序数 (ordinal number)]. 如果一个集合 α 的每个元素都是 α 的子集, 则称 α 为传递的. 若传递集 α 对于 $x < y \iff x \in y$ 成为良序集, 则称 α 为序数. 给定序数 α , 定义 $\alpha + 1 := \alpha \sqcup \{\alpha\}$, 称为 α 的后继 (successor), 其为大于 α 的最小序数. 若 α 不是其他序数的后继, 则

$$\alpha = \sup \{\beta : \beta < \alpha\} \equiv \bigcup \{\beta : \beta < \alpha\}$$

称为极限序数 (limit ordinal). 约定空 $\sup$ 为 $\emptyset$ 使得序数 $\emptyset$ 是极限序数.

Remark. 对序数 α, β , 以下三种说法是完全等价的:

$$\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta \iff \alpha \subseteq \beta.$$

这可以由定义看出.

Proof. 需要证明, 当一个序数不是后继的时候, 其形式如上. 首先

$$\sup \{\beta : \beta < \alpha\} \leq \alpha,$$

这是因为, 这是因为每个 $\beta < \alpha \iff \beta \subseteq \alpha$, 从而 $\bigcup_{\beta < \alpha} \beta \subseteq \alpha$. 上式不论 α 是否为后继均成立.

下面说明, 当 α 不是后继时, 有 $\alpha \subseteq \bigcup_{\beta < \alpha} \beta$. 因为 α 不是后继, 则存在 β 使得任意的 $x < \alpha$, 均有 $x < \beta < \alpha$ (若不存在这样的 β , 则 $\alpha = x + 1$, 矛盾), 于是 $x \subseteq \beta$, 两边对 x 求并运算即可. $\square$

我们可以构造出无限序数 ω 了: 回忆 von Neumann 宇宙, 记 $0 := \emptyset$, 不断进行后继操作

$$1 := 0 + 1, \quad 2 := 1 + 1, \quad 3 = 2 + 1, \dots$$

这里的符号 $1, 2, 3, \dots$ 可以与我们熟知的自然数符号对应, 但是合法的 (1) 却无法对应, 因为这是一个无限序数. 定义这个序数为 ω , 我们可以把其理解为「所有自然数后面的那个自然数」, 这样讲当然有些奇怪, 因为 ω 不是自然数, 当将其当作无限观点下自然数的推广, 是较为直观和易于接受的.

下面我们讨论和选择公理等价的另外两个重要定理, 它们都是常用的代数学工具, 并会被用于拓扑学中. 在此之前, 我们先介绍另一个重要的定理, 即超穷归纳法.

Theorem 0.1 [超限归纳法 (transfinite induction)]. 令 C 为一个由序数构成的类, 而 $\mathbf{On}$ 是全体序数构成的类. 假设

$$\bullet \quad 0 \in C,$$

* Chapter 0. 集合论

- $\alpha \in C \implies \alpha + 1 \in C$,
- 设 α 为极限序数, 若对每个 $\beta < \alpha$ 皆有 $\beta \in C$, 则 $\alpha \in C$,

那么 $C = \mathbf{On}$. 如果仅考虑小于某 θ 的序数而非 $\mathbf{On}$ 整体, 断言依然成立.

Proof. 设若不然, 取不在 C 中的最小序数 $\alpha \neq 0$, 无论它是后继或极限序数都导致矛盾. $\square$

另外, $\mathbf{On}$ 是真类, 若不然取 $\sup(\mathbf{On}) + 1$, 我们构造了严格大于所有序数的序数, 矛盾!² 超穷归纳法可以理解为数学归纳法在全体序数上的推广, 具体地, 如果舍去超穷归纳法所需假设的最后一条, 得到的就是数学归纳法, 即只对有限序数成立.

Theorem 0.2 [Zermelo 良序定理 (Zermelo's well-ordering theorem)]. 任何集合 S 均能被赋予良序.

你可以想象一个超级任务过程, 用选择公理, 我们每次从集合 S (的剩余集中) 取出一个元素, 然后重复之, 直至取尽, 我们取出元素的顺序就是 S 上的良序. 当然这并不严谨, 只是便于理解, 下面给出证明.

Proof. 我们断言 S 和某个序数 θ 间存在双射. 选取元素 $\mathfrak{U} \notin S$ 如上. 由选择公理, 可以在 S 的每个子集 S' 里挑选元素 $g(S')$. 设 $a_0 := g(S)$, 并用超穷递归对每个序数 α 定义

$$a_\alpha := \begin{cases} g(S \setminus \{a_\beta : \beta < \alpha\}), & S \neq \{a_\beta : \beta < \alpha\} \\ \mathfrak{U}, & S = \{a_\beta : \beta < \alpha\}. \end{cases}$$

与先前类似, 因 S 是集合, 故可取极小的 θ 使得 $a_\theta = \mathfrak{U}$, $S = \{a_\beta : \beta < \theta\}$, 后者和序数 $\theta = \{\beta : \beta < \theta\}$ 之间有显然的双射, 于是导出 S 上的良序. $\square$

Theorem 0.3 [Zorn 引理 (Zorn's lemma)]. 设 P 为非空偏序集, 而且 P 中每个链都有上界, 则 P 含有极大元.

Proof. 类似于前一个证明. 假定 P 不含极大元. 任取 $a_0 \in P$, 并用超穷递归对每个序数 α 定义 $a_\alpha \in P$, 使得 $\alpha < \beta \implies a_\alpha < a_\beta$, 其方法如次: 设对每个 $\beta < \alpha$ 都定义了 a_β 如上, 则 $(a_\beta)_{\beta < \alpha}$ 在 P 中成一链. 若 α 是极限序数, 则此链必有上界 $a_\alpha \notin \{a_\beta\}_{\beta < \alpha}$; 若 $\alpha = \gamma + 1$ 是后继序数, 因 P 无极大元故存在 $a_\alpha \in P$ 使得 $a_\alpha > a_\gamma$. 真类 $\mathbf{On}$ 据此可以嵌入 P , 可论证导出 $\mathbf{On}$ 亦是集合, 矛盾. $\square$

²此为 Burali-Forti 佯谬 (1897 年), 面世时间早于 Russell 佯谬 (1902).

0.2. 序结构

下面引入基数的概念, 这个概念用以度量构造的集合有多大 (尤其是无限集), 这个大小将被用于构造足以适用的集合论宇宙.

Definition 0.3. 若两个集合 X, Y 间存在双射, 称 X 与 Y 等势. 记集合 X 的等势类为 $|X|$, 如果存在从 X 到 Y 的单射, 则记 $|X| \leq |Y|$.

下面介绍两个重要的有关等势的定理.

Theorem 0.4 [Schröder–Bernstein 定理 (Schröder–Bernstein theorem)]. 如果集合 X 和 Y 同时满足 $|X| \leq |Y|$ 与 $|X| \geq |Y|$, 则 $|X| = |Y|$, 从而 $\leq$ 在等势类上给出了偏序.

Proof. 由假设, 存在 X 到 Y 的一个子集 Y_1 的双射 φ , 以及 Y 到 X 的一个子集 X_1 的双射 ψ . 令 $X_0 = X$, 并对 $n \geq 0$ 定义 $X_{n+2} = \psi(\varphi(X_n))$. 则 $\psi \circ \varphi : X_n \rightarrow X_{n+2}$ 为双射.

注意到 $\varphi(X) \subseteq Y$, 我们得到

$$X_2 = \psi(\varphi(X)) \subseteq \psi(Y) = X_1.$$

而由 $X_1 \subseteq X$ 得到 $X_3 \subseteq X_2$. 依次可得, 对任意 $n \geq 0$, $X_{n+1} \subseteq X_n$.

由于 $\psi \circ \varphi$ 是 X_n 到 X_{n+2} 的双射, 同时又是 X_n 的子集 X_{n+1} 到 X_{n+2} 的子集 X_{n+3} 的双射, 因此 $\psi \circ \varphi$ 也是

$$X_n \setminus X_{n+1} \rightarrow X_{n+2} \setminus X_{n+3}$$

的双射.

注意到

$$X = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} X_k \right) \cup (X \setminus X_1) \cup (X_1 \setminus X_2) \cup (X_2 \setminus X_3) \cup (X_3 \setminus X_4) \cup \cdots,$$

$$X_1 = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} X_k \right) \cup (X_2 \setminus X_3) \cup (X_1 \setminus X_2) \cup (X_4 \setminus X_5) \cup (X_3 \setminus X_4) \cup \cdots.$$

我们可以给出 X 到 X_1 的双射:

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{如果 } x \in \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} X_k \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X_{2n+1} \setminus X_{2n+2}) \right), \\ \psi(\varphi(x)), & \text{如果 } x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_{2n} \setminus X_{2n+1}). \end{cases}$$

* Chapter 0. 集合论

所以

$$|\overline{X}| = |\overline{X_1}| = |\overline{Y}|.$$

证明摘自楼红卫《数学分析(上侧)》[楼红卫 19]

□

Theorem 0.5 [Cantor 定理 (Contor's theorem)]. 任意的集合 X , 均有 $|\mathcal{P}(X)| > |X|$.

Proof. $|\mathcal{P}(X)| \geq |X|$ 显然, 要证严格大于, 可验证集合 $Y := \{x \in X : x \notin \phi(x)\}$ 不在任意单射 $\phi : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ 的像中. □

Definition 0.4 [基数 (cardinal number)]. 序数 κ 称为**基数**, 如果对任意序数 $\lambda < \kappa$ 都有 $|\lambda| < |\kappa|$. 一个无穷基数 α 称为**正则基数 (regular cardinal)**, 如果不存在极限序数 $\beta < \alpha$ 和严格增的序数列 $\{a_\xi : \xi < \beta\}$ 使得 $\sup\{a_\xi : \xi < \beta\} = \alpha$. 满足以下性质的基数 κ 称为**强不可达基数 (strongly inaccessible cardinal)**:

1. κ 不可数,
2. κ 是正则基数,
3. 对任意基数 λ 皆有 $\lambda < \kappa \implies 2^\lambda < \kappa$.

换言之, 基数无非是一个等势类中的极小序数. 我们可以用选择公理证明等势类和基数是一一对应的.

任意无穷集 α 都满足 $|\alpha \sqcup \{\alpha\}| = |\alpha|$, 所以无穷基数必为极限序数. 无穷基数称作 **$\aleph$ 数**. 引理告诉我们如何用序数枚举无穷基数: 递归地定义

$$\begin{aligned}\aleph_0 &:= \omega, \quad \text{这是最小的无穷基数;} \\ \aleph_{\alpha+1} &:= \text{大于 } \aleph_\alpha \text{ 的最小基数;} \\ \aleph_\alpha &:= \sup_{\beta < \alpha} \aleph_\beta, \quad \text{若 } \alpha \text{ 是极限序数.}\end{aligned}$$

$\aleph_0$ 和 $\aleph_1$ 是正则基数. 关于 $\aleph_0$, 其为最小的极限序数, 从而验证定义. 关于 $\aleph_1$, 若存在 $\beta < \aleph_1$ 的递增序列, 其上确界为 $\aleph_1$, 那么 β 必须是可数的, 但可数个可数序数的并仍是可数, 所以不存在这样的 β .

以下说明形如 $\aleph_{\gamma+\omega}$ 的基数均非正则, 这里 γ 可以是任意序数: 在定义中取 $\beta := \gamma + \omega$ 和 $a_\xi := \aleph_\xi$, 关系 $\alpha := \aleph_\beta > \beta$ 理应是明显的; 而 $\aleph$ 数的定义表明 $\sup\{a_\xi : \xi < \beta\} = \sup\{\aleph_{\gamma+n} : n < \omega\} = \aleph_{\gamma+\omega}$.

0.3. Grothendieck 宇宙

Example. 我们证明: $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

考虑单位区间 $(0, 1)$ 中的所有实数. 每个 $x \in (0, 1)$ 都可以写成二进制小数:

$$x = 0.b_0b_1b_2\dots, \quad b_i \in \{0, 1\}.$$

这样, $(0, 1)$ 中的每个实数对应一个无限二进制序列:

$$(b_0, b_1, b_2, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}.$$

同时, 每个无限二进制序列可以映射到一个自然数,

$$(b_0, b_1, b_2, \dots) \longleftrightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid b_n = 1\},$$

也就是

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \longleftrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

即二进制序列集和自然数集的幂集存在自然双射. 所以 $|\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$.

这里谈谈著名的**连续统假设 (continuum hypothesis)**. 集合论中常称实数集为「连续统」. 著名的连续统假设断言 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. 已知若预设 ZFC 公理系统的一致性, 那么无论是连续统假设 (P. Cohen, 1963) 或其否定 (K. Gödel, 1940) 都无法从 ZFC 的公理推出.

0.3 Grothendieck 宇宙

所谓宇宙, 意在给出一个大到适用于所讨论问题的集合, 使得常见的数学构造在此封闭, 以避免涉及真类.

Definition 0.5 [Grothendieck 宇宙 (Grothendieck universe)]. Grothendieck 宇宙指的是一个满足下述性质的集合 $\mathcal{U}$.

1. $u \in \mathcal{U} \implies u \subseteq \mathcal{U}$, 即: $\mathcal{U}$ 是传递集;
2. $u, v \in \mathcal{U} \implies \{u, v\} \in \mathcal{U}$;
3. $u \in \mathcal{U} \implies \mathcal{P}(u) \in \mathcal{U}$;
4. 若 $I \in \mathcal{U}$, 一族集合 $\{u_i : i \in I\}$ 满足 $\forall i, u_i \in \mathcal{U}$, 则 $\bigcup_{i \in I} u_i \in \mathcal{U}$;
5. $\mathbb{Z}_{\geq 0} \in \mathcal{U}$, 因此: $\emptyset \in \mathcal{U}$.

对于集合 X , 若 $X \in \mathcal{U}$ 则称为 $\mathcal{U}$ -集; 若 X 和一个 $\mathcal{U}$ -集等势, 则称为 $\mathcal{U}$ -小集.

* Chapter 0. 集合论

然而是否有充分多, 充分大的宇宙可资调用则是另一个问题, 为此我们引入以下假设.

Hypothesis 0.1 [Grothendieck 宇宙假设]. 对任何集合 X , 存在宇宙 $\mathcal{U}$ 使得 $X \in \mathcal{U}$.

Definition 0.6 [集合的层垒谱系]. 超穷递归定义一族由序数枚举的集合 V_α 如下:

$$\begin{aligned} V_0 &:= \emptyset, \\ V_{\alpha+1} &:= \mathcal{P}(V_\alpha), \\ V_\alpha &:= \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta, \quad \text{如果 } \alpha \text{ 是极限序数.} \end{aligned}$$

则任一集合都属于某个 V_α , 其中 α 是序数.

强不可达基数是现代集合论着力研究的大基数的一员. Bourbaki 在 [GAV+72, Exp. I, Appendix] 中证明了以下结果.

Theorem 0.6. 宇宙正是层垒谱系中形如 V_κ 的成员, 其中 κ 是一个强不可达基数.

Hyp. 0.1 等价于对任意基数 λ , 存在强不可达基数 κ 使得 $\lambda < \kappa$. 这是颇强的要求. 对于大多数的范畴论构造和数学论证, 我们顶多只要求存在某个宇宙 $\mathcal{U}$; 换言之, 日常生活中只需要单个强不可达基数. 这个要求依然有些奢侈, 原因是在 ZFC 系统内无法证明强不可达基数的存在性 [GAV+72, Theorem 12.12].

References of this chapter

- [李文威 23] 李文威.《代数学方法: 卷一》. 1st. 北京, China: 高等教育出版社, 2023, 约 450.
- [楼红卫 19] 楼红卫.《数学分析 (上册)》. 1st. 本科数学分析经典教材, 上册涵盖极限、连续、导数与积分. 北京, China: 高等教育出版社, 2019, 约 600.
- [GAV+72] A. Grothendieck, M. Artin, J. L. Verdier, et al. Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1: Théorie des topos. Vol. 269. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1972, pp. xix + 525.

Part I

基础群论

*The application of group theory to physics
became one of the main branches of physics
that I specialized in.*

— 杨振宁

本部分我们主要介绍基础群论, 主要任务是为后续现代理论提供扎实的理论地基, 以及全面阐明重要的概念. 基础群论是整个群论学习中最重要也是最难的部分, 所谓万事开头难, 对于没有正式接受过代数学习的学生, 数不胜数的复杂而抽象的概念往往令人望而却步. 然而, 如果能克服这道难关, 对后面更现代的理论的学习, 将是水到渠成的.

— 笔者

1

Contents

1.1	半群, 幺半群, 群, 子群	14
1.2	陪集, 正规子群, 商群	20
1.3	对称群, 交错群, 单群, 二面体群 ..	27
* 1.4	五次及以上方程无根式解	32

群论中的基本概念

群论是抽象代数中最基本的部分, 只在集合上定义了一种运算, 即群是描绘抽象运算最基本的数学结构, 往后的其他代数学结构, 如环, 模, 域等等, 都是在群上定义更多的运算.

关于集合的相关讨论, 见 **Chap. 0**, 此处不再赘述, 若不求极其严格, 可认为所谓集合概念是自明的, 与惯常使用的情形别无二意. 为引入何为群, 先定义运算的概念.

Definition 1.1 [二元运算 (binary operation)]. 设 G 是非空集合, 形如 $f: G \times G \rightarrow G$ 的映射, 称为 G 上的二元运算.

数学上的习惯, 我们用「点乘」作为上述映射的简写, 口语上常说「乘法」, 例如设 $a, b \in G$, 则记 $ab \equiv a \cdot b := f(a, b)$, 为 G 中的元素. 装备了二元运算的非空集合, 就记作 $(G, \cdot)$, 无歧义时直接简记为 G .

我们要关注二元运算的如下常见额外特性:

- 结合律: 对任意的 $a, b, c \in G$, 均有 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
- 交换律: 对任意的 $a, b \in G$, 均有 $a \cdot b = b \cdot a$;
- 单位元: 存在 $e \in G$ 使得对任意的 $a \in G$, 均有 $e \cdot a = a \cdot e = a$;
- 逆元: 设 G 有单位元 e , 对任意的 $a \in G$, 均存在 $b \in G$, 使得 $a \cdot b = b \cdot a = e$, 称 b 为 a 的逆元.

Chapter 1. 群论中的基本概念

单位元存在则唯一, 设 e, e' 均为单位元, 则 $e = ee' = e'$, 第一个等号使用了 e' 的定义, 第二个等号使用了 e 的定义. 有时会严格地区分左右单位元 e_L 和 e_R , 前者使得 $e_L \cdot a = a$, 后者使得 $a \cdot e_R = a$, 这里 $a \in G$ 任取. 若存在左单位元 e_L 和右单位元 e_R , 则 $e_L = e_R$. 这是因为 $e_L = e_L e_R = e_R$, 第一个等号使用了右单位元的定义, 第二个等号使用了左单位元的定义. 因此么半群不区分单位元的左右, 也常常用 1 来指代单位元, 称为**么元**, 而在满足交换律的结构中也常记作 0. 同样的, 逆也满足若存在则唯一, 且有时也区分左右逆, 这里尚且说不清楚它们的定义, 待引入半群后继续讨论.

1.1 半群, 么半群, 群, 子群

Definition 1.2 [**半群 (semigroup), 么半群 (monoid), 群 (group), Abel 群 (Abelian group)**].

如果 G 满足结合律, 称其为**半群**; 如果还存在单位元, 称其为**么半群**; 如果还满足每个元素均可逆, 称其为**群**; 如果还满足交换律, 称其为**Abel 群**.

Remark. 装备了二元运算的集合, 如果有 (1) **封闭性**, 就称作 *magma*, 或者 *binar*, *groupoid*. 当然这个结构几乎没什么用, 只在很老的文献中能看到. 如果加上 (2) **结合律** 就得到半群, 如果再加上 (3) **单位元** 就得到么半群, 如果再每个元素都有 (4) **逆元** 就得到群, 所以常把群的定义记作 (1)-(4) 共 4 点.

Remark. 在代数学中, 满足交换律的结构, 就都称为 *Abel* 的. 可以认为在绝大部分语境下, *Abel* 就是交换性的意思.

在么半群中, a 的左逆指的是这样的 b 使得 $ba = e$, 右逆指的是这样的 c 使得 $ac = e$. 若左右逆均存在, 则两者相等. 因为 $b = be = bac = ec = c$, 注意这里使用了结合律.

群的定义可以被削弱: 半群且存在左/右单位元和左/右逆元. 此处证明「左」的情形, 设 e_L 为左单位元, 任取 a , 则有 b 为其左逆, 则有 c 是 b 的左逆, 于是 $ab = e_L ab = cbab = ce_L b = cb = e_L$, 所以 b 是 a 的右逆, 至此已经证明右逆存在且等于左逆, 然后 $ae_L = aba = e_L a = a$, 又证明了右单位元存在且等于左单位元, 综上为群, 证毕. 但是半群且存在左/右单位元和右/左逆元, 这样的条件则不保证构成群. 考虑反例, 定义集合至少有两个元素, 定义二元运算 $a \cdot b = b$, 取一个元素称作 e , 则 $e \cdot a = a$, 所以 a 是左单位元, 又 $a \cdot e = e$, 所以 e 是任意元素的右逆元. 对任意的元素 e 均如此, 违反了唯一性, 故不是群.

Example 1. 集合

$$\text{GL}(n, K) := \{M \in M_n(K) \mid \det(M) \neq 0\}$$

在矩阵乘法下构成群, 其中 $M_n(K)$ 表示数域 K 上所有 n 阶方阵组成的集合, 这个群称为

1.1. 半群, 么半群, 群, 子群

一般线性群. 类似的,

$$\mathrm{SL}(n, K) := \{M \in \mathrm{GL}(n, K) \mid \det(M) = 1\}$$

也是群, 称作特殊线性群.

$$\mathrm{O}(n) := \{O \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid O^T O = I_n\}$$

称作一般正交群.

$$\mathrm{SO}(n) := \{O \in \mathrm{O}(n, K) \mid \det(O) = 1\}$$

称作特殊正交群.

$$\mathrm{U}(n) := \{U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid U^\dagger U = I_n\}$$

称作一般么正群.

$$\mathrm{SU}(n) := \{U \in \mathrm{U}(n) \mid \det(U) = 1\}$$

称作特殊么正群.

$$\mathrm{U}(p, q) := \{U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid U^\dagger G U = G\}$$

称作赝么正群. 其中 $G = G = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{SP}(2n, \mathbb{C}) := \{M \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{C}) \mid M^T J M = J\}$$

被称作辛群, 其中 $J = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$.

Example 2. 配备度规 g_{ab} 的广义 *Riemann* 空间 M 上的等度规映射以映射的复合映射群乘法, 构成群, 即几何学中常说的单参微分同胚群.

Definition 1.3 [阶 (order)]. 设 G 时群, $g \in G$,

$$o(g) := \min \{n \in \mathbb{N}_+ \mid g^n = e\}$$

称作 g 的阶 (order). $|G|$ 称作 G 的阶 (order).

Chapter 1. 群论中的基本概念

当 $|G| < \infty$ 时, 也就是常说的有限群, 一种展示群结构的方案是乘法表 — 以所有的群元为行与列 (一般群元排列顺序相同), 表格中的元素为「行索引群元左乘列索引群元」.

例如考虑集合 $\{1, i, -i, -1\}$ 在通常的虚数乘法下构成的群, 这个群的乘法表尺寸为 4×4 , 展示如下:

Table 1.1: 群 $\{1, i, -i, -1\}$ 的乘法表

	1	i	-i	-1
1	1	i	-i	-1
i	i	-1	1	-i
-i	-i	1	-1	i
-1	-1	-i	i	1

观察发现, 表格正文内每一行与每一列中每个群元出现且仅仅出现一次, 这实际上对应如下定理:

Theorem 1.1 [重排定理 (rearrangement theorem)]. 任取 u 来自有限群 $G = \{g_i\}$, 当 g_i 取遍 G 时, ug 取遍 G .

因为 G 有限, 所以 g_i 取遍 G 且推出 ug 取遍 G 时, 暗含了 ug_i 把每个 $g \in G$ 表出有且仅有一次. 因而定理得名「重排」.

Proof. 对任意 $g_i \in G$, 群 $u^{-1}g \in G$, 则 $u(u^{-1}g) = g$. □

Proposition 1.1. 对有限阶元 a, b , 有

$$o((a, b)) = \text{lcm}(o(a), o(b)).$$

Proof. 记 $o(a) = m, o(b) = n, o((a, b)) = k$. 令 $L = \text{lcm}(m, n)$. 一方面, $(a, b)^L = (a^L, b^L) = (e, e)$, 故 $k \mid L$. 另一方面, $(a, b)^k = (e, e)$ 蕴含 $a^k = e$ 且 $b^k = e$, 故 $m \mid k$ 且 $n \mid k$. 由最小公倍数定义知 $L \mid k$. 因 $k, L > 0$ 且互相整除, 必有 $k = L$. □

在群中, 容易得出下面性质.

- 消去律: $ab = ac \implies b = c$ 以及 $ba = ca \implies b = c$;

1.1. 半群, 么半群, 群, 子群

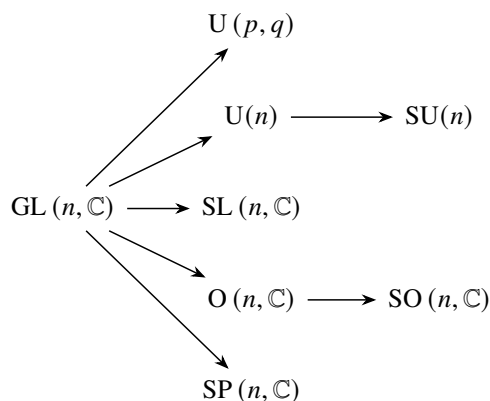
- 乘积的逆: 归纳法可得 $(a_1 \cdots a_n)^{-1} = a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}$;
- 若 $n \in \mathbb{N}_+$ 使得 $a^n = e$, 则 $o(a) \mid n$.

前两点告诉我们, 群元的符号计算有类似可逆矩阵.

Definition 1.4 [子群 (subgroup)]. 设 G 为群, $H \subseteq G$ 非空, 且 H 在 G 装备的二元运算下也是群, 则称 H 是 G 的子群, 记作 $H \leq G$.

Example. 显然 $\{e\}$, G 都是 G 的子群, 称作平凡的.

Example. 关于前面提到得矩阵群有子群关系如下:



此处默认维数关系自洽.

如果 $H \leq G$ 且 $H \neq G$, 就称 H 是 G 的**真子群**, 记作 $H < G$. 所谓「真」, 参见「真子集」的意思. 真子群在定义上允许平凡.

如下子群的判据非常实用.

Proposition 1.2. 设 G 是群, $H \subseteq G$, 则如下条件等价:

- $H \leq G$;
- 对任意 $a, b \in H$, 均有 $ab \in H$ 且 $a^{-1} \in H$;
- 对任意 $a, b \in H$, 均有 $ab^{-1} \in H$.

Chapter 1. 群论中的基本概念

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2): 由于 H 关于 G 的运算构成群, 故 H 关于 G 的运算封闭, 即对任意 $a, b \in H$, 有 $ab \in H$. 设 e_H 是 H 的单位元, e 是 G 的单位元. 由单位元的定义, $e_H e_H = e_H = e e_H$; 由群 G 的消去律, $e_H = e$. 因此, 对任意 $a \in H$, a 在 H 中的逆元与它在 G 中的逆元相同, 故 $a^{-1} \in H$.

(2) $\Rightarrow$ (3): 由条件直接得到.

(3) $\Rightarrow$ (1): 取 $a \in H$, 令 $b = a$, 则 $e = aa^{-1} \in H$. 取 $a_0 = e$, $b_0 = a \in H$, 则 $a^{-1} = ea^{-1} \in H$, 即 H 关于求逆封闭. 对任意 $a', b' \in H$, 则 $(b')^{-1} \in H$, $a'b' = a'(b'^{-1})^{-1} \in H$, 即 H 关于 G 的乘法封闭. 因此 H 关于 G 的运算构成群, 即 H 是 G 的子群. $\square$

Example 3. 定义群 G 的**中心 (center)**

$$Z(G) := \{z \in G \mid zg = gz, \forall g \in G\},$$

容易验证 $Z(G) \leq G$. G 是 *Abel* 的当且仅当 $G = Z(G)$. 定义群元 $g \in G$ 的**中心化子 (centralizer)**

$$C_G(g) := \{a \in G \mid ga = ag\},$$

容易验证 $C_G(g) \leq G$. $C_G(g) = G$ 当且仅当 $g \in Z(G)$.

Proposition 1.3. 设 G 是群, $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是一族 G 的子群, 指标集 Λ 非空, 则 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \leq G$.

Proof. 根据子群的定义和 *Prop. 1.2* 立刻得. $\square$

Definition 1.5. 设 G 是群, $S \subseteq G$ 非空, $\Lambda(S) = \{H \leq G : H \supseteq S\}$, 定义

$$\langle S \rangle := \bigcap_{H \in \Lambda(S)} H$$

为包含 S 的最小子群, $\langle S \rangle$ 也被称为由子集 S 生成的子群.

Proposition 1.4. 设 G 是群, $S \subseteq G$ 非空, 则

$$\langle S \rangle = \left\{ \prod_{i=1}^n a_i^{e_i} \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in S, e_i = \pm 1 \right\}.$$

1.1. 半群, 么半群, 群, 子群

Remark. 该命题的重要意义在于刻画了 $\langle S \rangle$ 中元素形状如何——用 S 中的元素「自由地」拼接(在有限步内), 然后按照底群 G 中乘法化约. 所谓「自由」的精确刻画, 见 [Sec. 3.5](#).

Proof. 记等式右边的集合为 T . 显然 $S \subseteq T$. 对任意的 $x, y \in T$, 设

$$x = a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_n^{\varepsilon_n}, \quad y = b_1^{f_1} b_2^{f_2} \cdots b_m^{f_m},$$

其中 $n, m \in \mathbb{N}$, $a_i, b_j \in S$, $\varepsilon_i, f_j \in \{\pm 1\}$. 则

$$x \cdot y^{-1} = a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n} b_m^{-f_m} \cdots b_1^{-f_1} \in T,$$

由 [Prop. 1.2](#) 知, $T \leq G$. 又如果 $H \leq G$, $S \subseteq H$, 则 $T \subseteq H$. 故 $T = \langle S \rangle$. $\square$

接下来讨论群乘法引起的子群之间的乘积关系, 设 H 和 K 均为群 G 的子集, 定义一个「自然的」乘法

$$HK := \{hk : h \in H, k \in K\}, \quad H^{-1} := \{h^{-1} : h \in H\}. \quad (1.1)$$

在此符号约定下, [Prop. 1.2](#) 的一个简洁表述是: $H \leq G$ 当且仅当 $HH^{-1} = H$.

Proposition 1.5. 设 G 是群, H, K, J 是 G 子集, 则

- $(HK)J = H(KJ)$;
- $(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1}$.

Proof. 先证 $(HK)J = H(KJ)$. 由集合乘法的定义,

$$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}, \quad KJ = \{kj \mid k \in K, j \in J\}.$$

因而

$$(HK)J = \{xj \mid x \in HK, j \in J\} = \{(hk)j \mid h \in H, k \in K, j \in J\}.$$

另一方面,

$$H(KJ) = \{hy \mid h \in H, y \in KJ\} = \{h(kj) \mid h \in H, k \in K, j \in J\}.$$

由于 G 的乘法满足结合律, $(hk)j = h(kj)$, 故

$$\{(hk)j \mid h \in H, k \in K, j \in J\} = \{h(kj) \mid h \in H, k \in K, j \in J\}.$$

于是 $(HK)J = H(KJ)$.

Chapter 1. 群论中的基本概念

再证 $(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1}$. 由定义, $(HK)^{-1} = \{(hk)^{-1} \mid h \in H, k \in K\}$. 而群中元素的逆满足 $(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1}$, 所以

$$(HK)^{-1} = \{k^{-1}h^{-1} \mid h \in H, k \in K\}.$$

又由 $K^{-1} = \{k^{-1} \mid k \in K\}$, $H^{-1} = \{h^{-1} \mid h \in H\}$, 可知

$$K^{-1}H^{-1} = \{k^{-1}h^{-1} \mid k \in K, h \in H\}.$$

因而 $(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1}$. □

Proposition 1.6. 设 G 是群, H 和 K 是 G 的子群, 则下列命题等价:

- $HK \leq G$;
- $HK = KH$;
- $KH \leq G$.

Proof. 只需证明前两条等价即可. 因为 H 和 K 是子群, 所以 $H^{-1} = H$, $K^{-1} = K$ 且 $HH = H$, $KK = K$. 如果 $HK \leq G$, 则 $HK = (HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = KH$. 反之, 如果 $HK = KH$, 则 $HK(HK)^{-1} = HKK^{-1}H^{-1} = HKH = HHK = HK$, 根据 [Prop. 1.2](#) 的等价诠释 (1.1), $HK \leq G$. 以上证明过程使用了 [Prop. 1.5](#). □

Definition 1.6 [秩 (rank)]. 设群 G , 其秩定义为

$$\text{rank}(G) = \min\{|X| : X \subseteq G, \langle X \rangle = G\}.$$

Definition 1.7 [循环群 (cyclic group), 生成元 (generator)]. 若 $G = \langle g \rangle$, 则称 G 是循环群, g 是 G 的生成元.

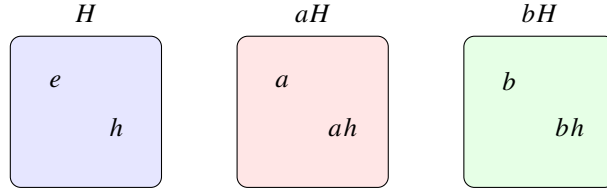
Remark. 循环群的生成元不唯一.

Example. 设 p 为素数, 符号 $\mathbb{Z}_p$ 表示 p 阶循环群, 其可以用一个 p 阶元生成.

1.2 陪集, 正规子群, 商群

当 H 是 G 的子群时, 内部的元素对乘法封闭, 但是对来自外部元素的乘法不是封闭的. 例如设 $h \in H$, 任取 $a \in G \setminus H$, 假若 $ah \in H$, 必有 $ahh^{-1} \in H$, 其中 $h^{-1} \in H$, 矛盾. 同理 $ha \notin H$.

1.2. 陪集, 正规子群, 商群



$$G = H \sqcup aH \sqcup bH$$

Figure 1.1: 陪集分解示意图

我们收集所有的 ah 为集合, 其中 $h \in H$, 记得到的集合为 aH . 我们猜测当所有的 $a \in G$ 都给出 aH 后, 我们可以得到一个「分块」结构, 即有一些 a 给出相同的 aH , 但是所有不同的 aH 可以构成一个 G 的无交分解!

Definition 1.8 [陪集 (coset)]. 设 G 是群, H 是 G 的子群, 对 $g \in G$, 定义

$$gH := \{gh : h \in H\},$$

称为 H 对 g 的左陪集. 同理定义 Hg 是右陪集.

Proposition 1.7. 设 G 是群, H 是 G 的子群, 对任意的 $a, b \in G$ 则

- 要么 $aH \cap bH = \emptyset$, 要么 $aH = bH$;
- $G = \bigcup_{g \in G} gH$, 特别的, 存在 $S \subseteq G$ 使得 $G = \bigsqcup_{s \in S} sH$;
- $aH = bH$ 当且仅当 $a^{-1}b \in H$.

对右陪集情况完全对称.

Remark. 这个命题说明我们先前提到的「分块」结构确实可行, 称这个「分块」结构为陪集空间, 记作 G/H , 右陪集情形记作 $G \backslash H$, 得到这个「分块」结构的过程叫做陪集分解.

Proof. 如果 $aH \cap bH \neq \emptyset$, 则存在 $k \in aH \cap bH$ 且 $k = ah = bh'$, 其中 $h, h' \in H$. 这时 $a^{-1}hh'^{-1} \in H$. 对任意的 $h'' \in H$, $ah'' = (bh'h^{-1})h'' \in bH$, 所以 $aH \subseteq bH$, 同理 $bH \subseteq aH$, 于是 $aH = bH$.

Chapter 1. 群论中的基本概念

因为 G 的每个元素都显然属于某个左陪集, 从而 G 可以写成一族左陪集的不交并. 根据选择公理 **Ax. 0.9**, 可以在每个左陪集 gH 中选出代表元 s , 构成集合 S .

必要性由第一条, 只证充分性. 如果 $a^{-1}b = k' \in H$, 对任意 $h''' \in H$, $ah''' = (bk'^{-1})h''' \in bH$, 所以 $aH \subseteq bH$. 根据第一条知 $aH = bH$. $\square$

Convention 1.1. 若无特别说明, 所言陪集均指左陪集.

陪集空间以陪集为元素, 我们可以「自然地」定义一个乘法运算,

$$(g_1H) \cdot (g_2H) = (g_1g_2)H.$$

然而此运算不一定是良定义的, 因为符号 g_1H 实际上指的是一个等价类, g_1H 或者说 g_1 只是这个陪集等价类的一个代表元, 当选取其他代表元时, 这个运算的结果不应该改变, 因为代表元均指代同一个对象. 取 $g'_1H = g_1H$ 为同一个陪集等价类的代表元, 我们需要

$$(g'_1H) \cdot (g_2H) = (g'_1g_2)H = (g_1g_2)H,$$

也就是陪集的乘法是它们的代表元做乘法再取陪集, 根据 **Prop. 1.7**, 我们知道, 这个式子最后一个等号成立当且仅当

$$(g'_1g_2)^{-1}(g_1g_2) = g_2^{-1}g_1^{-1}g_1g_2 \in H$$

又根据 **Prop. 1.7** 知存在一个 $h \in H$ 使得 $h = g_1^{-1}g'_1$, 且适当调整 g_1, g'_1 可以使得 h 取遍 H , 从而我们得到了在如上「自然」的陪集乘法的定义下, 陪集空间可以具有群结构的充分必要条件:

Proposition 1.8. 陪集空间具有群结构当且仅当 $g^{-1}Hg = H, \forall g \in G$.

这里再说明一下符号的含义, $g^{-1}Hg$ 表示对每一个 $h \in H$, 均进行 $g^{-1}hg$ 运算, 然后收集所有的计算结果, 记作 $g^{-1}Hg$, 等号的含义是两个群作为集合元素相同. 这样的符号的好处是我们可以「自然地」定义一些对「群」的记号的运算, 例如 $H^{-1} = H, g_1Hg_2 = N \iff g_1H = Ng_2^{-1}$, 等等. 我们下面证明以上命题.

Proof. 我们上面的讨论已经证明满足 $g^{-1}Hg = H$ 时, 「自然」乘法良定义, 我们需要证明 G/H 在这个乘法下, 有封闭性, 单位元和逆元, 结合律已然自明.

- 封闭性, 因为代表元作为群元的乘法是封闭的, 所以乘完的结果在取陪集依旧属于陪集空间, 即封闭;
- 单位元, 容易验证, 以单位元为代表元得到的陪集, 也就是 H 自身, 是单位元;

1.2. 陪集, 正规子群, 商群

- 逆元, 对任意的 $gH \in G/H$, 我们用新定义的符号体系运算 $(gH)^{-1} = H^{-1}g^{-1} = Hg^{-1}$ 且 $Hg^{-1} = g^{-1}H$, 可以验证 $(gH)^{-1} = g^{-1}H$ 确实是 gH 的逆元.

我们无需在验证单位元和逆元的唯一性, 回忆本章最开始的讨论. 最终, G/H 确实是群.

反过来, 如果陪集空间具有群结构, 我们先有 $(gH)^{-1} = H^{-1}g^{-1} = Hg^{-1}$, 两遍同时乘 gH . 得到

$$(gH)(gH)^{-1} = H = (gH)(Hg^{-1}) = gHg^{-1}.$$

□

我们可以在上面的过程中总结出两个十分有用的概念.

Definition 1.9 [正规子群 (normal subgroup), 商群 (quotient group)]. 设 G 是群, H 是 G 的子群, 称 H 是 G 的正规子群, 记作 $H \trianglelefteq G$ 如果: 对任意的 $g \in G$, 均有 $g^{-1}Hg = H$. 如果 $H \trianglelefteq G$, 则称具有群结构的陪集空间 G/H 为商群.

Example. $Abel$ 群的任意子群自动正规.

Example. 群 G 的中心 $Z(G) \trianglelefteq G$.

这个概念说明 G/H 具有群结构, 当且仅当 $H \trianglelefteq G$. 或者说 H 正规, 当且仅当其左右陪集相等 $gH = Hg$.

Proposition 1.9. 设 G 是群, H 是 G 的子群, 则以下条件等价:

- $H \trianglelefteq G$;
- $g^{-1}Hg = H$;
- $gH = Hg$;
- $gH \subseteq Hg$;
- $Hg \subseteq gH$.

Proof. 按 (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3) $\implies$ (4) $\implies$ (5) $\implies$ (1) 顺序证明:

(1) $\implies$ (2): 由正规子群定义知 $g^{-1}Hg \subseteq H$. 对 g^{-1} 同样成立, 即 $gHg^{-1} \subseteq H$, 两边左乘 g^{-1} 右乘 g 得 $H \subseteq g^{-1}Hg$. 故 $g^{-1}Hg = H$.

(2) $\implies$ (3): 在 $g^{-1}Hg = H$ 左侧乘 g 即得 $Hg = gH$.

(3) $\implies$ (4): 由集合相等显然蕴含包含关系.

(4) $\implies$ (5): 对任意 $g \in G$, 由 (4) 知 $g^{-1}H \subseteq Hg^{-1}$. 两边同时左乘 g 且右乘 g 可得 $Hg \subseteq gH$.

Chapter 1. 群论中的基本概念

(5) $\implies$ (I): 由 $Hg \subseteq gH$ 知 $H \subseteq gHg^{-1}$. 既然此式对所有 $g \in G$ 成立, 将 g 替换为 g^{-1} , 即得 $H \subseteq g^{-1}Hg$, 等价于 $gHg^{-1} \subseteq H$, 即 $H \trianglelefteq G$. $\square$

Example 4. 设 G 是群, H 是 G 的子群, 令

$$N_G(H) := \{g \in G : g^{-1}Hg = H\},$$

称为 H 在 G 中的**正规化子** (*normalizer*). 容易验证 $H \trianglelefteq N_G(H) \leq G$.

Example 5. 设 G 是群, $S \subseteq G$ 非空, 满足: 对任意 $g \in G, s \in S$, 有 $g^{-1}sg \in S$, 则 $\langle S \rangle \trianglelefteq G$. 事实上, $\langle S \rangle$ 中的元素都形如 $s_1^{e_1}s_2^{e_2}\cdots s_n^{e_n}$, 其中 $s_i \in S, e_i = \pm 1$. 注意到对任意的 $g \in G$, 有 $g^{-1}s_i^{e_i}g = (g^{-1}s_i g)^{e_i} \in \langle S \rangle$, 则

$$\begin{aligned} g^{-1}(s_1^{e_1}s_2^{e_2}\cdots s_n^{e_n})g &= (g^{-1}s_1^{e_1}g)(g^{-1}s_2^{e_2}g)\cdots(g^{-1}s_n^{e_n}g) \\ &= (g^{-1}s_1g)^{e_1}(g^{-1}s_2g)^{e_2}\cdots(g^{-1}s_ng)^{e_n} \in \langle S \rangle. \end{aligned}$$

所以 $\langle S \rangle \trianglelefteq G$. 特别地, 若取

$$S_0 = \{x^{-1}y^{-1}xy \mid x, y \in G\},$$

对任意的 $g, x, y \in G$, 都有

$$g^{-1}(x^{-1}y^{-1}xy)g = (g^{-1}xg)^{-1}(g^{-1}yg)^{-1}(g^{-1}xg)(g^{-1}yg) \in S_0.$$

记 $G' \equiv [G, G] := \langle S_0 \rangle$. 我们称 $[G, G]$ 为 G 的**换位子群** (*commutator subgroup*) 或**导群** (*derived subgroup*). 当然有 $[G, G] \trianglelefteq G$, 这是群论中一个重要的正规子群.

Proposition 1.10. 设 G 是群, 则

- $G/[G, G]$ 是 *Abel* 群;
- 若 $H \trianglelefteq G$ 使得 G/H 是 *Abel* 群, 则 $H \supseteq [G, G]$.

Remark. 该命题的重要意义在于, 揭示了换位子群是使得商群为 *Abel* 群的最小正规子群.

Proof. 如果 $u, v \in G/[G, G]$, 设 $u = x[G, G], v = y[G, G], uv = xy[G, G], vu = yx[G, G]$. 由于 $(yx)^{-1}xy = x^{-1}y^{-1}xy \in \langle S_0 \rangle \subseteq [G, G]$, 所以 $xy[G, G] = yx[G, G]$, 即 $uv = vu$, 从而 $G/[G, G]$ 是

1.2. 陪集, 正规子群, 商群

Abel 群.

如果 G/H 是 *Abel* 群, 则对任意 $x, y \in G$, $xH, yH \in G/H$, 均有 $(xH)(yH) = (yH)(xH)$, 所以 $x^{-1}y^{-1}xy \in H$, 所以 $S_0 \subseteq H$, $[G, G] = \langle S_0 \rangle \subseteq H$. $\square$

本节伊始, 我们就阐明了任意子群的陪集分解, 都会得到一个「分块」结构, 称为陪集空间, 同时容易知道, 每个陪集的「大小」都是一样的, 因为在群中, 群元的左乘或右乘如果看作从子群到陪集的映射的话, 是一个双射.

Definition 1.10 [指数 (index)]. 设 G 是群, H 是 G 的子群, 定义 G 关于 H 的左指数和右指数分别为

$$[G : H]_l := |\{gH : g \in G\}|, \quad [G : H]_r := |\{Hg : g \in G\}|.$$

其中 $|\cdot|$ 表示集合的基数.

Lemma 1.1. $[G : H]_l = [G : H]_r$.

Proof. 设 $\Sigma_l \triangleq \{aH \mid a \in G\}$, $\Sigma_r \triangleq \{Hb \mid b \in G\}$. 考虑对应 $\theta : \Sigma_l \rightarrow \Sigma_r$, $aH \mapsto Ha^{-1}$. 首先验证 θ 是单值对应: 若 $aH = a'H$, 则 $a^{-1}a' \in H$, 故 $Ha^{-1} = Ha'^{-1}$, 即 $\theta(aH) = \theta(a'H)$. 若 $\theta(aH) = \theta(bH)$, 即 $Ha^{-1} = Hb^{-1}$, 故 $a^{-1}b \in H$, $aH = bH$. 并且 $\theta(a^{-1}H) = Ha$, 所以 θ 既是单射也是满射, 故 $[G : H]_l = [G : H]_r$. $\square$

这个引理允许我们不再区分 $[G : H]_l$ 和 $[G : H]_r$, 从此均记作 $[G : H]$. 当集合是有限集时, 「大小」指的就是元素的个数, 所以整个 G 的「大小」应当是 H 的「大小」乘以陪集的个数, 我们有如下定理:

Theorem 1.2 [Lagrange 定理 (Lagrange theorem)]. 设 G 是有限群, H 是 G 的子群, 则

$$[G, H] = \frac{|G|}{|H|}.$$

Proof. 根据陪集分解的性质立刻得. $\square$

Corollary 1.1. 设 G 是群, 则

- 如果 $H \leq G$, 则 $|H| \mid |G|$;
- 任意的 $g \in G$, 均有 $o(g) \mid |G|$;

Chapter 1. 群论中的基本概念

- 如果 $|G|$ 是素数, 则 G 是循环群.

Proof. 根据 *Lagrange* 定理:

- $|G| = [G : H] \cdot |H|$, 因为 $[G : H]$ 为整数, 故 $|H| \mid |G|$.
- 令 $H = \langle g \rangle$ 为 g 生成的循环子群, 则 $|H| = o(g)$. 由上述结论即得 $o(g) \mid |G|$.
- 取 $e \neq g \in G$, 则 $\langle g \rangle$ 是 G 的子群且 $|\langle g \rangle| = o(g) > 1$. 由于 $o(g) \mid |G|$ 且 $|G|$ 是素数, 必有 $o(g) = |G|$, 故 $G = \langle g \rangle$ 是循环群.

□

Proposition 1.11. 设 G 是群, H 和 K 均是 G 的有限子群, 则

$$|HK| = \frac{|H| |K|}{|H \cap K|}.$$

Proof. 记 $L = H \cap K$, $L \leq K$, $L \leq H$, 可记

$$K = \bigcup_{k \in K} Lk = \bigsqcup_{1 \leq i \leq n} Lk_i,$$

其中 $n = [K : L]$, 则

$$HK = H \left(\bigsqcup_{1 \leq i \leq n} Lk_i \right) = \bigcup_{i=1}^n H L k_i = \bigcup_{i=1}^n H k_i.$$

而 $Hk_i = Hk_j$ 当且仅当 $k_i k_j^{-1} \in H$; 当且仅当 $k_i k_j^{-1} \in H \cap K = L$; 当且仅当 $Lk_i = Lk_j$. 所以上式为无交并, 故

$$|HK| = |H| n = \frac{|H| |K|}{|H \cap K|}.$$

□

1.3 对称群, 交错群, 单群, 二面体群

Definition 1.11 [置换 (permutation)]. 设 X 是一个非空集合, 令 $S_X = \{\sigma : X \rightarrow X \mid \sigma \text{ 是双射}\}$, 定义其上的乘法为映射的复合 $\sigma \cdot \tau := \sigma \circ \tau$, 装备了如上乘法的集合 S_X 是一个群, 称为 X 上的**对称群**, 其中的元素称为 X 上的一个**置换**.

如果 X 形如 $\{1, 2, \dots, n\}$, 则记 $S_X = S_n$, 称为 n 阶对称群. 所谓「形如」, 准确来讲是两者作为集合存在双射, 从而 S_X 与 S_n 同构, 有关群同构的概念见 [Sec. 2.1](#). 我们采用如下形式表达某个 S_n 中的元素,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

意思是 $1 \mapsto \sigma(1), \dots, n \mapsto \sigma(n)$. 容易知道 $|S_n| = n!$, 因为所有元素构成全排列.

Definition 1.12 [轮换 (cycle), 对换 (transposition)]. 设 $i_1, \dots, i_d \in \{1, \dots, n\}$ 互不相同, $d \geq 2$. 若 $\sigma \in S_n$ 形如

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_d \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_1 \end{pmatrix},$$

则称 σ 是一个 d -**轮换**, 并记作 $\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_d)$. 两个元素的轮换称为**对换**.

如果两个轮换 $\sigma = (i_1 \cdots i_d), \tau = (j_1 \cdots j_r)$ 满足 $\{i_1, \dots, i_d\} \cap \{j_1, \dots, j_r\} = \emptyset$, 则称两个轮换**不交**. 显然不交时, 有 $\sigma\tau = \tau\sigma$.

Theorem 1.3 [轮换分解]. 对于任意非恒等元素 $\sigma \in S_n$, 不考虑轮换出现的顺序, σ 可唯一地表示为有限多个两两不相交的轮换之积, 即 $\sigma = \prod_{i=1}^m \sigma_i$, 这里每个 σ_i 为轮换, 且对 $i \neq j$, σ_i 与 σ_j 互不相交. 称这个分解为 σ 的**轮换分解**.

Proof. 该命题可以通过对 n 做归纳证明. 这里我们将直接给出轮换分解的一个算法. 首先起始设定: $\Sigma_1 = \{1, \dots, n\}$. 对 $i \geq 1$, 构造 τ_i 和集合 Σ_{i+1} : 取 Σ_i 中最小的元 a . 取轮换

$$\tau_i = (a \sigma(a) \sigma^2(a) \cdots \sigma^{k-1}(a)),$$

Chapter 1. 群论中的基本概念

这里 k 是最小的正整数使得 $\sigma^k(a) = a$. 从定义可知, 如果 τ_i 不是恒等元, 则其必为轮换. 设

$$\Sigma_{i+1} = \Sigma_i \setminus \{a, \sigma(a), \dots, \sigma^{k-1}(a)\}.$$

由于 $\Sigma_{i+1} \subseteq \Sigma_i$ 为 Σ_1 的真子集序列, 而 Σ_1 为有限集, 因此在有限次后 (不妨设为 t 次) 必有 $\Sigma_{t+1} = \emptyset$. 由构造可知, $\tau_1, \dots, \tau_t$ 不全为恒等元, 记其中的全部非恒等元为 $\sigma_1, \dots, \sigma_m$, 它们必然互不相交且 $\sigma = \prod_{i=1}^m \sigma_i$. □

对 $d \geq 2$, 令 λ_d 表示 σ 的轮换分解式中 d -轮换的个数, 用 λ_1 表示 σ 的不动点的个数, 即

$$\lambda_1 = |\{1 \leq i \leq n \mid \sigma(i) = i\}|.$$

这时我们可以称 σ 具有**轮换结构**

$$[1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}],$$

或者说 σ 的型为 $[1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}]$. 由定义, 每个 λ_i 是一个非负整数, 并且 $n = \sum_{i=1}^n i\lambda_i$. 当某个 $\lambda_i = 0$ 时, 我们在表示 σ 的型时通常会省略 λ_i 这一项.

Example 6. 考虑对称群 S_9 中的置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 9 & 7 & 8 & 6 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

下面计算 σ 的轮换分解.

Solution. 首先, $1 \mapsto \sigma(1) = 4$, 然后 $4 \mapsto \sigma(4) = 7$, $7 \mapsto \sigma(7) = 1$, 即 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 1$, 故有 3-轮换 (147). 类似地, 我们有 $2 \rightarrow 3 \rightarrow 9 \rightarrow 2$, 故有 3-轮换 (239); $5 \rightarrow 8 \rightarrow 5$, 故有对换 (58); $6 \rightarrow 6$, 即 6 是 σ 的不动点. 因此我们得到 σ 的轮换分解: $\sigma = (147)(239)(58)$. 进而 σ 的型为 $[1^1 2^1 3^2]$. 由于不相交的轮换的复合是交换的, 由 σ 的轮换分解我们可以计算 σ 的阶等于 $6 = \text{lcm}(3, 3, 2)$, 这里 lcm 表示最小公倍数. □

Example 7. 计算 (1762)(563)(347). 从 1 开始, 从轮换分解的右侧因式向左运算, 在 (347) 中, $1 \mapsto 1$, 再看 (563), $1 \mapsto 1$, 再看 (1762), $1 \mapsto 7$, 所以 $1 \mapsto 7$; 下一步计算 7, (347): $7 \mapsto 3$, (563): $3 \mapsto 5$, (1762): $5 \mapsto 5$, 所以 $7 \mapsto 5$; 下一步计算 5, (347): $5 \mapsto 5$, (563): $5 \mapsto 6$, (1762): $6 \mapsto 2$, 所以 $5 \mapsto 2$; ...
最终我们得到 $1 \mapsto 7 \mapsto 5 \mapsto 2 \mapsto 1$ 和 $3 \mapsto 4 \mapsto 6 \mapsto 3$ 两个轮换链.

1.3. 对称群, 交错群, 单群, 二面体群

Proposition 1.12. 满足轮换结构 $\left[\prod_{i=1}^n i^{\lambda_i} \right]$ 的轮换的个数为 $\frac{n!}{\prod_{i=1}^n i^{\lambda_i} \lambda_i!}$.

Proof. 注意 $n = \sum_{i=1}^n i \lambda_i$. 根据组合学, 区分顺逆时针的环型全排列方案数为 $(n-1)!$, 已经考虑了去重度 n . 先全轮换 $n!$, 每一个轮换因子方案数为 $(i-1)!$, 这部分区分. 不区分的是环形部分, 即 i , 以及同尺寸的环之间的全排列 $\lambda_i!$, 综合考虑后得到结果. $\square$

Proposition 1.13 [对换分解]. 在对称群 S_n 中, 任何 d -轮换可表示为 $d-1$ 个对换之积. 任意 n -置换可表示为有限个对换之积.

Proof. 对于 d -轮换, 可直接验证有如下等式

$$(i_1 i_2 \cdots i_d) = (i_1 i_2)(i_2 i_3) \cdots (i_{d-1} i_d).$$

再由轮换分解可知, 所有置换都可以分解成若干个轮换之积, 因此也都可以表示为若干个对换之积. $\square$

一种好用的对换分解的手法, 我称之为「顶真」, 例如 $(132) = (13)(32)$, 变形后再 $(132) = (213) = (21)(13)$. 对换分解并不是唯一的, 例如 $(132) = (13)(32) = (12)(13)$. 然而, 我们将看到该分解给出的对换的个数的奇偶性却是不变的. 为了叙述得更加清晰, 我们接下来引入奇偶置换的概念.

Definition 1.13 [交错群 (alternating group)]. 对任意 $\sigma \in S_n$, 若有序数组 $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$, 是奇/偶排列, 我们称 σ 为奇/偶置换. 按照定义, σ 的奇偶性与排列 $\sigma(1)\sigma(2) \cdots \sigma(n)$ 的逆序数的奇偶性相同. 我们记

$$A_n := \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ 为偶置换}\},$$

称为 n 阶交错群.

Proposition 1.14. 设 S_n 为 n 阶对称群, A_n 是 n 阶交错群, 则

- 任意的 $\sigma \in S_n$, 其是奇/偶置换当且仅当其可以分解为奇/偶数个对换的积.
- 对 $n \geq 2$, $A_n \triangleleft S_n$ 且 $[S_n : A_n] = 2$;

Chapter 1. 群论中的基本概念

Proof. 首先, 任意置换 σ 均可分解为对换的积. 设 $\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_k$, 其中 τ_i 为对换. 定义符号函数 $\text{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$. 已知 $\text{sgn}(\tau) = -1$ (对任意对换 τ) 且 sgn 是群同态. 则 $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^k$. 由此可知, σ 是偶置换 ($\text{sgn}(\sigma) = 1$) 当且仅当 k 为偶数; σ 是奇置换 ($\text{sgn}(\sigma) = -1$) 当且仅当 k 为奇数.

作映射 $\theta_{1,2}: S_n \rightarrow S_n$, 对 $\sigma \in S_n$, $\theta_{1,2}(\sigma) := \sigma \circ (12)$, 从而 $\theta_{1,2}$ 是双射, 且把奇/偶置换映射为偶/奇置换, 于是 S_n 中奇偶置换个数相同, 所以 $[S_n : A_n] = 2$, A_n 据此获得正规性. $\square$

Proposition 1.15. 对 $n \geq 2$, $\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_r) \in S_n$, 则对任意的 $\tau \in S_n$, 有 $\tau \sigma \tau^{-1} = (\tau(i_1) \tau(i_2) \cdots \tau(i_r))$.

Proof. 设 $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix}$, 则 $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$, 所以

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_r) \tau^{-1} = \begin{pmatrix} \tau(i_1) & \tau(i_2) & \cdots & \tau(i_r) \\ \tau(i_2) & \tau(i_3) & \cdots & \tau(i_1) \end{pmatrix} = (\tau(i_1) \tau(i_2) \cdots \tau(i_r)).$$

为了更清晰地看到过程, 另 $\eta = \tau(i_1 i_2 \cdots i_r) \tau^{-1}$ 考虑 $\eta(\tau(i_1)) = \tau((i_1 i_2 \cdots i_r)(i_1)) = \tau(i_2)$, 余类推. $\square$

Proposition 1.16. 下面的命题成立:

- 对 $n \geq 2$, $S_n = \langle (12), (13), \cdots, (1n) \rangle = \langle (12), \cdots, (12 \cdots n) \rangle$;
- 对 $n \geq 3$, $A_n = \langle (123), (124), \cdots, (12n) \rangle$.

Proof. S_n 可以由对换生成. 对 $i < j$, 有 $(ij) = (1i)(1j)(1i)^{-1} = (1i)(1j)(1i)$, 故

$$S_n = \langle (12), (13), \cdots, (1n) \rangle.$$

又注意到对 $1 < j < n$, 有 $(12 \cdots n)(1j)(12 \cdots n)^{-1} = (2, j+1)$, $(12)(2, j+1)(12)^{-1} = (1, j+1)$, 故

$$\langle (12), (12 \cdots n) \rangle = \langle (12), (13), \cdots, (1n) \rangle = S_n.$$

对任意 $\sigma \in A_n$, σ 可表示为偶数个对换之积. 对 $i \neq j$, $(ij) = (1i)(1j)(1i)$, 故 σ 可表示为偶数个形如 $(1i)$ 的对换之积. 而

$$(1i)(1j) = (1ji) = (12i)(12j)^{-1},$$

故偶置换都可以表示成 3-循环之积. $\square$

1.3. 对称群, 交错群, 单群, 二面体群

正规子群于母群而言, 正如因数与整数而言. 所谓质数, 就是指哪些没有非平凡因数的整数, 因为我们定义:

Definition 1.14 [单群 (simple group)]. 如果群 G 没有非平凡正规子群, 则称 G 是单群.

Example. 素数阶群是单群.

Theorem 1.4. 对 $n \neq 4$, A_n 是单群.

Proof. *Klein 四元群 (Klein four-group)* $V_4 := \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \trianglelefteq A_4$. 它是 *Abel* 群. $A_3 = \langle (123) \rangle$ 为 3 阶循环群, 故为单群. A_1, A_2 均只有一种循环群结构, 直接验证知也为单群.

现在证明当 $n \geq 5$ 时 A_n 为单群. 设 $K \trianglelefteq A_n$, 且 $|K| > 1$. 我们的目标是证明 $K = A_n$.

第一步 断言: 如果 K 中含有一个 3-轮换 (rst) , 则 $K = A_n$. 设 $i > 3$, 只需证明 $(12i) \in K$. 取置换 $\sigma \in S_n$ 使得 $\sigma(r) = 1, \sigma(s) = 2, \sigma(t) = i$, 有如下两种情形:

(i) 若 $\sigma \in A_n$, 则

$$\sigma(rst)\sigma^{-1} = (\sigma(r)\sigma(s)\sigma(t)) = (12i) \in K.$$

(ii) 若 $\sigma \notin A_n$, 由 $n \geq 5$, 可取 $\{u, v\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{1, 2, i\}$, 则 $\bar{\sigma} = (uv)\sigma \in A_n$, 且

$$\bar{\sigma}(rst)\bar{\sigma}^{-1} = (uv)(\sigma(rst)\sigma^{-1})(uv) = (uv)(12i)(uv) = (12i) \in K.$$

第二步 断言: K 中必含有一个 3-轮换. 对任意 $\alpha \in K, \beta \in A_n, \beta\alpha\beta^{-1} \in K$, 故 $\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1} \in K$. 目标是找一个合适的 β 使得 $\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}$ 是 3-轮换. 我们已经知道, α 可分解为互不相交的轮换之积. 定义 $\eta(\alpha)$ 为 α 的不相交轮换分解中轮换因子的最大长度. 自然地, 可对 α 做下列分类 (可跳过 α 恰好是 3-轮换的情形):

- (i) $\eta(\alpha) \geq 5$;
- (ii) $\eta(\alpha) = 4$;
- (iii) $\eta(\alpha) = 3$ 且 α 至少有两个 3-轮换因子;
- (iv) $\eta(\alpha) = 3$ 且 α 只有一个 3-轮换因子;
- (v) $\eta(\alpha) = 2$ 且 α 有至少 4 个不相交对换因子;
- (vi) $\eta(\alpha) = 2$ 且 α 恰有两个不相交的对换因子.

Chapter 1. 群论中的基本概念

下面依各种情形构造出 K 中的 3-轮换:

(i)' 不妨设 $\alpha = (1234 \cdots m)\alpha'$, 其中 $m \geq 5$, α' 为与 $(12 \cdots m)$ 不相交的一些轮换之积. 取 $\beta = (345)$, 则

$$\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1} = (345)(\alpha(354)\alpha^{-1}) = (345)(\alpha(3)\alpha(5)\alpha(4)).$$

当 $m = 5$ 时,

$$\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1} = (345)(415) = (134) \in K;$$

当 $m > 5$ 时,

$$\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1} = (345)(465) = (346) \in K.$$

(ii)' 设 α 有轮换因子 (1234) . 取 $\beta = (234)$, 则

$$\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1} = \beta(\alpha(243)\alpha^{-1}) = \beta(314) = (234)(314) = (123) \in K.$$

(iii)' 设 α 有因子 (123) , (456) . 取 $\beta = (124)$, 则 $\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1} = (12534)$, 可归结到情形 (i).

(iv)' 如果 α 不是 3-轮换, 设 α 有因子 (12) , (34) , (567) . 取 $\beta = (135)$, 则 $\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1} = (135)(264)$, 可归结到情形 (iii).

(v)' 设 α 有因子 (12) , (34) , (56) , (78) . 取 $\beta = (135)$, 则 $\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1} = (135)(264)$, 可归结到情形 (iii).

(vi)' 设 $\alpha = (12)(34)$. 取 $\beta = (135)$, 则 $\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1} = (13542)$, 可归结到情形 (i). $\square$

Definition 1.15 [二面体群 (dihedral group)]. 平面上的正 n 边形的全等变换构成的群称作二面体群, 记作 D_n .

依照定义, $D_n \leq O(2)$, 允许手性变换. 将 n 个顶点依次编号 $1, 2, \dots, n$, 在 D_n 的作用下, 顶点对 $(1, 2)$ 只能映射为 $(1, 2), (2, 3), \dots, (n, 1)$ 或 $(2, 1), (3, 2), \dots, (1, n)$. 注意到 $(1, 2)$ 的映照方式唯一确定 D_n 中的所有元素, 从而 $|D_n| = 2n$. 当 $n \geq 3$ 时, D_n 非交换, $D_n < S_n$.

简单分析可知, 平面全等变换可以归结为两类操作: 旋转和镜面对称. 譬如中心反演操作总是可以写成旋转和镜面对称的组合操作, 其余同理.

* 1.4 五次及以上方程无根式解

你可能听说过五次方程没有根式解, 这十分令人惊讶, 因为我们熟知二次方程的根式解, 并且或许也知道三、四次方程有根式解, 而且见过它们的表达式. 但为什么偏偏五次以及以上的方程没有根式解呢?

1.4. 五次及以上方程无根式解

对这个问题的研究是一段很有意思的历史. 早在 16 世纪, 意大利数学家就求得了三、四次方程的根式解, 被称作 **Cardano 公式 (Cardano's formula)** 和 **Ferrari 方法 (Ferrari's method)**: 对于一元三次方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$, 其三个根可写为

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}} + \sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3} \\ &\quad + \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}} - \sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}, \\ x_2 &= -\frac{b}{3a} + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}} + \sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3} \\ &\quad + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}} - \sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}, \\ x_3 &= -\frac{b}{3a} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}} + \sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3} \\ &\quad + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}} - \sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}. \end{aligned}$$

对于一元四次方程 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, a \neq 0$, 记 $\Delta_0 = c^2 - 3bd + 12ae, \Delta_1 = 2c^3 - 9bcd + 27b^2e + 27ad^2 - 72ace$. 再记 $Q = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}}$. 令 $S = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2}{3}p + \frac{1}{3a}\left(Q + \frac{\Delta_0}{Q}\right)}$, 其中 $p = \frac{8ac - 3b^2}{8a^2}$. 于是四个根为

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{b}{4a} - S + \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}}, \\ x_2 &= -\frac{b}{4a} - S - \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}}, \\ x_3 &= -\frac{b}{4a} + S + \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}}, \\ x_4 &= -\frac{b}{4a} + S - \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}}, \end{aligned}$$

Chapter 1. 群论中的基本概念

$$x_4 = -\frac{b}{4a} + S - \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}},$$

其中 $q = \frac{b^3 - 4abc + 8a^2d}{8a^3}$.

尽管表达式很丑陋,但是能写出表达式给予了当时的数学家很大的信心,认为存在方法能写出任意次数的方程的根式解. 于是他们又尝试了约 300 年,始终无法求出五次方程的根式解,期间陆续开始有人提出五次以上的方程无根式解的猜想,但是鲜有人能给出严格的证明. 根据现存史料, Lagrange 是最早注意到联系「根的置换」与根式解的人,「置换」用现代数学语言就是群论乃至整个抽象代数; 1799 年,意大利数学家 Ruffini 顺着这个思路,给出了最早的证明,但这个证明是有漏洞的; 1824 年,挪威数学家 Abel 给出了被广泛接受的严格证明 — **五次及以上方程没有根式解**. 这个伟大的结论被称作 **Abel–Ruffini 定理** (Abel–Ruffini theorem). 但这不是问题的结束,天才数学家 Galois 真正解释了根式解存在与否的原则 — **一个方程能否用根式解,取决于它的根的置换群是否具有某种可解性**. 现代语言中,这个置换群叫做 **Galois 群**,这套理论就是现代数学中重要的 Galois 理论. 值得注意的是, Galois 于 1830 年前后写下他的理论时年仅 20 岁,之后马上就死于决斗了,他的理论直到死后的 1846 年才被数学家 Liouville 代以发表.

本节我们仅用「根的置换」说明为什么五次方程为什么没有根式解,中心思想是: **五次方程没有根式解,是因为它的解的对称性要低于「根式」的对称性,从而仅使用根式不可分辨它的解**. 为了体会上面那句话是什么意思,我们先看一个简单的情形,以下均设数域为 $\mathbb{C}$:

Proposition 1.17. 一般二次方程无有理分式解.

Remark. 所谓「有理分式解」,指的就是对方程的系数进行加减乘除得到的解.

Proof. 考虑方程 $x^2 + c_0x + c_1 = 0$, 根据代数基本定理 (见 *Thm. 6.7*), 二次方程有两个根, 记作 x_1 和 x_2 . 由 Vieta 定理,

$$x_1 + x_2 = -c_0, \quad x_1x_2 = c_1.$$

假设方程的解是有理分式型, 即 $x_1 = F_1(c_0, c_1)$, $x_2 = F_2(c_0, c_1)$, 其中 F_1 和 F_2 都是关于 c_0 和 c_1 的有理分式型函数. 系数 c_0, c_1 是根 x_1, x_2 的对称函数, 所以交换 $x_1 \leftrightarrow x_2$ 不改变系数. 因而任何只由 c_0, c_1 经过加减乘除得到的表达式, 也不应该在交换 x_1, x_2 后发生改变, 也就是维持 $x_1 = F_1(c_0, c_1)$, $x_2 = F_2(c_0, c_1)$. 但是单个根 x_1 在交换下会变成 x_2 , 除非 $x_1 = x_2$. 一般二次方程的两个根不同, 所以不可能用有理分式单独表示某一个根. $\square$

假如我们事先就知道二次方程的求根公式, 上述命题是显然的. 此处这个命题是想以小见大说明道理: 「求根公式」的对称性必须足够低, 以至于可以分辨不同的解.

我们现在来看二次方程的求根公式

$$x_1 = \frac{-c_0 - \sqrt{c_0^2 - 4c_1}}{2}, \quad x_2 = \frac{-c_0 + \sqrt{c_0^2 - 4c_1}}{2},$$

1.4. 五次及以上方程无根式解

讨论为什么其可以避免导出「置换操作推出 $x_1 = x_2$ 」。由求根公式可知, $x_2 - x_1 = \sqrt{c_0^2 - 4c_2}$, 当进行 $x_1 \leftrightarrow x_2$ 时, 这个部分会改变符号 $x_1 - x_2 = -\sqrt{c_0^2 - 4c_2} = -(x_2 - x_1)$, 说明其不是一个置换不变量! 究其原因, 我们在复变函数中知道, 开方根运算在复数域会给出两个值 $\pm\sqrt{c_0^2 - 4c_2}$, 而置换操作后, 求根公式中的根式就会交换符号, 从而改变求根公式自身, 最终避免导出 $x_1 = x_2$ 。

Proposition 1.18. 对一般三次方程而言, 只用一层根式的求根公式不能分辨全部三个根; 对一般四次方程而言, 只用两层根式的求根公式不能分辨全部四个根。

Remark. 先说明这里的「一层」与「两层」的含义。零层根式指的是只由方程系数通过加减乘除得到的有理分式; 一层根式指的是在有理分式外开一次根; 两层根式指的是允许根式中再含有根式。

Proof. 我们给出三次方程情形的证明。设三个根是 x_1, x_2, x_3 , 约定用书写的顺序表示当前置换后的情况。假设求根公式只用到一层根式。交换前两个根, 得 x_2, x_1, x_3 , 再交换第一个和第三个根, 得 x_3, x_1, x_2 , 交换前两个根, 得 x_1, x_3, x_2 , 交换第一个和第三个根, 得 x_2, x_3, x_1 。如上流程确实置换了三个根的顺序, 但是诸根式却不变, 因为每次操作改变某些根式的符号, 前两次和后两次操作对应, 最终根式不变。这样我们就找到了一种方案, 证明了此时根不可分辨, 因此三次方程求根公式不可能只用到一层根式。

对于操作给变某些根式的符号, 有必要进行更严格清晰的论述。考虑 $\delta = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$, 其在交换两个根后会改变一次符号, 因此可以感知根的顺序。但是 $\delta^2 = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$ 是对称的, 因此可以由系数表示。因此说 δ 是**判别式**, 求根公式内必然包含 (可以不是显式地) $\sqrt{\delta^2}$, 因为必须据此分辨不同的根。□

我们记上面证明过程用到的四步操作为 a, b, a^{-1}, b^{-1} , 可以知道总的对称操作是 $aba^{-1}b^{-1} \in [S_3, S_3]$, 是置换三个根的换位子群 (见 Ex. 5)。

Proof. 我们给出四次方程情形的证明。从上面的讨论可知, 如果采用 $[S_4, S_4]$ 的换位子操作, 我们只能保证最内层的根号不变。为了让外层根号不变, 我们进行「二阶换位子操作」, 也就是 $[[S_4, S_4], [S_4, S_4]]$ 。可以验证这个群不是平凡的, 从而存在置换四个根而不影响两层根式的操作。□

据此我们可知, 对于一般 n 次方程的 n 个根, 如果某个「求根公式」是用 m 层根式表达的, 我们可以对 S_n 求 m 次导群, 若其不是平凡的, 则说明不存在 m 层根式解。

Theorem 1.5 [Abel–Ruffini 定理]. 对 $n \geq 5$, S_n 无穷阶可导, 从而 n 次方程没有根式解。

Remark. 「无穷阶可导」意思是导群列不会下降到平凡群。

Chapter 1. 群论中的基本概念

Proof. 考虑 S_n , 其中 $n \geq 5$. 首先证明 $[S_n, S_n] = A_n$. 由于 $S_n/A_n \cong C_2$ 是 *Abel* 群, 根据换位子群的最小性 *Prop. 1.10*, $[S_n, S_n] \subseteq A_n$. 另一方面, A_n 由 3-轮换生成 *Prop. 1.16*. 因此只需证明 3-轮换属于 $[S_n, S_n]$.

例如, 取 $x = (12)$, $y = (23)$. 按照换位子 $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ 的定义, 有

$$[(12), (23)] = (12)(23)(12)(23) = (132).$$

因此一个 3-轮换属于 $[S_n, S_n]$. 又因为所有 3-轮换彼此共轭, 且 $[S_n, S_n] \trianglelefteq S_n$, 所以所有 3-轮换都属于 $[S_n, S_n]$. 于是 $A_n \subseteq [S_n, S_n]$. 综上得到 $[S_n, S_n] = A_n$.

接下来证明 $[A_n, A_n] = A_n$. 因为 $[A_n, A_n] \trianglelefteq A_n$, 而当 $n \geq 5$ 时 A_n 是单群, 所以 $[A_n, A_n] = \{e\}$ 或 $[A_n, A_n] = A_n$. 但 A_n 不是 *Abel* 群, 因此 $[A_n, A_n] \neq \{e\}$, 从而 $[A_n, A_n] = A_n$. 于是 S_n 的导群列为 $S_n^{(0)} = S_n$, $S_n^{(1)} = [S_n, S_n] = A_n$, 并且 $S_n^{(2)} = [A_n, A_n] = A_n$. 归纳可得 $S_n^{(k)} = A_n$, $k \geq 1$. 因此导群列永远不会下降到平凡群 $\{e\}$.

□

References of this chapter

- [陈王李 24] 陈猛, 王庆雪, and 李志远. 《抽象代数》. 1st. 上海, 中国: 复旦大学出版社, 2024, p. 175.
- [戚陶 26] 戚扬 and 陶瑞宝. 《固体物理中的对称性和拓扑》. Lecture notes. Version dated 2026-03-02. 2026.

2

对群的操作

Contents

2.1	群的同态与同构.....	37
2.2	内外直积.....	43
2.3	群作用.....	46
2.4	半直积.....	56
2.5	群扩张.....	61
2.5.1	核是 Abel 群时的扩张.....	63
* 2.5.2	核不是 Abel 群时的扩张.....	67

2.1 群的同态与同构

我们有时会说,「世界上只有一种平凡群」,平凡群指的就是只有单位元的群.然而这个说法存在一点歧义,因为这些平凡群的单位元本身,作为元素可能不是同一个对象.换句话说,我们可以取两个平凡群 $\{1\}$ 和 $\{e\}$,但是 $\{1\} \neq \{e\}$.那么我们说「只有一种」时,我们说的应该是类别「种」而不是个数「个」.这就涉及到群同构的概念,通俗地说,如果两个群不考虑元素本身而只在乎元素之间的乘法关系,那么两个群同构当且仅当乘法关系在两个群中的实现一模一样且其为双射.双射这个条件在很多情形下冗余,我们有时只要求乘法关系一样,这就叫做群同态,这个要求则极容易满足,因为任何群都和平凡群的乘法关系一模一样,这当然是平凡的.

Definition 2.1 [群同态 (group homomorphism), 群同构 (group isomorphism)]. 设 G_1, G_2 是群, $f: G_1 \rightarrow G_2$ 为映射. 若对任意的 $a, b \in G_1$, $f(ab) = f(a)f(b)$, 则称 f 为群同态. 如果 f 是群同态且是双射, 则称 f 是群同构, 记作 $G_1 \cong G_2$.

Remark. 利用群同构的概念, 当我们只关心「群」的结构 (群元之间的乘法关系), 而不特别在乎元素本身的意义时, 我们也说同构的群是「相等的」, 直接把 $\cong$ 记作 $=$, 例如 $\{e\} = \{1\}$, $V_4 = D_2$.

Example. 我们观察几个常见的群同态例子.

1. 若 $H \trianglelefteq G$, 则

$$j: G \rightarrow G/H \quad (g \mapsto gH)$$

Chapter 2. 对群的操作

是满同态.

2. 指数映射

$$\exp: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^*, \quad \exp(m) = e^m, \quad \forall m \in \mathbb{Z},$$

这是一个单同态.

3. 记

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\} (< \text{GL}_2(\mathbb{R})),$$

定义映射

$$c: \mathbb{C}^* \rightarrow H, \quad c(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in H.$$

可以验证 c 是群同态, 而且是双射. 因此, c 是群同构.

有些资料额外要求群同态保持「单位元」和「逆元」, 但事实上这些都是「保持乘法」的自然推论. 若 $f: G_1 \rightarrow G_2$ 为群同态, 则

$$f(e_1) = f(e_1 \cdot e_1) = f(e_1) \cdot f(e_1),$$

故 $f(e_1) = e_2$. 又因

$$f(a) \cdot f(a^{-1}) = f(a \cdot a^{-1}) = f(e_1) = e_2,$$

故 $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

Proposition 2.1. 设 $f: G_1 \rightarrow G_2$ 为群同态, 则 f 为群同构当且仅当存在群同态 $g: G_2 \rightarrow G_1$ 使得 $g \circ f = \text{id}_{G_1}$, $f \circ g = \text{id}_{G_2}$.

Proof. 由 f 是群同构, 推导出这样的 g : 取 $g = f^{-1}$, $g \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x = \text{id}_{G_1}x$, $\forall x \in G_1$. $f \circ g(y) = f(f^{-1}(y)) = y = \text{id}_{G_2}y$, $\forall y \in G_2$. $g(y_1 y_2) = f^{-1}(y_1 y_2) = f^{-1}(y_1) f^{-1}(y_2) = g(y_1) g(y_2)$, 从而 $g = f^{-1}$ 就是符合条件的群同态. 由这样的 g , 推导出 f 是群同构:

证明 f 是满的: 反证法, 设 f 不是满的, 则存在 $y \in G_2$, $y \notin \{f(x) \mid x \in G_1\}$, 与 g 的定义矛盾, 从而 f 是满的.

证明 f 是单的: 反证法, 设 f 不是单的, 则存在 $x_1, x_2 \in G_1$, $x_1 \neq x_2$, 但是 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, 即 $x_1 = x_2$, 矛盾. 从而 f 是单的. $\square$

2.1. 群的同态与同构

Definition 2.2 [自同构 (automorphism), 内自同构 (inner automorphism), 自同态幺半群 (endomorphism monoid), Hom-集 (Hom-set), 外自同构群 (outer automorphism)]. 设 G 是群, 定义

$$\text{Aut}(G) := \{f : G \rightarrow G \mid f \text{ 是群同构}\},$$

$f \in \text{Aut}(G)$ 称为 G 的自同构, $\text{Aut}(G)$ 按照映射的复合运算构成群, 恒等元为恒等映射, 逆映射为逆元, 则 $\text{Aut}(G)$ 称为 G 的自同构群. 对任意 $g \in G$, 作映射 $c_g : G \rightarrow G$ 使

$$c_g(x) = gxg^{-1}, \quad \forall x \in G.$$

则对任意 $x, y \in G$,

$$c_g(xy) = gxyg^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) = c_g(x)c_g(y),$$

故 c_g 为群同态. 因为 $c_{g^{-1}}$ 为 c_g 的逆映射, c_g 为同构, 故 $c_g \in \text{Aut}(G)$. 通常称 c_g 为内自同构, 记

$$\text{Inn}(G) = \{c_g \mid g \in G\}$$

为内自同构的全体, $\text{Inn}(G) \subseteq \text{Aut}(G)$. 另外也有记 $\text{End}(G)$ 为所有 G 到自身的同态形成的幺半群, 称为自同态幺半群. 一般的, 符号 $\text{Hom}(G, H)$ 表示从 G 到 H 的 Hom-集, 意思是全体从 G 到 H 的同态全体. 定义外自同构群 $\text{Out}(G) := \text{Aut}(G) / \text{Inn}(G)$.

Example. 例如, 设 $N \trianglelefteq G$, 那么 $\forall g$, 都有共轭作用 $c_g N = gNg^{-1} = N$, 即可以把 G 视作 $\text{Aut}(N)$. 但是 N 可以作为比 G 更大的群的正规子群, 所以更严谨的符号是 $\text{Aut}_G(N)$.

我们有关系

$$\text{Inn}(G) \subseteq \text{Aut}(G) \subseteq \text{End}(G).$$

若 $g \in Z(G)$, 则 $c_g = \text{id}_G$. 依定义有 $\text{End}(G) = \text{Hom}(G, G)$. 下面的引理补充证明了 $\text{Inn}(G) \leq \text{Aut}(G)$, 从而外自同构群可以如上定义.

Proposition 2.2. $G/Z(G) \cong \text{Inn}(G) \trianglelefteq \text{Aut}(G)$.

Proof. 对任意 $c_1, c_2 \in \text{Inn}(G)$, 设 $c_1 = c_{g_1}$, $c_2 = c_{g_2}$. 对任意 $x \in G$,

$$c_1 c_2^{-1}(x) = c_{g_1}(g_2 x g_2^{-1}) = g_1^{-1} g_2 x g_2^{-1} g_1 = c_{g_2^{-1} g_1}(x),$$

故 $c_1 c_2^{-1} = c_{g_2^{-1} g_1} \in \text{Inn}(G)$. 故 $\text{Inn}(G)$ 构成群, 即 $\text{Inn}(G) \leq \text{Aut}(G)$.

Chapter 2. 对群的操作

对任意 $c = c_g \in \text{Inn}(G)$ 及 $\sigma \in \text{Aut}(G)$, 有

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}c\sigma(x) &= \sigma^{-1}c_g(\sigma(x)) = \sigma^{-1}(g^{-1}\sigma(x)g) \\ &= \sigma^{-1}(g^{-1}) \cdot \sigma^{-1}(\sigma(x)) \cdot \sigma^{-1}(g) = \sigma^{-1}(g)^{-1}x\sigma^{-1}(g) = c_{\sigma^{-1}(g)}(x),\end{aligned}$$

即 $\sigma^{-1}c\sigma = c_{\sigma^{-1}(g)} \in \text{Inn}(G)$, 所以 $\text{Inn}(G) \trianglelefteq \text{Aut}(G)$.

对 $G/Z(G) \cong \text{Inn } G$ 的证明要留到引入群同态基本定理后. □

设 $f: G_1 \rightarrow G_2$ 为群同态, 定义 f 的核与像为

$$\ker f = \{x \in G_1 \mid f(x) = e_2\}, \quad \text{im } f = \{f(x) \mid x \in G_1\}.$$

由定义容易验证 $\ker f \trianglelefteq G_1$, $\text{im } f \leq G_2$, 但是一般 $\text{im } f$ 不必正规.

Theorem 2.1 [群同态基本定理]. 设 $f: G_1 \rightarrow G_2$ 为群同态, 它自然诱导了一个群同构

$$\text{Im } f \cong G_1/\ker f.$$

Proof. 记 $N = \ker f$. 我们断言映射

$$c: G_1/N \rightarrow \text{Im } f, \quad gN \mapsto f(g)$$

是一个群同构. 首先, 我们需验证 c 为一个有意义的映射. 换言之, 若 $gN = g'N$, 须保证

$$c(gN) = f(g) = f(g') = c(g'N).$$

注意到 $gN = g'N$ 等价于 $g^{-1}g' \in N = \ker f$, 故有

$$f(g)^{-1}f(g') = f(g^{-1}g') = e \in G_2.$$

因此 $f(g') = f(g)$. 其次, 由陪集的乘法可知

$$c(gNg'N) = c(gg'N) = f(gg') = f(g)f(g') = c(gN)c(g'N),$$

这表明 c 是一个群同态. 同态 c 的核为

$$\ker c = \{gN \mid f(g) = e\} = \{gN \mid g \in \ker f = N\} = \{N\}.$$

故 c 是单射. 又根据定义, c 也是满的. 因此, c 为群同构. □

我们可以补充证明 $G/Z(G) \cong \text{Inn}(G)$ 了:

Proof. 考虑 $c_g: G \rightarrow \text{Inn}(G)$, $f(g)(\cdot) = g(\cdot)g^{-1}$, 容易验证其为群同态, 且 $\ker f = Z(G)$, 根据同态基本定理 $\text{Inn } G \cong G/Z(G)$. □

2.1. 群的同态与同构

Example 8 [循环群的结构]. 设 $G = \langle g \rangle$, 总可作群同态 $f: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow G$ 使得对任意 $m \in \mathbb{Z}$, $f(m) = g^m$. f 是满同态, 根据群同态基本定理 $G \cong \mathbb{Z}/\ker f$. 作为 $\mathbb{Z}$ 的子群, 存在 $n \geq 0$, 使得 $\ker f = n\mathbb{Z}$. 如果 $n = 0$, 则 $G \cong \mathbb{Z}$. 如果 $n \neq 0$, 则

$$G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n.$$

Theorem 2.2 [子群对应定理]. 设 G 是群, $H \trianglelefteq G$, $j: G \rightarrow G/H$ 为自然同态. 令

$$\Gamma_1 := \{H_1 \leq G \mid H \subseteq H_1\},$$

$$\Gamma_2 := \{\tilde{H}_2 \mid \tilde{H}_2 \leq G/H\},$$

则 j 可以诱导 Γ_1 和 Γ_2 之间的一一对应.

Proof. 只需构造两个映射 $\varphi_1: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ 和 $\varphi_2: \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_1$ 使得 $\varphi_2 \circ \varphi_1 = \text{id}_{\Gamma_1}$, $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \text{id}_{\Gamma_2}$. 对任意 $H_1 \in \Gamma_1$, 定义

$$\varphi_1(H_1) = \{h_1H \mid h_1 \in H_1\} \subset G/H.$$

对 $h_1, h'_1 \in H_1$,

$$h_1H(h'_1H)^{-1} = h_1H \cdot h'^{-1}_1H = (h_1h'^{-1}_1)H = h''_1H \in \varphi_1(H_1),$$

其中 $h''_1 = h_1h'^{-1}_1 \in H_1$. 故 $\varphi_1(H_1) \in \Gamma_2$. 对任意 $\tilde{H}_2 \in \Gamma_2$, 定义

$$\varphi_2(\tilde{H}_2) := j^{-1}(\tilde{H}_2) = \{x \in G \mid j(x) \in \tilde{H}_2\}.$$

对 $x, x' \in \varphi_2(\tilde{H}_2)$, $j(x), j(x') \in \tilde{H}_2$, 则 $j(xx'^{-1}) = j(x)j(x')^{-1} \in \tilde{H}_2$, 故 $xx'^{-1} \in \varphi_2(\tilde{H}_2)$, 故 $\varphi_2(\tilde{H}_2) \leq G$, 且 $H \subset \varphi_2(\tilde{H}_2)$, 所以 $\varphi_2(\tilde{H}_2) \in \Gamma_1$. 对任意 $H_1 \in \Gamma_1$,

$$\varphi_2 \circ \varphi_1(H_1) = j^{-1}(\{h_1H \mid h_1 \in H_1\}) \supseteq H_1.$$

对 $x \in j^{-1}(\{h_1H \mid h_1 \in H_1\})$, 存在 $h_1 \in H_1$, $xH = j(x) = h_1H \subset H_1$, 故 $x \in H_1$. 所以 $\varphi_2 \circ \varphi_1(H_1) = H_1$. 对 $y \in \tilde{H}_2$, 存在 $x \in G$ 使得 $y = xH = j(x)$, 故 $x \in j^{-1}(\tilde{H}_2)$, $y = xH \in \varphi_1 \circ \varphi_2(\tilde{H}_2)$, 故 $\varphi_1 \circ \varphi_2(\tilde{H}_2) = \tilde{H}_2$, $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \text{id}_{\Gamma_2}$. $\square$

Corollary 2.1 [群同构定理]. 我们有:

- **第一定理:** 设 G 是群, $H \trianglelefteq G$, $N \trianglelefteq G$ 且 $H \subseteq N$, 则 $H \trianglelefteq N$,

$$N/H \trianglelefteq G/H, \quad (G/H)/(N/H) \cong G/N.$$

Chapter 2. 对群的操作

反过来, 若 $N/H \trianglelefteq G/H$, 则 $N \trianglelefteq G$.

• **第二定理:** 设 G 是群, $H \trianglelefteq G$, $K \leq G$, 则 $HK \leq G$, $H \trianglelefteq HK$, $H \cap K \trianglelefteq K$ 且

$$HK/H \cong K/(H \cap K).$$

Remark. 第一定理说明正规性是一种不依赖底集的属性, 且商群操作有类似分数约分的性质. 一般 $H, K \leq G$ 不能推出 $HK \leq G$, 但是其中一者正规后可以, 注意正规子群有性质 $HK = KH$ 不依赖于作为子群时的乘法顺序, 或者采用 **Prop. 1.6**. 第二定理也直接给出 **Prop. 1.11**.

Proof. 显然 $H \trianglelefteq N$. 对任意 $\bar{a} \in G/H$, $\bar{n} \in N/H$, 则 $\bar{a} = gH$, $\bar{n} = lH$, $g \in G$, $l \in N$. 则

$$\bar{a}^{-1}\bar{n}\bar{a} = (gH)^{-1}(lH)(gH) = (g^{-1}lg)H \in N/H,$$

所以 $N/H \trianglelefteq G/H$.

自然同态 $j_1: G \rightarrow G/H$, $j_2: G/H \rightarrow (G/H)/(N/H)$ 均为满同态, 故 $\varphi = j_2 \circ j_1$, 也是满同态, 故而 $(G/H)/(N/H) \cong G/\ker \varphi$. 可以断言 $\ker \varphi = N$. 事实上, 对任意 $x \in \ker \varphi$, $\varphi(x) = j_2(xH) = xH \cdot N/H = N/H$. 故 $xH \in N/H$, 存在 $n \in N$, $xH = nH \subset N$, 故 $x \in N$. 反之, 若 $y \in N$, $yH \in N/H$, $\varphi(y) = j_2(yH) = yH \cdot N/H = N/H$, 故 $y \in \ker \varphi$. 因此 $(G/H)/(N/H) \cong G/N$. 我们再证明逆命题, 考虑 $j^{-1}: G/H \rightarrow G$ 亦是同态, 保持正规性, 于是 $N/H \mapsto N$ 自然正规. 第一定理证毕.

由于 $H \trianglelefteq G$, 对任意 $k \in K$, $Hk = kH$, 故 $HK = KH$, 由命题 **Prop. 1.6**, $HK \leq G$. 显然 $H \trianglelefteq HK$, $H \cap K \trianglelefteq K$. 考虑群同态 $\varphi: K \hookrightarrow HK \twoheadrightarrow HK/H$. 我们有 $\varphi(k) = kH \in HK/H$, $\forall k \in K$. 由 $HK = KH$ 可知, φ 是一个满同态, 由同态基本定理 **Thm. 2.1** 可得 $HK/H \cong K/\ker \varphi$. 而

$$\ker \varphi = \{k \in K \mid kH = H\} = H \cap K,$$

故 $HK/H \cong K/(H \cap K)$. 第二定理证毕. $\square$

称正规子群 $N \trianglelefteq G$ 是**极大正规子群**, 如果不存在 H 使得 $N \trianglelefteq H \trianglelefteq G$. 注意定义可被削弱到 $N \subsetneq H \trianglelefteq G$, 根据群同构第一定理. 我们有如下重要判据:

Corollary 2.2. 正规子群 $N \trianglelefteq G$ 极大, 当且仅当其给出的商群是单的.

Proof. 设 N 极大正规, 任取 $M \trianglelefteq G/N$, 根据子群对应定理 **Thm. 2.2**, 必有形式 $M = H/N$, 其中 $N \trianglelefteq H \trianglelefteq G$, 这里 $H \trianglelefteq G$ 是因为群同构第一定理 **Cor. 2.1**. 因为 N 极大, 从而要么 $H = N$, 则 $M = 1N$, 要么 $H = G$, $M = G/H$, 从而无论哪种情况都说明 G/N 是单的.

设 G/N 是单的, 任取正规子群 H 满足 $N \trianglelefteq H \trianglelefteq G$, 根据群同构第一定理必有 $H/N \trianglelefteq G/N$, 于是要么 $H/N = 1N$ 则 $H = N$, 要么 $H/N = G/N$ 则 $N = G$, 从而无论哪种情况都说明 N 极大. $\square$

2.2 内外直积

集合有直积, 群作为集合自然有直积, 那么群「直积」后的产物是否具备群结构? 如何才能具备群结构? 作为同一个母群的两个子群, 两者的「群乘积」一般不具备群结构, 这个产物距离群还有多远, 这种「乘」与「直积」相距多远? 本节就来探索群的直积问题.

Definition 2.3 [外直积 (external direct product)]. 设 $G_1, \dots, G_n$ 为群, 其 Descartes 积为

$$G := G_1 \times \cdots \times G_n = \{(g_1, \dots, g_n) \mid g_i \in G_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

在 G 上有一个自然的乘法运算: 对任意 $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in G$, 定义

$$(a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n) := (a_1b_1, \dots, a_nb_n).$$

此运算满足结合律, 且存在恒等元 $e_G = (e_1, \dots, e_n)$, 其中 e_i 是 G_i 的恒等元. 对于任意元素 $(a_1, \dots, a_n) \in G$, 其逆元为 $(a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1})$. 因此, G 构成一个群, 称为 $G_1, \dots, G_n$ 的**外直积**.

Example. Klein 四元群 $V_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

对 $i = 1, 2, \dots, n$, 定义映射 $j_i : G_i \rightarrow G$ 使对任意 $a \in G_i$,

$$j_i(a) := (e_1, \dots, e_{i-1}, a, e_{i+1}, \dots, e_n),$$

即 $j_i(a)$ 的第 i 个位置上的元素为 a , 其余位置为各群的恒等元, 则 j_i 为单同态. 定义第 i 个投影映射 $p_i : G \rightarrow G_i$ 使

$$p_i(a_1, \dots, a_n) := a_i,$$

则 p_i 是满同态. 记 $H_i = j_i(G_i) \leq G$.

通过观察, 可以知道上述外直积结构有如下性质:

1. 对 $1 \leq i \leq n$, 有 $p_i \circ j_i = \text{id}_{G_i}$.
2. 对 $i_1 \neq i_2$, H_{i_1} 与 H_{i_2} 中元素可交换相乘. 事实上, 对 $x \in G_{i_1}, y \in G_{i_2}$,

$$j_{i_1}(x)j_{i_2}(y) = j_{i_2}(y)j_{i_1}(x) = (e_1, \dots, x, \dots, y, \dots, e_n),$$

其中第 i_1 个位置上的元素为 x , 第 i_2 个位置上的元素为 y , 其余位置为各相应群的恒等元.

3. 对 $1 \leq i \leq n$, $H_i \trianglelefteq G$. 事实上, 对任意 $g = (a_1, \dots, a_n) \in G$ 及任意 $x_i \in H_i$,

$$g^{-1}j_i(x_i)g = (a_1^{-1}e_1a_1, \dots, a_i^{-1}x_ia_i, \dots, a_n^{-1}e_na_n) = (e_1, \dots, a_i^{-1}x_ia_i, \dots, e_n) \in H_i.$$

Chapter 2. 对群的操作

4. $G = H_1 H_2 \cdots H_n$. 对任意 $g = (a_1, \cdots, a_n) \in G$,

$$g = j_1(a_1) \cdots j_n(a_n) \in H_1 \cdots H_n.$$

5. 对 $1 \leq i \leq n$,

$$H_i \cap (H_1 \cdots H_{i-1} \cdots H_n) = \{e_G\},$$

6. 群 G 中元素表示为 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 之积的表示法唯一, 即如果

$$g = h_1 \cdots h_n = h'_1 \cdots h'_n,$$

其中对每个 i , $h_i, h'_i \in H_i$, 那么 $h_i = h'_i$. 事实上, 如果 h_i, h'_i 满足如上条件, 那么由第 2 条,

$$h_1^{-1} h_1 = h'_2 \cdots h'_n h_n^{-1} \cdots h_2^{-1} = h''_2 \cdots h''_n \in H_1 \cap (H_2 \cdots H_n) = \{e_G\},$$

其中 $h''_i = h'_i h_i^{-1}$, $2 \leq i \leq n$. 故 $h_1 = h'_1$. 同样地, 对任意 $i = 2, \cdots, n$, 可证 $h_i = h'_i$.

Definition 2.4 [内直积 (internal direct product)]. 设 G 是群, 设对 $1 \leq i \leq n$, $H_i \trianglelefteq G$ 且

$$H_i \cap (H_1 \cdots H_{i-1} \cdots H_n) = \{e_G\}.$$

若 $G = H_1 H_2 \cdots H_n$, 则称 G 为子群 $H_1, \cdots, H_n$ 的内直积.

上述讨论已经表明, 若 G 是外直积结构, 则 G 必是内直积结构. 反之, 可以知道内直积结构必然同构于一个外直积, 我们有如下定理:

Theorem 2.3. 设 $G, G_1, \cdots, G_n$ 是群, 则

$$G \cong G_1 \times \cdots \times G_n$$

为外直积的充分必要条件是对任意 $i = 1, \cdots, n$, 存在正规子群 $H_i \trianglelefteq G$, 使得 $H_i \cong G_i$, 且 G 是 $H_1, \cdots, H_n$ 的内直积.

Proof. 必要性已证, 只需证充分性. 作映射 $\varphi = \prod_{i=1}^n H_i \rightarrow G$, $\varphi(a_1, \cdots, a_n) := a_1 \cdots a_n \in G$, 其中 $\prod_{i=1}^n H_i$ 为诸 H_i 的外直积. 由于 G 为 H_i 的内直积, 故 φ 是满射. 对任意 $i \neq j$, $a \in H_i$, $b \in H_j$, 由于

2.2. 内外直积

$H_i, H_j \trianglelefteq G$, 故 $aba^{-1}b^{-1} \in H_i \cap H_j \subset H_i \cap (H_1 \cdots \widehat{H_i} \cdots H_n) = \{e\}$, 故 $ab = ba$, 即 H_i 和 H_j 中元素可交换. 对 $(a_1, \cdots, a_n), (b_1, \cdots, b_n) \in \prod_i H_i$,

$$\begin{aligned}\varphi((a_1, \cdots, a_n) \cdot (b_1, \cdots, b_n)) &= \varphi(a_1 b_1, \cdots, a_n b_n) = a_1 b_1 \cdot a_2 b_2 \cdots a_n b_n \\ &= a_1 \cdots a_n \cdot b_1 \cdots b_n = \varphi(a_1, \cdots, a_n) \varphi(b_1, \cdots, b_n),\end{aligned}$$

故 φ 是群同态. 若 $\varphi(a_1, \cdots, a_n) = \varphi(b_1, \cdots, b_n)$, 即 $a_1 \cdots a_n = b_1 \cdots b_n$, 则

$$b_1^{-1} a_1 = (b_2 \cdots b_n)(a_2 \cdots a_n)^{-1} \in H_1 \cap (H_2 \cdots H_n) = \{e\},$$

故 $a_1 = b_1$. 可依次证明对任意 $i = 2, \cdots, n$ 总有 $a_i = b_i$, 故 φ 是单同态. 因此, φ 是群同构. $\square$

如果 G 是一个加法群, 我们通常将直积叫做直和, 用记号 $\oplus$ 表示, 例如: $G = \bigoplus_{i=1}^n G_i$.

Proposition 2.3. 设 A, B 是有限群, 则 $A \times B$ 是循环群的充分必要条件是 A, B 都是循环群且

$$\gcd(|A|, |B|) = 1.$$

Proof. 取 $A \times B$ 的生成元 x , 记 a, b 是 x 的 A 与 B 的投射, 则

$$|A \times B| = |A| |B| = o(x) = \text{lcm}(o(a), o(b)),$$

根据 Lagrange 定理的整除关系, 得到

$$|A \times B| = \text{lcm}(o(a), o(b)) \leq \text{lcm}(|A|, |B|) \leq |A| |B|,$$

根据直积的阶关系, 以上不等号全部取到等号, 所以

$$\text{lcm}(|A|, |B|) = |A| |B| \iff \gcd(|A|, |B|) = 1,$$

同时, x 的两个投射 a, b 分别是 A, B 的生成元. $\square$

Theorem 2.4 [Goursat 引理 (Goursat's lemma)]. 设 G_1, G_2 是群, $H \leq G_1 \times G_2$, 令 $H_1 = \pi_1(H) \leq G_1$, $H_2 = \pi_2(H) \leq G_2$, $N_1 = \{a \in H_1 : (a, e) \in H\} \trianglelefteq H_1$, $N_2 = \{b \in H_2 : (e, b) \in H\} \trianglelefteq H_2$, 则存在群同构

$$\varphi: H_1/N_1 \rightarrow H_2/N_2,$$

Chapter 2. 对群的操作

使得

$$H = \{(a, b) \in H_1 \times H_2 \mid \varphi(aN_1) = bN_2\}.$$

反之, 如果给定 $H_1, H_2, N_1, N_2, \varphi$ 使得 $H_1/N_1 \cong H_2/N_2$ 成立, 则 $H_1 \times H_2 \leq G_1 \times G_2$. 如果以上群均有限, 则

$$|H| = \frac{|H_1||H_2|}{|H_1/N_1|} = \frac{|H_1||H_2|}{|H_2/N_2|}.$$

Proof. 对任意 $aN_1 \in H_1/N_1$, 任选 $b \in H_2$ 使得 $(a, b) \in H$, 定义 $\varphi(aN_1) := bN_2$. 先证良定义. 若 $(a, b), (a, b') \in H$, 则 $(e, b^{-1}b') = (a, b)^{-1}(a, b') \in H$, 从而 $b^{-1}b' \in N_2$, 即 $bN_2 = b'N_2$. 若 $aN_1 = a'N_1$, 则 $a^{-1}a' \in N_1$, 故 $(a^{-1}a', e) \in H$. 取 $(a, b), (a', b') \in H$, 则

$$(e, b^{-1}b') = (a, b)^{-1}(a', b')(a^{-1}a', e)^{-1} \in H,$$

因而 $b^{-1}b' \in N_2$, 即 $bN_2 = b'N_2$. 所以 φ 良定义.

再证 φ 是同态. 若 $\varphi(aN_1) = bN_2, \varphi(a'N_1) = b'N_2$, 即 $(a, b), (a', b') \in H$, 则 $(aa', bb') \in H$, 故

$$\varphi(aa'N_1) = bb'N_2 = \varphi(aN_1)\varphi(a'N_1).$$

再证满射. 任取 $bN_2 \in H_2/N_2$, 由 $b \in H_2 = \pi_2(H)$, 存在 $a \in H_1$ 使得 $(a, b) \in H$, 故 $\varphi(aN_1) = bN_2$. 单射可由对称性得到, 或直接证明: 若 $\varphi(aN_1) = N_2$, 则可取 $(a, b) \in H$ 且 $b \in N_2$. 由 $b \in N_2$ 知 $(e, b) \in H$, 从而 $(a, e) = (a, b)(e, b)^{-1} \in H$, 故 $a \in N_1$, 即 $aN_1 = N_1$.

最后证明

$$H = \{(a, b) \in H_1 \times H_2 \mid \varphi(aN_1) = bN_2\}.$$

若 $(a, b) \in H$, 则由定义立刻有 $\varphi(aN_1) = bN_2$. 反之, 若 $\varphi(aN_1) = bN_2$, 则存在 $b' \in H_2$ 使得 $(a, b') \in H$ 且 $b'N_2 = bN_2$. 因而 $b'^{-1}b \in N_2$, 即 $(e, b'^{-1}b) \in H$. 于是 $(a, b) = (a, b')(e, b'^{-1}b) \in H$. $\square$

Coursat 定理说明, 直积群里的任意子群 H , 本质上都是「在两边各取一个子群, 然后规定它们在某个商群里必须彼此对应」得到的.

2.3 群作用

群作用这个概念非常重要, 而且有直接的物理意义. 具体来说, 「群」这个概念本身, 不过是配备了二元运算和一些相关性质的集合, 与「对称性」实际上有概念上的区别. 所谓「对称性」, 指的是系统在某些操作下不变, 而操作构成的集合能称之为「群」. 所以我们尚且欠缺一个联系「操作」和「系统」的数学概念, 这就是本节要介绍的群作用.

2.3. 群作用

Definition 2.5 [群作用 (group action)]. 设 G 为群, X 为非空集合. 设有一个映射 $\sigma : G \times X \rightarrow X$, 若 σ 满足以下两个条件:

- 对任意 $x \in X$, $\sigma(e, x) = x$;
- 对任意 $g, h \in G, x \in X$, 总有 $\sigma(gh, x) = \sigma(g, \sigma(h, x))$;

则称 σ 是 G 在集合 X 上的一个作用. 为便于表示, 通常我们采用简写形式 $gx \equiv g \cdot x \equiv \sigma(g, x)$.

Remark. 注意群作用和群乘法符号记法类似, 在可能混淆时须引入新的记号. 定义 G 对 X 的群作用, 也常记作 $G \curvearrowright X$.

Example 9 [二面体群 D_n 的自然作用]. *Def. 1.15* 实际上把二面体群与其在二维正 n 边形的平面变换作用等同, 事实上这个作用是「忠实的」(定义见下文, *Def. 2.7*), 所以这般等同数学上严格. 这种作用称作二面体群 D_n 在二维 *Euclid* 空间上的自然作用. 考虑如此定义 D_n : 定义为三维 *Euclid* 空间内正 n 棱柱的纯旋转变换构成的群. 依照定义, $D_n \leq \text{SO}(3)$, 这种作用称作二面体群 D_n 在三维 *Euclid* 空间上的自然作用. 依照二维和三维的自然作用的两种定义方式是等价的, 因为二维改变手性的翻转实际上可以看作三维空间中不改变手性的翻转. 二面体群的抽象定义详见 *Ex. 17*, 简而言之 $D_n = \langle a, b \mid a^n = 1, b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$, 其中尖括号左半部分是生成元组成的集合, 右半部分是生成关系.

群 G 在集合 X 上的作用也可等价地表述为 G 在集合 X 上的置换表示, 即一个群同态 $\rho : G \rightarrow S_X$, 其中 S_X 是集合 X 的对称群, 所以任何群 G 都可看作是变换群 S_G 的一个子群. 以下命题揭示了群作用与置换表示在本质上的一致性:

Proposition 2.4. 设 G 是群, X 是集合.

- 若 $\sigma : G \times X \rightarrow X$ 是一个群作用, 则映射

$$\rho_\sigma : G \rightarrow S_X, \quad g \mapsto (x \mapsto g \cdot x)$$

是一个群同态, 且 $G = \ker \rho_\sigma$ 当且仅当 σ 是平凡作用.

- 若 $\rho : G \rightarrow S_X$ 是群同态, 则

$$\tilde{\rho} : G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \mapsto \rho(g)(x)$$

是一个群作用.

Chapter 2. 对群的操作

Proof. 对于第一条, 先验证 $\rho_\sigma(g) : X \rightarrow X, x \mapsto g \cdot x$ 为 X 上的置换, 即 $\rho_\sigma(g)$ 为双射. 对任意 $x, y \in X$, 若 $g \cdot x = g \cdot y$, 则有

$$x = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot (g \cdot y) = y,$$

因此 $\rho_\sigma(g)$ 是单射. 又对任意 $y \in X, y = g \cdot (g^{-1} \cdot y)$, 故 $\rho_\sigma(g)$ 也是满射. 这说明了 $\rho_\sigma(g) \in S_X$ 是一个置换. 其次, 对于任意 $g, h \in G$, 我们有

$$\rho_\sigma(gh)(x) = (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = \rho_\sigma(g) \circ \rho_\sigma(h)(x),$$

由此可知 ρ_σ 是一个群同态. 它的核为

$$\ker \rho_\sigma = \{g \mid g \cdot x = x, \forall x \in X\},$$

因此 $\ker \rho_\sigma = G$ 当且仅当 σ 的作用是平凡作用.

对于第二条, 按照定义容易验证 $\tilde{\rho}$ 满足群作用定义中的两个条件, 即 $\tilde{\rho}$ 是一个作用. □

Definition 2.6 [轨道 (orbit), 稳定子 (stabilizer), 可迁作用 (transitive action), 不动点集 (fixed-point set)]. 设群 G 作用于集合 X . 对任意 $x \in X$, 集合

$$\text{Orb}(x) := \{g \cdot x \mid g \in G\} \subseteq X$$

称为经过 x 的**轨道**, 所有轨道构成的集合记作 X/G . 集合

$$\text{Stab}(x) := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

称为 x 的**稳定子**. 只有一条轨道的作用称为是**可迁的**.

$$\text{Fix}(g) := \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$$

被称为 g 的**不动点集**.

Remark. x 的轨道也常记作 Gx , 意思是把所有的群元依次作用于 x 后收集所得构成的集合.

Example 10. 最重要的一种群作用就是群对自身元素的**共轭作用**, 设 $g, x \in G$, 称 $c_g : x \mapsto gxg^{-1}$ 为 g 对 x 施加的共轭作用, $g \cdot x := c_g(x) = gxg^{-1}$ (当群作用反身时, $g \cdot x$ 可以不是「群乘 gx 」, 具体形式依据定义, 此处共轭作用就是一例, 请小心符号混淆), 共轭作用的轨道 $\text{Orb}(x)$ 记作 x 的共轭等价类 $\text{Cl}(x)$ (也常记为 $[x], \bar{x}$ 等), 共轭等价类全体记作 $\text{Cl}(G)$. 根据共轭作用的定义, 有:

2.3. 群作用

- **Ex. 3** 指出, 中心化子 $C_G(x)$ 是共轭作用的稳定化子 $\text{Stab}(x)$, 中心 $Z(G)$ 是所有共轭作用的不动点 $\text{Fix}(c_g)$, $\forall g$;
- **Prop. 1.15** 指出, 两个置换共轭当且仅当结构相同;
- **Def. 2.2** 指出, 内自同构 $\text{Inn}(G)$ 是通过共轭作用定义的;

Proposition 2.5. 设群 G 作用于集合 X . 对于任意 $x \in X$, 有

- $\text{Stab}(x) \leq G$ 是一个子群;
- 轨道 $\text{Orb}(x)$ 与稳定子群 $\text{Stab}(x)$ 的所有陪集全体 $G/\text{Stab}(x)$ 有一一对应的关系. 特别地, 若 $\text{Orb}(x)$ 为有限集, 则

$$|\text{Orb}(x)| = [G : \text{Stab}(x)].$$

Remark. 第二点也称作**轨道-稳定子定理 (orbit-stabilizer theorem)**.

Proof. 根据定义容易验证 $\text{Stab}(x)$ 关于乘法和逆运算封闭, 因此 $\text{Stab}(x) < G$.

下面我们定义映射

$$c : G/\text{Stab}(x) \rightarrow \text{Orb}(x), \quad g\text{Stab}(x) \mapsto g \cdot x.$$

简记 $H = \text{Stab}(x)$. 若 $gH = g'H$, 则 $g'^{-1}g \in H$. 根据稳定子的定义, 我们有 $g'^{-1}g \cdot x = x$, 即 $g \cdot x = g' \cdot x$, 所以 $c(gH) = c(g'H)$. 这说明 c 是一个映射.

如果 $c(gH) = c(g'H)$, 那么 $g \cdot x = g' \cdot x$. 由此可知 $g'^{-1}g(x) = x$, $g'^{-1}g \in H$, 即 $gH = g'H$, 故 c 为单射. 对任意 $z \in \text{Orb}(x)$, 存在 $g \in G$, $z = gx$, 则 $z = c(gH)$, 故 c 是满射. $\square$

Theorem 2.5 [群作用的轨道计数公式]. 群 G 在集合 X 上的作用的所有轨道给出集合 X 的一个划分 $X = \bigsqcup_{\text{Orb}_i \in X/G} \text{Orb}_i$. 若 X 为有限集, 设 $\text{Orb}(x_i)$ ($1 \leq i \leq n$) 为该群作用下的全部不同轨道, x_i 为每个轨道内的代表元, 则有

$$|X| = \sum_{i=1}^n |\text{Orb}(x_i)| = \sum_{i=1}^n [G : \text{Stab}(x_i)].$$

Proof. 我们只需证明不同轨道间互不相交即可, 即 $\text{Orb}(x) \cap \text{Orb}(y) \neq \emptyset$ 当且仅当 $\text{Orb}(x) = \text{Orb}(y)$. 假设 $\text{Orb}(x) \cap \text{Orb}(y) \neq \emptyset$, 根据轨道的定义, 存在元素 $g_1, g_2 \in G$ 使得 $g_1 \cdot x = g_2 \cdot y$.

Chapter 2. 对群的操作

则有

$$x = (g_1^{-1} g_2) \cdot y \in \text{Orb}(y),$$

表明 x 在 y 的轨道里. 同理可知 y 也在 x 的轨道里, 由此易得 $\text{Orb}(x) = \text{Orb}(y)$. □

Example 11 [共轭类方程]. 考虑 G 在自身上的共轭作用

$$g \cdot x = gxg^{-1}, \quad \forall g, x \in G.$$

对任意 $x \in G$, 其稳定子群为

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = gxg^{-1} = x\},$$

并且我们有 $G = \text{Stab}(x)$ 当且仅当 $x \in Z(G)$. 若 G 为有限群, 我们可以通过共轭作用的轨道计算公式给出下面的**共轭类方程**

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^m [G : \text{Stab}(x_i)],$$

这里 $x_i \notin Z(G)$ 在不同的共轭类中. 特别地, 设 G 是有限群, 对 $x \in G$, 记 $\text{Cl}(x) = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$ 是 x 所在的共轭类, 则 $\text{Cl}(x)$ 是上述共轭作用的一条轨道. 因此, 我们有

$$|\text{Cl}(x)| = [G : \text{Stab}(a)] = [G : C_G(x)].$$

Theorem 2.6 [Burnside 引理 (Burnside's lemma), Cauchy-Frobenius 引理 (Cauchy-Frobenius lemma)]. 设 G 是有限群, 作用在有限集合 X 上, 则不交轨道数为

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

Proof. 记 $S = \{(g, x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\}$. 对 S 作双重计数. 对每个固定的 $g \in G$, 满足 $(g, x) \in S$ 的 x 的个数正是 $|\text{Fix}(g)|$, 故 $|S| = \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$. 对每个固定的 $x \in X$, 满足 $(g, x) \in S$ 的 g 的个数正是 $|\text{Stab}(x)|$, 故 $|S| = \sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)|$. 设 $\text{Orb}(x_1), \dots, \text{Orb}(x_n)$ 是全部不同轨道, 则 $n = |X/G|$, 且

2.3. 群作用

X 是这些轨道的不交并. 因而

$$\sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)| = \sum_{i=1}^n \sum_{x \in \text{Orb}(x_i)} |\text{Stab}(x)|.$$

若 $x \in \text{Orb}(x_i)$, 则 $\text{Stab}(x)$ 与 $\text{Stab}(x_i)$ 共轭, 从而二者阶相同. 所以

$$\sum_{x \in \text{Orb}(x_i)} |\text{Stab}(x)| = |\text{Orb}(x_i)| |\text{Stab}(x_i)|.$$

再由轨道-稳定子定理 *Prop. 2.5*,

$$|\text{Orb}(x_i)| = [G : \text{Stab}(x_i)] = \frac{|G|}{|\text{Stab}(x_i)|},$$

故每条轨道的贡献都等于 $|G|$. 因此 $\sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)| = |G| \cdot |X/G|$. 综上, $\sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = |G| \cdot |X/G|$,

两边同除以 $|G|$ 即得 $|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$. □

Example 12. 正 8 面体每个面上给定 8 种不同颜色, 每个面有且仅有 1 种颜色, 在旋转同构的意义下, 求不等价的染色方案数.

Solution. 根据 *Burnside* 引理

$$N = \frac{1}{|O|} \sum_{g \in O} |\text{Fix}(g)| = \frac{1}{24} (8! + 0 + \cdots + 0) = 1680.$$

O 是八面体的第一类点群. 点群理论将在 *Chap. 18 and ??* 介绍. □

若有限群 G 的阶满足 $|G| = p^n$, 则称 G 为 p -群 (p -group). p -群是联系群的阶数和自身结构的重要概念, 在这个课题上最重要的成果当属 Sylow 定理 *Sec. 3.1*. 我们有下面的命题:

Proposition 2.6 [p -群作用同余引理]. 若 Q 是 p -群, 作用于有限集 X 上, 则

$$|X| \equiv |\text{Fix}(Q)| \pmod{p}.$$

Chapter 2. 对群的操作

Proof. 仿照类方程可以导出 $X = \bigsqcup_{x \in \Sigma} \text{Orb}(x)$, Σ 是轨道代表元的集合.

$$|X| = \sum_{x \in \Sigma} |\text{Orb}(x)| = |\text{Fix}(Q)| + \sum_{x \in \Sigma'} |\text{Orb}(x)|,$$

其中, Σ' 是除去单点轨道的轨道代表元的集合/非不动点的轨道代表元的集合. 对 $x \in \Sigma'$, 根据轨道-稳定化子定理 $|\text{Orb}(x)| = [Q : \text{Stab}(x)]$, 因为 Q 是 p -群, 从而 $\text{Stab}(x) < Q$ 也是 p -群, 且 $|\text{Stab}(x)| < |Q|$ 否则 $x \in \text{Fix}(Q)$, 从而等式两侧模去 p 得证. $\square$

Theorem 2.7 [交替群的共轭类分裂定理]. 在 S_n 里的一个共轭类, 限制到 A_n 后, 要么仍然是一个类, 要么分裂成两个等大类. 分裂当且仅当该循环分解的所有长度互不相同且均为奇数. 若发生分裂, 则分裂的两类在求逆运算下封闭的当且仅当循环长度模 4 余 3 的循环的个数是偶的, 否则两类互成逆类.

Proof. 由轨道-稳定子定理

$$|S_n| = |\text{Cl}_{S_n}(\sigma)| |C_{S_n}(\sigma)| = 2 |A_n| = 2 |\text{Cl}_{A_n}(\sigma)| |C_{A_n}(\sigma)| = 2 |\text{Cl}_{A_n}(\sigma)| |C_{S_n}(\sigma) \cap A_n|,$$

其中 $\sigma \in A_n$. 根据此等式可知

$$|\text{Cl}_{S_n}(\sigma)| = 2 |\text{Cl}_{A_n}(\sigma)| \iff C_{S_n}(\sigma) \subseteq A_n.$$

为保证 $\sigma \in A_n$, 循环分解必然要求各部分阶都是奇数, 这里就说明了必要性的一部分.

考虑轮换分解 $\sigma = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_s$, 对于任意的 $\sigma = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_s$, 都有 $\tau \sigma \tau^{-1} = \sigma$.

当各个 π_k 的阶都是奇数且两两不等时, 记 M_k 为 π_k 所变动的点的集合, 对任意的 $x \in M_k$, 有 $(\tau \sigma \tau^{-1})(x) = \sigma(x)$. 假若 $\tau(x) \notin M_k$, 则 $x = \sigma(x)$ 与 x 的取法相矛盾, 所以 $\tau(x) \in M_k$. 从而 $\sigma(\tau(x)) = \tau(\sigma(x))$. 根据 x 与 π_k 的任取性, τ 应当具有形式 $\tau = \pi_1^{i_1} \pi_2^{i_2} \cdots \pi_s^{i_s}$, 因为各个 π_k 的阶都是奇数, 从而 $\tau \in A_n$, 即 $C_{S_n}(\sigma) \subseteq A_n$. 这就证明了充分性.

下面说明必要性的剩下部分. 若 π_k 的阶有偶数, 不妨是 π_1 , 则 $\pi_1 \in C_{S_n}(\sigma)$, 所以 $C_{S_n}(\sigma) \not\subseteq A_n$. 当 π_k 的阶没有偶数, 但有相等, 不妨

$$\pi_1 = (i_1 i_2 \cdots i_r), \quad \pi_2 = (j_1 j_2 \cdots j_r),$$

取 $\tau = (i_1 j_1)(i_2 j_2) \cdots (i_r j_r) \in C_{S_n}(\sigma)$, 所以 $C_{S_n}(\sigma) \not\subseteq A_n$.

最后要说明, $\text{Cl}_{S_n}(\sigma) - \text{Cl}_{A_n}(\sigma)$ 的部分不会继续分裂, 才能保证“分裂为大小相等的两类”. 任取一对换 τ , 因为

$$|\text{Cl}_{S_n}(\sigma)| = |\text{Cl}_{S_n}(\tau \sigma \tau^{-1})| = 2 |\text{Cl}_{A_n}(\tau \sigma \tau^{-1})| = 2 |\text{Cl}_{A_n}(\sigma)|,$$

2.3. 群作用

所以 $|\text{Cl}_{A_n}(\tau\sigma\tau^{-1})| = |\text{Cl}_{A_n}(\sigma)|$ 且 $\text{Cl}_{A_n}(\tau\sigma\tau^{-1}) \cap \text{Cl}_{A_n}(\sigma) = \emptyset$.

定理的后半部分, 分裂发生时, 考虑把奇长 l -循环 $\gamma = (a_1 a_2 \cdots a_l)$ 反向, 则反向的置换

$$\omega_l = \prod_{k=1}^{(l-1)/2} (a_k a_{l+1-k})$$

是由 $(l-1)/2$ 个两两不交的换位组成的, 而

$$(-1)^{\sum_i (l_i-1)/2} = (-1)^{|\{l_i \equiv 3 \pmod{4}\}|}.$$

□

Definition 2.7 [忠实群作用 (faithful group action), 自由群作用 (free group action), 传递群作用 (transitive group action), 主齐性空间 (principal homogeneous space), 挠子 (torsor)]. 考虑群 G 在集合 X 上的作用. 若 $g \cdot x = x \ (\forall x \in X) \implies g = e$, 称作用是**忠实的**; 若 $g \cdot x = x \implies g = e$, 则称作用是**自由的**; 若任意的 $x, y \in X$, 均存在 $g \in G$ 使得 $g \cdot x = y$, 则称作用是**传递的**. 若 G 对 X 的群作用自由且传递, 则称 X 是 G 的**主齐性空间**或**挠子**.

所谓忠实, 意思是所有「非恒等元都变动了某些元素」, 也就是说到 S_X 的同态是忠实的. 所谓自由, 意思是「所有非恒等元都会变动所有的元素」, 相较于忠实, 它的定义更加严格, 自由可以推出忠实. 所谓传递, 就是「只有一条轨道」.

Example 13. 将 U_n 自然作用在 S^{2n-1} 上 ($n \geq 2$).

- 证明此作用可迁;
- 固定 S^{2n-1} 的一个点, 证明此点的稳定子群同构于 U_{n-1} .

Proof. (a) 我们只要证明 $(1, 0, \dots, 0)$ (n 列元素) 能前往任何 $v \in S^{2n-1}$ 即可. 我们选取所有的单位矢量, 就得到了一组正交归一基矢, 这其中当然包括了 $(1, 0, \dots, 0)$, 然后, 令构造包含 v 的一组正交归一基底, *Gram-Schmidt* 法保证这是可行的. 这样, $(v, w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$ 就是一个可以把 $(1, 0, \dots, 0)$ 送到 v 的酉矩阵了.

(b) 不失一般性地, 考虑固定 $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, 则

$$\text{Stab}(e_1) = \{U \in U_n : Ue_1 = e_1\}.$$

Chapter 2. 对群的操作

从而 U 的表示矩阵必定有形式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

容易构造右下角的子矩阵到 U_{n-1} 的同构. □

Example 14. 称 $\mathbb{R}^3$ 中的正 n 面体的自同构全体关于复合映射构成的群为正 n 面体对称群, 记作 E_n , 其中 $n = 4, 6, 8, 12, 20$; 将 E_n 视作正交群 $O_3(\mathbb{R})$ 的子群. 称 $E_n \cap SO_3(\mathbb{R})$ 为正 n 面体旋转群, 记作 F_n , 其中 $n = 4, 6, 8, 12, 20$.

- 对于 $n = 4, 6, 8, 12, 20$, 分别求出 E_n, F_n 的阶.
- 证明 $F_4 \cong A_4$.
- 证明 $F_6 \cong F_8 \cong S_4$.
- 证明 $F_{12} \cong F_{20} \cong A_5$.

Proof. 先求各群的阶. 设 P 为一正多面体. 由于 $E_n \subseteq O_3(\mathbb{R})$, 行列式映射 $\det : E_n \rightarrow \{\pm 1\}$ 是群同态, 且 $\ker(\det) = E_n \cap SO_3(\mathbb{R}) = F_n$. 对每个正多面体都存在反射对称, 故 $\det$ 满射, 从而 $[E_n : F_n] = 2$, $|E_n| = 2|F_n|$. 因此只需求出旋转群 F_n 的阶即可.

(I) **正四面体.** 正四面体有 4 个顶点. 任一旋转都诱导顶点集的一个置换, 从而得到同态 $\varphi : F_4 \rightarrow S_4$. 若一个旋转固定四个顶点, 则它固定整个四面体, 故该旋转恒等, 所以 φ 单射.

下面计算 $|F_4|$. 一方面恒等旋转有 1 个. 另一方面, 每个顶点与其对面中心确定一条旋转轴, 绕该轴可作角度 $2\pi/3$ 与 $4\pi/3$ 的旋转, 共 $4 \times 2 = 8$ 个非平凡旋转. 故 $|F_4| = 1 + 8 = 9$? 这还少了阶 2 的旋转. 注意到还存在经过一对对边中点的旋转轴, 共有 3 条, 每条给出一个 π 旋转, 故再添 3 个. 因而 $|F_4| = 1 + 8 + 3 = 12$.

于是 $\varphi(F_4)$ 是 S_4 的一个 12 阶子群. 另一方面, 四面体的任一旋转在四个顶点上诱导偶置换: $2\pi/3$ 旋转对应 3-循环, π 旋转对应两个不换位之积, 都是偶置换, 故 $\varphi(F_4) \subseteq A_4$. 由于 $|\varphi(F_4)| = |F_4| = 12 = |A_4|$, 得 $F_4 \cong A_4$. 因而 $|F_4| = 12$, $|E_4| = 24$.

(2) **正六面体与正八面体.** 正六面体与正八面体互为对偶, 因而它们的旋转对称群同构: $F_6 \cong F_8$. 所以只需求一个即可. 取正六面体. 它有 4 条体对角线, 任一旋转必将体对角线集合置换, 因而得到同态 $\psi : F_6 \rightarrow S_4$. 若一旋转固定全部 4 条体对角线, 则固定各顶点, 从而该旋转为恒等, 故 ψ 单射.

计算 $|F_6|$. 立方体的旋转分三类:

- 过一对对面的中心的轴: 共 3 条轴; 每条可转 $\pi/2, \pi, 3\pi/2$, 给出 $3 \times 3 = 9$ 个;

2.3. 群作用

- 过一对对顶点的轴: 共 4 条轴; 每条可转 $2\pi/3, 4\pi/3$, 给出 $4 \times 2 = 8$ 个;
- 过一对对边中点的轴: 共 6 条轴; 每条可转 π , 给出 6 个.

再加上恒等元, 得 $|F_6| = 1 + 9 + 8 + 6 = 24$. 因而 $\psi(F_6)$ 是 S_4 的一个 24 阶子群, 只能是整个 S_4 . 故 $F_6 \cong S_4$. 于是 $F_8 \cong F_6 \cong S_4$. 又因为 $|E_n| = 2|F_n|$, 所以 $|F_6| = |F_8| = 24$, $|E_6| = |E_8| = 48$.

(3) 正十二面体与正二十面体. 正十二面体与正二十面体也互为对偶, 因而 $F_{12} \cong F_{20}$. 我们证明它们都同构于 A_5 . 在正十二面体中可以内接 5 个正立方体; 任一旋转都将这 5 个立方体置换, 从而得到同态 $\rho: F_{12} \rightarrow S_5$. 若一旋转固定这 5 个内接立方体, 则它固定由这些立方体确定的整个十二面体, 因而该旋转恒等, 故 ρ 单射.

下面计算 $|F_{12}|$. 正十二面体的旋转分三类:

- 过一对对顶点的中心的轴: 共 6 条轴; 每条可转 $2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$, 给出 $6 \times 4 = 24$ 个;
- 过一对对顶点的轴: 共 10 条轴; 每条可转 $2\pi/3, 4\pi/3$, 给出 $10 \times 2 = 20$ 个;
- 过一对对边中点的轴: 共 15 条轴; 每条可转 π , 给出 15 个.

再加上恒等元, 得 $|F_{12}| = 1 + 24 + 20 + 15 = 60$.

另, 由上述三类旋转在 5 个内接立方体上的作用可知, 所得置换全为偶置换, 故 $\rho(F_{12}) \subseteq A_5$. 由于 $|\rho(F_{12})| = |F_{12}| = 60 = |A_5|$, 得 $F_{12} \cong A_5$. 再由对偶性, $F_{20} \cong F_{12} \cong A_5$. 从而 $|F_{12}| = |F_{20}| = 60$, $|E_{12}| = |E_{20}| = 120$.

综上, $|F_4| = 12$, $|E_4| = 24$; $|F_6| = |F_8| = 24$, $|E_6| = |E_8| = 48$; $|F_{12}| = |F_{20}| = 60$, $|E_{12}| = |E_{20}| = 120$, 且 $F_4 \cong A_4$, $F_6 \cong F_8 \cong S_4$, $F_{12} \cong F_{20} \cong A_5$. $\square$

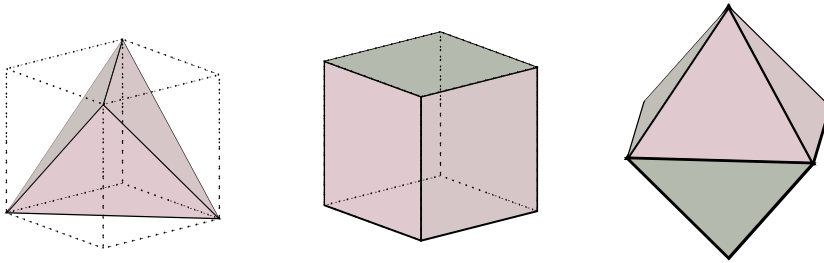


Figure 2.1: 正四面体 (tetrahedron), 正六面体 (hexahedron), 正八面体 (octahedron); 正四面体可以「嵌入」正六面体, 正六面体和正八面体互为对偶多面体.

Chapter 2. 对群的操作

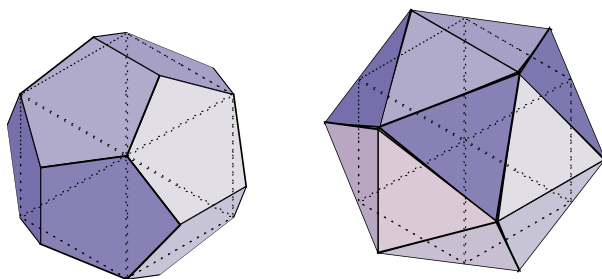


Figure 2.2: 正十二面体 (dodecahedron), 正二十面体 (icosahedron), 两者互为对偶多面体.

2.4 半直积

从直觉上看, 所谓直积, 就是两个群的操作互不影响, 联合而成「一个」对称操作, 分别作用于两个互不联系的系统. 而半直积, 就是说两种对称操作是会相互影响的, 这时候, 两个系统的联合系统拥有的对称操作群就不是原来两个对称操作群的直积, 而是要通过某种「联系」去兼容两种对称操作之间的互相影响.

Definition 2.8 [半直积 (semidirect product)]. 设 G 是群, $H \leq G$, $N \trianglelefteq G$, $G = NH$, $N \cap H = \{e\}$, 则称 G 是 H 和 N 的半直积, 记作 $G = N \rtimes H$.

请对照内直积的定义 Def. 2.4. 特别的, 当 $N, H \trianglelefteq G$ 且 $NH = G$, $N \cap H = \{e\}$ 时, $G = N \times H$. 也就是说, 若半直积中的那个非正规因子群 H 正规了, 半直积就是直积.

Proposition 2.7. 设 G 是群, $H \leq G$, $N \trianglelefteq G$, $H \cap N = \{e\}$, 则 $c : H \times N \rightarrow HN$, $(x, y) \mapsto xy$ 是群同构, 当且仅当同态 $f : H \rightarrow \text{Aut}(N)$, $x \mapsto c_x : H \rightarrow H$, $c_x(y) = xyx^{-1}$ 是平凡的, 即对任意的 $x \in H$, 均有 $f(x) = \text{id}_N$.

这个命题是对上面那句话的精确数学描述 — 当且仅当 H 对 N 的「共轭作用/外自同构」平凡时, $HN = H \times N$.

Proof. c 显然满. 断言 c 单: 若 $x_1, x_2 \in H$, $y_1, y_2 \in N$ 使得 $x_1 y_1 = x_2 y_2$, 则 $x_2^{-1} x_1 = y_2 y_1^{-1} \in H \cap N = \{e\}$ 推出 $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. 容易验证 f 是群同态.

2.4. 半直积

假若 c 是群同构, 则对 $x \in H, y \in N$, 有

$$y = c(e, y) = c\left((x, y)(x^{-1}, e)\right) = c(x, y)c(x^{-1}, e) = xyx^{-1}.$$

故 $c_x(y) = y, f(x) = \text{id}_N$.

假若 f 平凡, 则任取 $x \in H, y \in N$, 有 $xy = yx$, 则

$$c((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = c(x_1x_2, y_1y_2) = x_1x_2y_1y_2 = x_1y_1x_2y_2 = c(x_1, y_1)c(x_2, y_2).$$

得 c 是群同构. □

Definition 2.9 [短正合列 (short exact sequence)]. 短正合列指的是这样一串同态:

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$$

其中 i 是单射, π 是满射, 且 $\ker \pi = \text{Im } i = N$.

在短正合列 $1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$ 中, 如果 N 是 Abel 群, 我们特别地将第一个 1 改写为 0 以起到突出强调的作用, 即写为

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1.$$

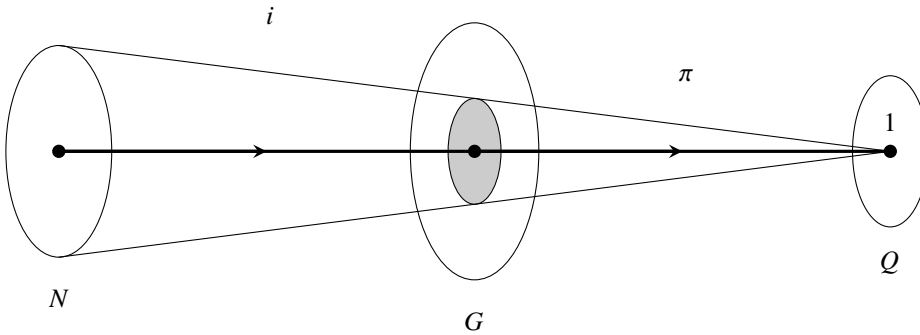


Figure 2.3: 正合示意图

将 i 识别为嵌入映射, 则短正合列描述了 G 中有正规子群 N , 且商群 $G/N \cong Q$. 那么 π 就是自然投射 $\pi(g) = gN$. 短正合列的概念来自正合列, 关于这个概念可见 ??.

Chapter 2. 对群的操作

Definition 2.10 [群扩张 (extension of group)]. 设 G 是群, $N \trianglelefteq G$ 是正规子群, 称短正合列

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$$

为**群扩张**. 称 G 是 N 被 Q 的一个**扩张**. 如下到 G 和 G' 的两个扩张称为**等价的**, 当且仅当存在同构 $\sigma: G \xrightarrow{\sim} G'$ 使得

$$\begin{array}{ccccc} & & G & & \\ & \nearrow & \downarrow \sigma & \searrow & \\ 1 & \longrightarrow & N & & Q \longrightarrow 1 \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & G' & & \end{array}$$

交换.

注意, 扩张不是唯一的, 不同的扩张可以给出不同的 G . 例如取 $N = C_2, Q = C_2$, 那么 $G = C_4$ 和 $G = V_4$ (Klein 四元群) 拥有同样的短正合列.

Definition 2.11 [分裂 (split), 分裂截面 (splitting section)]. 扩张

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$$

称为是**分裂的**, 如果存在群同态 $s: Q \rightarrow G$ 使得 $\pi \circ s = \text{id}_Q$. 这样的 s 称为**截面**. 分裂等价于

$$G \cong N \rtimes Q$$

即 G 可以视作 N 与 Q 的半直积.

以上声称分裂等价于半直积, 我们于下面证明.

Proof. 先设扩张分裂, 即存在群同态 $s: Q \rightarrow G$ 使得 $\pi \circ s = \text{id}_Q$. 令 $H := s(Q) \leq G$. 因为 s 是群同态, 所以 H 是 G 的子群. 又因为 $\pi \circ s = \text{id}_Q$, 可知 s 是单射. 因此 $H \cong Q$. 下面证明 $G = NH$, $N \cap H = \{e\}$. 任取 $g \in G$. 令 $q = \pi(g) \in Q$. 因为 $\pi(s(q)) = q = \pi(g)$, 所以

$$\pi(g s(q)^{-1}) = \pi(g) \pi(s(q))^{-1} = q q^{-1} = e.$$

因此 $g s(q)^{-1} \in \ker \pi = N$. 于是存在 $n \in N$ 使得 $g = n s(q) \in NH$. 故 $G = NH$. 再证交平凡. 若

2.4. 半直积

$x \in N \cap H$, 则 $x = s(q)$ 对某个 $q \in Q$ 成立, 且 $x \in N = \ker \pi$. 因而 $e = \pi(x) = \pi(s(q)) = q$. 所以 $x = s(e) = e$. 因此 $N \cap H = \{e\}$. 又因为 $N = \ker \pi \trianglelefteq G$, 所以按照半直积的定义, $G = N \rtimes H$. 由于 $H \cong Q$, 故 $G \cong N \rtimes Q$.

反之, 若 $G = N \rtimes H$, 则自然投射 $\pi: G \rightarrow G/N$ 在 H 上的限制 $\pi|_H: H \rightarrow G/N$ 是群同构. 取其逆映射 $s: G/N \rightarrow H \hookrightarrow G$, 便有 $\pi \circ s = \text{id}_{G/N}$. 故扩张分裂. $\square$

截面不总是存在的, 有人或许认为只要在每个商群元 (陪集) 中任取代表元 gN , 让 s 是「把商群元中的代表元提升到 G 中」, 即 $gN \mapsto g \in G$, 这样就给出了 s . 但这不一定满足群同态. 例如约定 g_1N 和 g_2N 是两个代表元, 以上方案给出的 s 不总是满足

$$s(g_1N \cdot g_2N) = s(g_1N) s(g_2N) = g_1 g_2$$

的第一个等号, 因为不总是有 $g_1N \cdot g_2N = g_1 g_2 N$. 举一个具体的例子, 还是 C_4 和 V_4 , 我们知道它们有相同的正合列

$$1 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{i} \begin{matrix} C_4 \\ V_4 \end{matrix} \xrightarrow{\pi} C_2 \longrightarrow 1.$$

设 $C_4 = \{1, d, d^2, d^3\}$, $V_4 = \{1, a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = 1, ab = c, bc = a, ca = b\}$, 取 $C_2 = \{1, d^2\} \trianglelefteq C_4$, $C_4/C_2 = \{C_2, dC_2\}$ 或者 $C_4/C_2 = \{C_2, d^3C_2\}$, 于是 C_4 只有两种 s 备选: $C_4/C_2 \rightarrow \{1, d\}$ 或 $\{1, d^3\}$, 都不构成 C_4 的子群, 从而 C_4 不分裂. 但是 V_4 是分裂的, 考虑 $C_2' = \{1, a\} \trianglelefteq V_4$, 注意 V_4 是 Abel 群且 C_2' 是子群从而自动正规, 于是 $V_4/C_2' = \{C_2', bC_2'\}$ 或者 $V_4/C_2' = \{C_2', cC_2'\}$, 两种提升 $\{1, b\}$ 和 $\{1, c\}$ 都是 V_4 的子群, 从而形成半直积; 特别的, 商群的提升还是正规子群, 从而是直积, 即 $V_4 = C_2 \times C_2$.

如果能通过挑选代表元, 使得这个关系成立, 从而代表元构成子群, 然后定义 s 是代表元朝 G 的提升, 就满足截面的定义了. 这样就得到了一个半直积分解, $s(Q)$ 用如下概念描述:

Definition 2.12 [补群 (complement)]. 设 G 是群, $N \trianglelefteq G$ 是正规子群, $H \leq G$ 是子群, 满足

- $G = NH$,
- $N \cap H = \{e\}$,

这样的 H 就是 N 在 G 中的**补群**, 使得 $G \cong N \rtimes H$.

我们还可以看到截面即便存在也不一定唯一, 例如之前的例子 V_4 取正规子群 $\{1, a\}$ 作商就有两种界面 $V_4/\{1, a\} \rightarrow \{1, b\}$ 或 $\{1, c\}$. 但是本质相同, 因为都给出 $V_4 = C_2 \times C_2$, 即不在乎群内部结构. 事实上, 的确存在本质不同的分裂, 例如 $D_4 \cong C_4 \rtimes C_2 \cong V_4 \rtimes C_2$ (后文会证明). 所以有时为了区分不同的分裂, 半直积符号 $\rtimes$ 常添加分裂方式 s 为角标: $G \cong N \rtimes_s H$.

Chapter 2. 对群的操作

截面 $s: Q \rightarrow G$ 不只是把商群 Q 提升回 G , 它还给出了 Q 对 N 的作用. 由于 $N = \ker \pi \trianglelefteq G$, 对任意 $q \in Q$, 共轭映射 $c_q: N \rightarrow N, n \mapsto s(q)ns(q)^{-1}$ 是 N 的自同构. 因为 s 是群同态, 对任意 $q_1, q_2 \in Q$ 有

$$c_{q_1 q_2}(n) = s(q_1 q_2)ns(q_1 q_2)^{-1} = s(q_1)s(q_2)ns(q_2)^{-1}s(q_1)^{-1} = c_{q_1}(c_{q_2}(n)).$$

可知群同态 s 实则诱导出 $c: Q \rightarrow \text{Aut}_G(N), q \mapsto c_q$, 于是:

Definition 2.13. 截面为 s 的分裂扩张 $1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$ 给出半直积 $G \cong N \rtimes_s Q$, 其乘法定义为 $(n_1, q_1)(n_2, q_2) := (n_1 c_{q_1}(n_2), q_1 q_2)$.

乘法如上定义能使得 $N \rtimes_s Q$ 构成群, 且有同构关系 $G \cong N \rtimes_s Q$ 成立, 下说明这一点.

Proof. 记截面 s 诱导的作用为 $c: Q \rightarrow \text{Aut}(N), q \mapsto c_q, c_q(n) = s(q)ns(q)^{-1}$. 因为 $N = \ker \pi \trianglelefteq G$ 且 s 是群同态, c 是群同态.

在 $N \times Q$ 上定义乘法 $(n_1, q_1)(n_2, q_2) := (n_1 c_{q_1}(n_2), q_1 q_2)$. 结合律来自 $c_{q_1 q_2} = c_{q_1} \circ c_{q_2}$ 以及每个 c_q 是 N 的自同构:

$$\begin{aligned} ((n_1, q_1)(n_2, q_2))(n_3, q_3) &= (n_1 c_{q_1}(n_2) c_{q_1 q_2}(n_3), q_1 q_2 q_3) \\ &= (n_1 c_{q_1}(n_2 c_{q_2}(n_3)), q_1 q_2 q_3) = (n_1, q_1)((n_2, q_2)(n_3, q_3)). \end{aligned}$$

单位元为 (e_N, e_Q) , 且 $(n, q)^{-1} = (c_{q^{-1}}(n^{-1}), q^{-1})$. 直接代入可验证其确为左右逆. 因此 $N \times Q$ 在上述乘法下构成群, 记作 $N \rtimes_s Q$.

定义 $\Phi: N \rtimes_s Q \rightarrow G, (n, q) \mapsto ns(q)$. 对任意 $(n_1, q_1), (n_2, q_2)$, 有

$$\begin{aligned} \Phi(n_1, q_1)\Phi(n_2, q_2) &= n_1 s(q_1) n_2 s(q_2) = n_1 s(q_1) n_2 s(q_1)^{-1} s(q_1 q_2) \\ &= n_1 c_{q_1}(n_2) s(q_1 q_2) = \Phi((n_1, q_1)(n_2, q_2)), \end{aligned}$$

故 Φ 是群同态.

任取 $g \in G$, 令 $q = \pi(g)$, 则 $gs(q)^{-1} \in \ker \pi = N$, 故存在 $n \in N$ 使得 $g = ns(q)$, 所以 Φ 满. 若 $\Phi(n_1, q_1) = \Phi(n_2, q_2)$, 作用 π 得 $q_1 = q_2$, 继而 $n_1 = n_2$, 所以 Φ 单. 因此 Φ 是群同构, 即 $G \cong N \rtimes_s Q$. $\square$

Example 15. 试说明 $D_4 \cong C_4 \rtimes C_2 \cong V_4 \rtimes C_2$ 给出两种不等价分裂.

2.5. 群扩张

Solution. 首先, $\langle r \rangle \cong C_4$, $\langle s \rangle \cong C_2$, 且 $\langle r \rangle \trianglelefteq D_4$, $D_4 = \langle r \rangle \langle s \rangle$, $\langle r \rangle \cap \langle s \rangle = \{e\}$. 因此 $D_4 \cong C_4 \rtimes C_2$. 这里 C_2 对 C_4 的作用由 $r \mapsto r^{-1}$ 给出.

另一方面, 令 $N = \{e, r^2, s, r^2s\}$. 则 $N \cong V_4$. 取 $H = \langle rs \rangle = \{e, rs\} \cong C_2$. 可以验证 $N \trianglelefteq D_4$, $D_4 = NH$, $N \cap H = \{e\}$. 因此 $D_4 \cong V_4 \rtimes C_2$. 这两个半直积分解是不等价的, 因为其正规因子分别为 C_4 与 V_4 , 而 $C_4 \not\cong V_4$. $\square$

最后给出一种比较特殊的群扩张:

Definition 2.14 [中心扩张 (central extension)]. 群扩张 $1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$ 称为中心扩张, 如果 $i(N) \subseteq Z(G)$.

从定义可知, 中心扩张等价于 Q 在 N 上的作用平凡, 即直积正是分裂的中心扩张.

总结: 半直积为, 设 G 是群, 若 $N \trianglelefteq G$, $H \leq G$ 且 $G = NH$ 和 $N \cap H = \{e\}$, 则存在半直积分解 $G \cong N \rtimes H$, 其中的作用由共轭诱导

$$\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N), \quad \varphi(h)(n) = hnh^{-1}.$$

特别的, 如果 $H \trianglelefteq G$, 则 N 和 H 相互正规化, φ 退化至平凡 $hnh^{-1} = n$ (见 Prop. 2.7), 半直积进化为直积 $G \cong N \times H$. 反过来, 如果存在半直积结果 $G \cong N \rtimes H$, 则必有 $G/N \cong H$. 但是已知 $G/N \cong H$, 不一定有 $G \cong N \rtimes H$, 除非是能恰当地挑选代表元并提升至 G 中群元. 若这个集合 H' 形成与 H 同构的群 $H' \cong H$, 才有 $G \cong N \rtimes H$. 等价条件, N 有补群, 即存在 $H' \leq G$, $NH' = G$, $N \cap H' = \{e\}$, $H' \cong G/N$. 特别的, 如果 $H' \trianglelefteq G$, 则半直积进化为直积 $G \cong N \times H$.

2.5 群扩张

本节主要参考了 Zhang 的学士学位论文 “Classifying Group Extensions with Not Necessarily Abelian Kernel” [Zha17] 和 Brown 经典著作 *Cohomology of Groups* [Bro82, CHAPTER IV Low-Dimensional Cohomology and Group Extensions].

截面为 s 的分裂扩张 $1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$ 等价于半直积 $G \cong N \rtimes_s Q$, 本节考虑更一般的情况, 此时正合列不分裂. 毕竟有的时候, 我们的群甚至不能拆分为半直积.

退而求其次, 我们总是可以找到集合之间的映射 $s : Q \rightarrow G$ 使得 $\pi \circ s = \text{id}_Q$. 请注意不再要求 s 是同态, 从而一般没有 $s(g_1N \cdot g_2N) = s(g_1N)s(g_2N)$. 但是

$$\pi(s(g_1N \cdot g_2N)) = g_1N \cdot g_2N = \pi(s(g_1N))\pi(s(g_2N)) = \pi(s(g_1N)s(g_2N)),$$

以上利用了 π 是同态. 所以不妨设 $\omega_2(g_1N, g_2N) \in N \trianglelefteq G$ 使得

$$s(g_1N)s(g_2N) = \omega_2(g_1N, g_2N)s(g_1N \cdot g_2N),$$

Chapter 2. 对群的操作

或等价地写作 $s(q_1)s(q_2) = \omega_2(q_1, q_2)s(q_1q_2)$. 注意, s 不是截面, 称呼为**集合截面**, 以区分 s 是群同态的分裂情形, 并再约定 $s(e_Q) = e_G$, 称为**规范化截面**.

Definition 2.15 [2-上链 (2-cochain), 2-上链集 (set of 2-cochains), 非分裂扩张 (non-split extension)]. 给定规范化截面 $s: Q \rightarrow G$ 后, 满足 $s(q_1)s(q_2) = \omega_2(q_1, q_2)s(q_1q_2)$, $\forall q_1, q_2 \in Q$, $\omega_2(q_1, q_2) \in N$ 的映射 $\omega_2: Q \times Q \rightarrow N$ 称为 s 的**2-上链**, 所有的 2-上链组成的集合称为**2-上链集**, 记作 $C^2(Q, N)$. 给出非平凡的 ω_2 后, 非分裂扩张记作 $G \cong N \rtimes_{\omega_2} Q$.

Note. 非分裂扩张不是半直积, 分裂 (即 ω_2 平凡) 时才是半直积.

Proposition 2.8. 设群扩张 $1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$ 则 $C^2(Q, N)$ 构成群; 若还有 N 是 *Abel* 群, 则 $C^2(Q, N)$ 构成 *Abel* 群.

Proof. 在 $C^2(Q, N)$ 上逐点定义乘法:

$$(\omega\eta)(q_1, q_2) := \omega(q_1, q_2)\eta(q_1, q_2).$$

结合律由 N 中乘法的结合律逐点得到. 单位元为常值映射 $1(q_1, q_2) = e_N$. 对任意 $\omega \in C^2(Q, N)$, 定义 $\omega^{-1}(q_1, q_2) := \omega(q_1, q_2)^{-1}$. 则 ω^{-1} 是 ω 的逆元. 因此 $C^2(Q, N)$ 构成群.

若进一步 N 是 *Abel* 群, 则对任意 $\omega, \eta \in C^2(Q, N)$, 有

$$(\omega\eta)(q_1, q_2) = \omega(q_1, q_2)\eta(q_1, q_2) = \eta(q_1, q_2)\omega(q_1, q_2) = (\eta\omega)(q_1, q_2).$$

故 $C^2(Q, N)$ 构成 *Abel* 群. □

由此可见, 当扩张的核 N 是 *Abel* 群的时候, 虽然提升映射 s 不再是同态, 但是依旧有一些「群」的结构残留, 就是 $C^2(Q, N)$, 这说明 N 是否 *Abel* 对扩张问题有重要的影响. 事实确实如此, 当 N 非 *Abel* 时, 情况要远复杂得多, 我们分两小节讲清楚这个问题. 在此之前, 先证明一些共用的公式:

Lemma 2.1. 设群扩张 $1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$ 配有规范化截面 $s: Q \rightarrow G$ 以及 2-上链 $\omega_2: Q \times Q \rightarrow N$, 则任意 $g \in G$ 均可以唯一地表示为 $g = (n, q) \in N \times Q$, 并配备乘法

$$g_1 g_2 = (n_1, q_1)(n_2, q_2) = (n_1 c_{q_1}(n_2) \omega_2(q_1, q_2), q_1 q_2),$$

其中 $c_q \in \text{Aut}(N)$, $c_q(n) = s(q)ns(q)^{-1}$, $\forall q \in Q, \forall n \in N$.

2.5. 群扩张

Proof. 对任意 $g \in G$, 令 $q = \pi(g) \in Q$. 因为 $\pi(g s(q)^{-1}) = \pi(g) \pi(s(q))^{-1} = q q^{-1} = e_Q$, 所以 $g s(q)^{-1} \in \ker \pi = N$. 因此存在唯一的 $n \in N$ 使得 $g = n s(q)$. 于是, 借由集合截面 s , 可将 G 中元素唯一表示为一对 $g \leftrightarrow (n, q) \in N \times Q$.

现在设 $g_1 = n_1 s(q_1)$, $g_2 = n_2 s(q_2)$. 则

$$g_1 g_2 = n_1 s(q_1) n_2 s(q_2) = n_1 s(q_1) n_2 s(q_1)^{-1} s(q_1) s(q_2) = n_1 c_{q_1}(n_2) \omega_2(q_1, q_2) s(q_1 q_2).$$

注意因为 N 是正规子群, 所以 $c_{q_1}(n_2) \in N$. 因此在 $N \times Q$ 的表示下,

$$(n_1, q_1)(n_2, q_2) = (n_1 c_{q_1}(n_2) \omega_2(q_1, q_2), q_1 q_2).$$

这正是由 G 的乘法通过唯一表示 $g = n s(q)$ 搬运到 $N \times Q$ 上得到的乘法公式. $\square$

2.5.1 核是 Abel 群时的扩张

本小节我们设群扩张使用的 N 是 Abel 群. 我们希望刻画 ω_2 , 以了解如何给出一个自洽的群扩张, 以及哪些群扩张等价. 所谓自洽, 意思是 [Lem. 2.1](#) 给出的群乘法还要满足群乘法的结合律.

$$\begin{aligned} g_1 g_2 g_3 &= (n_1, q_1) (n_2, q_2) (n_3, q_3) \\ &= [(n_1, q_1) (n_2, q_2)] (n_3, q_3) = (n_1, q_1) [(n_2, q_2) (n_3, q_3)]. \end{aligned}$$

因为 N 是 Abel 的, 所以不妨使用 $+$ 代替 N 上的乘法. 分别计算上式第二行的两项,

$$\begin{aligned} [(n_1, q_1) (n_2, q_2)] (n_3, q_3) &= (n_1 + c_{q_1}(n_2) + \omega_2(q_1, q_2), q_1 q_2) (n_3, q_3) \\ &= (n_1 + c_{q_1}(n_2) + \omega_2(q_1, q_2) + c_{q_1 q_2}(n_3) + \omega_2(q_1 q_2, q_3), q_1 q_2 q_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n_1, q_1) [(n_2, q_2) (n_3, q_3)] &= (n_1, q_1) (n_2 + c_{q_2}(n_3) + \omega_2(q_2, q_3), q_2 q_3) \\ &= (n_1 + c_{q_1}(n_2 + c_{q_2}(n_3) + \omega_2(q_2, q_3)) + \omega_2(q_1, q_2 q_3), q_1 q_2 q_3) \\ &= (n_1 + c_{q_1}(n_2) + c_{q_1 q_2}(n_3) + c_{q_1}(\omega_2(q_2, q_3)) + \omega_2(q_1, q_2 q_3), q_1 q_2 q_3), \end{aligned}$$

两式子相等, 也就是说

$$\begin{aligned} \cancel{n_1} + \cancel{c_{q_1}(n_2)} + \cancel{c_{q_1 q_2}(n_3)} + c_{q_1}(\omega_2(q_2, q_3)) + \omega_2(q_1, q_2 q_3) \\ = \cancel{n_1} + \cancel{c_{q_1}(n_2)} + \omega_2(q_1, q_2) + \cancel{c_{q_1 q_2}(n_3)} + \omega_2(q_1 q_2, q_3), \end{aligned}$$

最后导出方程:

Chapter 2. 对群的操作

Proposition 2.9. 核 N 是 $Abel$ 群时的群扩张 $0 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$ 的 2-上链 ω_2 满足自洽方程:

$$c_{q_1}(\omega_2(q_2, q_3)) - \omega_2(q_1 q_2, q_3) + \omega_2(q_1, q_2 q_3) - \omega_2(q_1, q_2) = 0$$

对任意的 $q_1, q_2, q_3 \in Q$ 均成立, 其中 $c_q \in \text{Aut}(N)$, $c_q(n) = s(q)ns(q)^{-1}$, $\forall q \in Q, \forall n \in N$.

Definition 2.16 [2-上闭链 (2-cocycle), 2-上闭链群 (group of 2-cocycles)]. 核 N 是 $Abel$ 群时的群扩张 $0 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$ 的 2-上链 ω_2 若满足自洽方程, 就称为 **2-上闭链**; 所有的 2-上闭链组成的 $Abel$ 群称为 **2-上闭链群**, 记作 $Z^2(Q, N)$.

2-上闭链组成的集合构成群, 这不是那么地显然, 有必要给出证明. 依据 **Prop. 2.8**, $Z^2(Q, N)$ 继承了来自 $Abel$ 群 $C^2(Q, N)$ 的加法, 只需说明 $Z^2(Q, N) \leq C^2(Q, N)$. 为此, 任取 $\omega, \eta \in Z^2(Q, N)$, 它们都满足自洽方程

$$\begin{aligned} c_{q_1}(\omega(q_2, q_3)) - \omega(q_1 q_2, q_3) + \omega(q_1, q_2 q_3) - \omega(q_1, q_2) &= 0, \\ c_{q_1}(\eta(q_2, q_3)) - \eta(q_1 q_2, q_3) + \eta(q_1, q_2 q_3) - \eta(q_1, q_2) &= 0. \end{aligned}$$

两式相减, 得到

$$c_{q_1}((\omega - \eta)(q_2, q_3)) - (\omega - \eta)(q_1 q_2, q_3) + (\omega - \eta)(q_1, q_2 q_3) - (\omega - \eta)(q_1, q_2) = 0.$$

这说明 $\omega - \eta \in Z^2(Q, N)$, 根据 **Prop. 1.2**, $Z^2(Q, N) \leq C^2(Q, N)$.

接下来, 我们的任务是研究哪些 $\omega_2 \in Z^2(Q, N)$ 得到的扩张是等价的. 等价的 ω_2 的冗余性来源于一开始选择规范化截面 $s: Q \rightarrow G$ 的任意性: 由于只要求了 $\pi \circ s = \text{id}_Q$, 对于每一个 $q \in Q$, 我们可以在陪集 $\pi^{-1}(q)$ 内任选一个元素作为 $s(q)$. 根据陪集分解 **Prop. 1.7**, 我们可以从已经给出的规范化截面 s 构造一个新的规范化 $s'(q) := i(\alpha_1(q))s(q)$, $q \in Q$, 其中 $\alpha_1: Q \rightarrow N$ 是映射, 这样构造出的 $s'(q)$ 和 $s(q)$ 同属一个 N 陪集.

Definition 2.17 [1-上链 (1-cochain), 1-上链集 (set of 1-cochains)]. 设群扩张 $1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$ 配备了规范化截面 $s: Q \rightarrow G$, 称映射 $\alpha_1: Q \rightarrow N$ 为 **1-上链**. 全体 1-上链组成的集合称为 **1-上链集**, 记作 $C^1(Q, N)$.

Note. 1-上链的定义不要求扩张的核 N 是 $Abel$ 群. 依据定义可知 $s'(q)$ 和 $s(q)$ 同属 N 在 G 中的一个陪集, $\forall q \in Q$.

2.5. 群扩张

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{\pi} & Q \longrightarrow 1 \\
 & & & & \swarrow \alpha_1 & \searrow s & \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

当我们将 s 替换为 s' , 则 2-上链 ω_2 也会改变为 ω'_2 . 下面计算 ω'_2 : 我们依旧把 i 识别为嵌入, 则 $s'(q) := i(\alpha_1(q))s(q) = \alpha_1(q)s(q)$ 是合理的简写. 利用 **Def. 2.15**, 有 $s'(q_1)s'(q_2) = \omega'_2(q_1, q_2)s'(q_1q_2)$, 分别计算这个等式的两侧,

$$\begin{aligned}
 s'(q_1)s'(q_2) &= \alpha_1(q_1)s(q_1)\alpha_1(q_2)s(q_2) = \alpha_1(q_1)[s(q_1)\alpha_1(q_2)s(q_1)^{-1}]s(q_1)s(q_2) \\
 &= \alpha_1(q_1)c_{q_1}(\alpha_1(q_2))\omega_2(q_1, q_2)s(q_1q_2),
 \end{aligned}$$

$$\omega'_2(q_1, q_2)s'(q_1q_2) = \omega'_2(q_1, q_2)\alpha_1(q_1q_2)s(q_1q_2),$$

这两个式子在 N 相等中相等, 从而有

$$\omega'_2(q_1, q_2) = \alpha_1(q_1)c_{q_1}(\alpha_1(q_2))\omega_2(q_1, q_2)\alpha_1(q_1q_2)^{-1}. \quad (2.1)$$

特别的, 若 N 是 Abel 群, 上式的乘号全部可以替换为 $+$, 从而导出下面的命题:

Proposition 2.10. 核 N 是 Abel 群时的群扩张 $0 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$ 有 2-上闭链 ω_2 , 则由 1-上链 α_1 诱导出的等价 2-上闭链为 $\omega'_2(q_1, q_2) = \omega_2(q_1, q_2) + c_{q_1}(\alpha_1(q_2)) - \alpha_1(q_1q_2) + \alpha_1(q_1)$, $\forall q_1, q_2 \in Q$, 其中 $c_q \in \text{Aut}(N)$, $c_q(n) = s(q)ns(q)^{-1}$, $\forall q \in Q, \forall n \in N$.

ω_2 和 ω'_2 给出的是同样的扩张, 即它们本质相同, 冗余仅仅是来源于规范化截面 s 选择的任意性. 我们关心的是不等价的扩张, 所以要商去这种区别关系.

Definition 2.18 [2-上边界 (2-coboundary), 2-上边界群 (group of 2-coboundaries)]. 核 N 是 Abel 群时的群扩张 $0 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$ 有 1-上链 α_1 , 称形如 $c_{q_1}(\alpha_1(q_2)) - \alpha_1(q_1q_2) + \alpha_1(q_1)$ 的 2-上闭链为 **2-上边缘**, 其中 $c_q \in \text{Aut}(N)$, $c_q(n) = s(q)ns(q)^{-1}$, $\forall q \in Q, \forall n \in N$; 所有 2-上边缘组成的 Abel 群称为 **2-上边缘群**, 记作 $B^2(Q, N)$.

核 N 是 Abel 群时, 2-上边缘确实是 2-上闭链, 因为 2-上边缘是 $\omega'_2 - \omega_2 \in Z^2(Q, N)$, 注意这里 $Z^2(Q, N)$ 是群 (见 **Def. 2.16** 及其后正文), 且 $B^2(Q, N)$ 确实为 Abel 群, 因为两个 2-上边缘的差也可以由 2-上边缘表出, 从而根据 **Prop. 1.2**, 形成 $Z^2(Q, N)$ 的子群. 现在我们有子群关系链

$$B^2(Q, N) \leq Z^2(Q, N) \leq C^2(Q, N).$$

Chapter 2. 对群的操作

这里均是 Abel 群, 子群自动正规, 我们在自洽的 2-上闭链中商去给出等价扩张的关系:

Definition 2.19 [2-上同调群 (2-cohomology group)]. 核 N 是 Abel 群时的群扩张 $0 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$, 定义 **2-上同调群**

$$H^2(Q, N) := Z^2(Q, N) / B^2(Q, N).$$

每个 $[\omega_2] \in H^2(Q, N)$ 给出等价扩张的 2-上闭链等价类.

当给定 Abel 核 N 和商 Q 后, 利用 $H^2(Q, N)$, 我们可以按照如下步骤构造所有可能的不等价群扩张:

- 计算所有可能群作用 $c : Q \rightarrow \text{Aut}(N)$, $q \mapsto c_q$;
- 得到 c 后, 利用 **Prop. 2.9** 计算 $Z^2(Q, N)$, 利用 **Def. 2.18** 计算 $B^2(Q, N)$, 得到 $H^2(Q, N)$;
- 每个 $[\omega_2] \in H^2(Q, N)$, 连同群作用 c 给出一个不等价的非分裂扩张 $G \cong N \rtimes_{\omega_2} Q$.

Example 16. 以 $N = C_2$, $Q = C_2$ 为例, 计算所有 Abel 核扩张.

Solution. 因为 $\text{Aut}(C_2) = 1$, 所以 Q 对 N 的作用只有平凡作用. 取 2-上链 $\omega : Q \times Q \rightarrow N$, 规范化即 $\omega(e_Q, q) = \omega(q, e_Q) = e_N \equiv 0$. 因为 $Q \times Q = C_2 \times C_2$ 中只有 4 个元素, 非平凡的 ω 只有 $a := \omega(t, t) \in C_2$, 这里 t 是二阶元. 由于作用平凡, 2-上闭链条件自洽方程 **Prop. 2.9** 为

$$\omega(q_2, q_3) - \omega(q_1 q_2, q_3) + \omega(q_1, q_2 q_3) - \omega(q_1, q_2) = 0.$$

唯一需要检查的是 $q_1 = q_2 = q_3 = t$, 此时 $a - 0 + 0 - a = 0$. 所以 $Z^2(C_2, C_2) \cong C_2$. 再计算 $B^2(C_2, C_2)$. 1-上链 $\alpha : Q \rightarrow N$, 规范化即满足 $\alpha(e) = 0$. 设 $\alpha(t) = b$. 条件 **Def. 2.18** 给出方程

$$\alpha(t) - \alpha(e) + \alpha(t) = 2b = 0.$$

因此 $B^2(C_2, C_2) = 0$. 故 $H^2(C_2, C_2) \cong C_2$.

现在由 $[\omega] \in H^2(C_2, C_2)$ 构造扩张. 在集合 $C_2 \times C_2$ 上定义乘法

$$(n_1, q_1)(n_2, q_2) = (n_1 + n_2 + \omega(q_1, q_2), q_1 q_2).$$

若 $\omega(t, t) = 0$, 则这是普通直积, 得到 $G_\omega \cong C_2 \times C_2 = V_4$. 若 $\omega(t, t) = 1$, 令 $x = (0, t)$, 则 $x^2 = (1, e)$, $x^4 = (0, e)$. 因此 x 是 4 阶元, 故 $G_\omega \cong C_4$.

2.5. 群扩张

所以以 C_2 为 Abel 核、以 C_2 为商的扩张共有两类:

$$0 \rightarrow C_2 \rightarrow V_4 \rightarrow C_2 \rightarrow 1, \quad 0 \rightarrow C_2 \rightarrow C_4 \rightarrow C_2 \rightarrow 1.$$

前者分裂, 后者非分裂. □

* 2.5.2 核不是 Abel 群时的扩张

再次梳理我们面对的具体问题: 任给两个群 N 和 Q , 如何分类所有不等价扩张, 以及如何构造出来? 在上一小节中, 我们假设核 N 是 Abel 群, 因而可以把 N 写成加法群, 并且 $C^2(Q, N)$, $Z^2(Q, N)$, $B^2(Q, N)$ 都是 Abel 群. 于是同调群

$$H^2(Q, N) = Z^2(Q, N)/B^2(Q, N)$$

可以分类固定作用 $Q \rightarrow \text{Aut}(N)$ 下的扩张.

现在考虑一般情形: N 不再假设为 Abel 群. 这时最大的变化是, 单独的 2-上链 $\omega_2 : Q \times Q \rightarrow N$ 已经不足以描述扩张; 我们还必须同时记录集合截面诱导出的共轭作用 $c_q : N \rightarrow N$, $c_q(n) = s(q)ns(q)^{-1}$. 由于 $s : Q \rightarrow G$ 只是集合截面而不一定是群同态, 映射 $c : Q \rightarrow \text{Aut}(N)$, $q \mapsto c_q$ 一般也不是群同态. 它一般不满足 $c_{q_1 q_2} = c_{q_1} \circ c_{q_2}$ (核 N 是 Abel 群时满足), 这是区别于核 N 是 Abel 群的关键之处 — 此时 Q 对 N 不再是群作用, 我们需要额外的信息记录 c 距离群同态有多远.

记符号 $\text{Inn}(m) \in \text{Inn}(N)$, 其效果为 $\text{Inn}(m)(n) = mn m^{-1}$, $\forall m, n \in N$

Lemma 2.2. 设 $1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$ 是群扩张, 取规范化集合截面 $s : Q \rightarrow G$, 将 i 识别为嵌入, 定义 $c_q : N \rightarrow N$, $c_q(n) = s(q)ns(q)^{-1}$, $\forall q \in Q$, 以及 $\omega_2 : Q \times Q \rightarrow N$ 由 $s(q_1)s(q_2) = \omega_2(q_1, q_2)s(q_1 q_2)$ 给出, 则 (c, ω_2) 满足:

- 对任意 $q_1, q_2 \in Q$, $c_{q_1} \circ c_{q_2} = \text{Inn}(\omega_2(q_1, q_2)) \circ c_{q_1 q_2}$;
- $c_{e_Q} = \text{id}_N$;
- 对任意 $q_1, q_2, q_3 \in Q$, $\omega_2(q_1, q_2)\omega_2(q_1 q_2, q_3) = c_{q_1}(\omega_2(q_2, q_3))\omega_2(q_1, q_2 q_3)$;
- $\omega_2(e_Q, q) = \omega_2(q, e_Q) = e_N$.

Proof. 第一式来自计算 $s(q_1)s(q_2)$ 对 N 的共轭作用. 对任意 $n \in N$,

$$\begin{aligned} (c_{q_1} \circ c_{q_2})(n) &= s(q_1)s(q_2)ns(q_2)^{-1}s(q_1)^{-1} \\ &= \omega_2(q_1, q_2)s(q_1 q_2)ns(q_1 q_2)^{-1}\omega_2(q_1, q_2)^{-1} = \text{Inn}(\omega_2(q_1, q_2))(c_{q_1 q_2}(n)). \end{aligned}$$

Chapter 2. 对群的操作

因此 $c_{q_1} \circ c_{q_2} = \text{Inn}(\omega_2(q_1, q_2)) \circ c_{q_1 q_2}$.

第二式由 $s(e_Q) = e_G$ 立即得到.

第三式来自 G 中乘法的结合律. 一方面

$$(s(q_1)s(q_2))s(q_3) = \omega_2(q_1, q_2)s(q_1 q_2)s(q_3) = \omega_2(q_1, q_2)\omega_2(q_1 q_2, q_3)s(q_1 q_2 q_3).$$

另一方面

$$\begin{aligned} s(q_1)(s(q_2)s(q_3)) &= s(q_1)\omega_2(q_2, q_3)s(q_2 q_3) \\ &= s(q_1)\omega_2(q_2, q_3)s(q_1)^{-1}s(q_1)s(q_2 q_3) = c_{q_1}(\omega_2(q_2, q_3))\omega_2(q_1, q_2 q_3)s(q_1 q_2 q_3). \end{aligned}$$

比较 N 部分, 得 $\omega_2(q_1, q_2)\omega_2(q_1 q_2, q_3) = c_{q_1}(\omega_2(q_2, q_3))\omega_2(q_1, q_2 q_3)$.

最后一式由规范化条件 $s(e_Q) = e_G$ 得到. $\square$

当 N 是 Abel 群时, 内自同构 $\text{Inn}(n)$ 恒为恒等映射, 因而第一条退化为 $c_{q_1} \circ c_{q_2} = c_{q_1 q_2}$, 即 $c : Q \rightarrow \text{Aut}(N)$ 是真正的群作用. 第三条则退化为通常的 2-上闭链条件 **Prop. 2.9**. 当 N 非 Abel 时, c 一般不是群同态, 而只是模掉内自同构后成为群同态. 因此非 Abel 核扩张不能只用 ω_2 描述, 而必须用二元组 (c, ω_2) 描述, 这个二元组在此称为 **广义 2-上闭链**, 记作 $z^2(Q, N)$.

Proposition 2.11. 设 $1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$ 是群扩张. 令 $s, s' : Q \rightarrow G$ 是两个规范化截面. 则存在唯一映射 $\alpha_1 : Q \rightarrow N$, $\alpha_1(e_Q) = e_N$, 使得 $s'(q) = \alpha_1(q)s(q)$. 若 s 对应的广义 2-上闭链为 (c, ω_2) , s' 对应的广义 2-上闭链为 (c', ω'_2) , 则 $c'_q = \text{Inn}(\alpha_1(q)) \circ c_q$, 且

$$\omega'_2(q_1, q_2) = \alpha_1(q_1)c_{q_1}(\alpha_1(q_2))\omega_2(q_1, q_2)\alpha_1(q_1 q_2)^{-1}.$$

Proof. 因为 $s'(q)$ 与 $s(q)$ 都落在同一个纤维 $\pi^{-1}(q)$ 中, 所以 $s'(q)s(q)^{-1} \in \ker \pi = N$. 因而存在唯一 $\alpha_1(q) \in N$ 使得 $s'(q) = \alpha_1(q)s(q)$. 由 $s'(e_Q) = s(e_Q) = e_G$ 得 $\alpha_1(e_Q) = e_N$.

对任意 $n \in N$,

$$c'_q(n) = s'(q)ns'(q)^{-1} = \alpha_1(q)s(q)ns(q)^{-1}\alpha_1(q)^{-1} = \text{Inn}(\alpha_1(q))(c_q(n)).$$

因此 $c'_q = \text{Inn}(\alpha_1(q)) \circ c_q$. 再计算 ω'_2 . 一方面

$$\begin{aligned} s'(q_1)s'(q_2) &= \alpha_1(q_1)s(q_1)\alpha_1(q_2)s(q_2) \\ &= \alpha_1(q_1)c_{q_1}(\alpha_1(q_2))s(q_1)s(q_2) = \alpha_1(q_1)c_{q_1}(\alpha_1(q_2))\omega_2(q_1, q_2)s(q_1 q_2). \end{aligned}$$

另一方面

$$s'(q_1)s'(q_2) = \omega'_2(q_1, q_2)s'(q_1 q_2) = \omega'_2(q_1, q_2)\alpha_1(q_1 q_2)s(q_1 q_2).$$

比较 N 部分, 得 $\omega'_2(q_1, q_2) = \alpha_1(q_1)c_{q_1}(\alpha_1(q_2))\omega_2(q_1, q_2)\alpha_1(q_1 q_2)^{-1}$. $\square$

2.5. 群扩张

Definition 2.20 [上同调的广义 2-上闭链 (cohomologous generalized 2-cocycles)]. 设 $(c, \omega_2), (c', \omega'_2) \in z^2(Q, N)$. 若存在映射 $\alpha_1 : Q \rightarrow N$, $\alpha_1(e_Q) = e_N$, 使得 $c'_q = \text{Inn}(\alpha_1(q)) \circ c_q$, 且

$$\omega'_2(q_1, q_2) = \alpha_1(q_1)c_{q_1}(\alpha_1(q_2))\omega_2(q_1, q_2)\alpha_1(q_1q_2)^{-1},$$

则称 (c, ω_2) 与 (c', ω'_2) 是上同调等价的, 记作 $(c, \omega_2) \sim (c', \omega'_2)$. 商集 $h^2(Q, N) := z^2(Q, N)/\sim$ 称为 Q 取值于 N 的 **2-上同调集**.

Note. 一般而言, $h^2(Q, N)$ 只是集合, 不是群. 这是非 *Abel* 核扩张与 *Abel* 核扩张的关键差别之一. 因此这里使用小写符号 $h^2(Q, N)$, 而不是 $H^2(Q, N)$.

Definition 2.21 [扩张类 (extension classes)]. 记 $\text{Ext}(Q, N)$ 为所有形如 $1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$ 的群扩张的等价类集合.

我们的最终目标是剖析 $\text{Ext}(Q, N)$ 的结构, 下面的定理将我们的研究重心等价地转移到对 $h^2(Q, N)$ 的研究:

Theorem 2.8 [Schreier–Morandi 分类定理 (Schreier–Morandi classification theorem)]. 对任意群 N, Q , 存在自然双射

$$\text{Ext}(Q, N) \longleftrightarrow h^2(Q, N).$$

换言之, 核 N 商 Q 的群扩张等价类由规范化广义 2-上闭链上同调等价类完全分类.

为了证明这个定理, 我们将先研究一些准备命题.

Proposition 2.12. 设 $(c, \omega_2) \in z^2(Q, N)$. 在集合 $N \times Q$ 上定义乘法

$$(n_1, q_1)(n_2, q_2) := (n_1c_{q_1}(n_2)\omega_2(q_1, q_2), q_1q_2).$$

则 $N \times Q$ 在此乘法下构成群, 记为 $N \rtimes_{c, \omega_2} Q$. 并且

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i} N \rtimes_{c, \omega_2} Q \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$$

是群扩张, 其中 $i(n) = (n, e_Q)$, $\pi(n, q) = q$.

Chapter 2. 对群的操作

Proof. 只说明结合律, 其余群公理可直接验证. 一方面

$$((n_1, q_1)(n_2, q_2))(n_3, q_3) = (n_1 c_{q_1}(n_2) \omega_2(q_1, q_2) c_{q_1 q_2}(n_3) \omega_2(q_1 q_2, q_3), q_1 q_2 q_3).$$

另一方面

$$\begin{aligned} (n_1, q_1)((n_2, q_2)(n_3, q_3)) &= (n_1 c_{q_1}(n_2 c_{q_2}(n_3) \omega_2(q_2, q_3)) \omega_2(q_1, q_2 q_3), q_1 q_2 q_3) \\ &= (n_1 c_{q_1}(n_2)(c_{q_1} \circ c_{q_2})(n_3) c_{q_1}(\omega_2(q_2, q_3)) \omega_2(q_1, q_2 q_3), q_1 q_2 q_3). \end{aligned}$$

由 **Lem. 2.2** 第一式,

$$(c_{q_1} \circ c_{q_2})(n_3) = \omega_2(q_1, q_2) c_{q_1 q_2}(n_3) \omega_2(q_1, q_2)^{-1}.$$

代入右侧, 得到

$$n_1 c_{q_1}(n_2) \omega_2(q_1, q_2) c_{q_1 q_2}(n_3) \omega_2(q_1, q_2)^{-1} c_{q_1}(\omega_2(q_2, q_3)) \omega_2(q_1, q_2 q_3).$$

再由 **Lem. 2.2** 第三式

$$\omega_2(q_1, q_2) \omega_2(q_1 q_2, q_3) = c_{q_1}(\omega_2(q_2, q_3)) \omega_2(q_1, q_2 q_3),$$

可知左右两种乘法结果相同. 因此乘法结合. 单位元为 (e_N, e_Q) . 逆元可由方程 $(n, q)(x, q^{-1}) = (e_N, e_Q)$ 解得. 最后, i 是单射, π 是满射, 且

$$\ker \pi = \{(n, e_Q) : n \in N\} = \text{Im } i.$$

因此得到群扩张. □

Proposition 2.13. 若 $(c, \omega_2), (c', \omega'_2) \in z^2(Q, N)$ 且 $(c, \omega_2) \sim (c', \omega'_2)$, 则由它们构造出的扩张 $N \rtimes_{c, \omega_2} Q$ 与 $N \rtimes_{c', \omega'_2} Q$ 是等价的.

Proof. 设等价由规范化映射 $\alpha_1 : Q \rightarrow N$ 给出. 定义 $\Phi : N \rtimes_{c, \omega_2} Q \rightarrow N \rtimes_{c', \omega'_2} Q$, $\Phi(n, q) = (n \alpha_1(q)^{-1}, q)$. 因为 $\alpha_1(e_Q) = e_N$, 所以 $\Phi(n, e_Q) = (n, e_Q)$, 即 Φ 在核 N 上为恒等. 又因为 Φ 不改变第二坐标, 所以它兼容到 Q 的投射.

由 **Def. 2.20**, $c'_q = \text{Inn}(\alpha_1(q)) \circ c_q$ 以及

$$\omega'_2(q_1, q_2) = \alpha_1(q_1) c_{q_1}(\alpha_1(q_2)) \omega_2(q_1, q_2) \alpha_1(q_1 q_2)^{-1},$$

直接代入可验证

$$\Phi((n_1, q_1)(n_2, q_2)) = \Phi(n_1, q_1) \Phi(n_2, q_2).$$

因此 Φ 是群同构, 且给出两个扩张的等价. □

2.5. 群扩张

我们现在可以给出 Schreier–Morandi 定理 Thm. 2.8 的证明:

Proof. 从某扩张和规范化集合截面出发, 根据 Lem. 2.2 得到广义 2-上闭链 (c, ω_2) . 由 Prop. 2.11, 改变规范化截面只会改变其等价类, 因此得到良定义映射 $\text{Ext}(Q, N) \rightarrow h^2(Q, N)$.

反过来, 从 $(c, \omega_2) \in z^2(Q, N)$ 出发, 根据 Prop. 2.12 构造扩张 $N \rtimes_{c, \omega_2} Q$. 等价的广义 2-上闭链给出等价扩张, 因此得到良定义映射 $h^2(Q, N) \rightarrow \text{Ext}(Q, N)$.

两个映射互为逆. 具体地, 从 (c, ω_2) 构造出的扩张 $N \rtimes_{c, \omega_2} Q$ 有自然的规范化截面 $s(q) = (e_N, q)$, 它重新诱导出的广义 2-上闭链正是原来的 (c, ω_2) . 另一方面, 若从扩张 G 出发得到 (c, ω_2) , 再构造 $N \rtimes_{c, \omega_2} Q$, 则映射 $N \rtimes_{c, \omega_2} Q \rightarrow G, (n, q) \mapsto ns(q)$ 给出扩张等价. 因此二者自然双射.

下面详细证明这两个映射互为逆. 为了表达清晰, 这里的嵌入映射 i 不省略书写. 记 $\alpha : \text{Ext}(Q, N) \rightarrow h^2(Q, N)$ 为从扩张和规范化集合截面抽取广义 2-上闭链等价类的映射, 记 $\beta : h^2(Q, N) \rightarrow \text{Ext}(Q, N)$ 为从广义 2-上闭链构造扩张的映射.

先证 $\alpha \circ \beta = \text{id}_{h^2(Q, N)}$. 任取 $[(c, \omega_2)] \in h^2(Q, N)$. 由 β 构造出的扩张为

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i} N \rtimes_{c, \omega_2} Q \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1,$$

其中 $i(n) = (n, e_Q)$, $\pi(n, q) = q$, 且 $N \rtimes_{c, \omega_2} Q$ 的乘法为

$$(n_1, q_1)(n_2, q_2) = (n_1 c_{q_1}(n_2) \omega_2(q_1, q_2), q_1 q_2).$$

在这个扩张中取自然的规范化集合截面 $s : Q \rightarrow N \rtimes_{c, \omega_2} Q, s(q) = (e_N, q)$. 由 α 重新抽取广义 2-上闭链, 记为 $(\tilde{c}, \tilde{\omega}_2)$.

首先计算 $\tilde{c}_q$. 对任意 $n \in N$, 截面 s 诱导出 $i(\tilde{c}_q(n)) = s(q)i(n)s(q)^{-1}$. 在 $N \rtimes_{c, \omega_2} Q$ 中, 群乘法的定义给出,

$$s(q)i(n) = (e_N, q)(n, e_Q) = (c_q(n), q).$$

因为 $s(q)i(n)s(q)^{-1}$ 是 $(c_q(n), q)(e_N, q)^{-1}$ 的结果, 其第二坐标为 e_Q ; 另一方面, 从群乘法本身也可看出 $s(q)i(n) = i(c_q(n))s(q)$. 因此 $s(q)i(n)s(q)^{-1} = i(c_q(n))$, 从而 $\tilde{c}_q = c_q$.

再计算 $\tilde{\omega}_2$. 按截面定义,

$$s(q_1)s(q_2) = i(\tilde{\omega}_2(q_1, q_2))s(q_1 q_2).$$

但由 $N \rtimes_{c, \omega_2} Q$ 的乘法,

$$s(q_1)s(q_2) = (e_N, q_1)(e_N, q_2) = (\omega_2(q_1, q_2), q_1 q_2).$$

又

$$i(\omega_2(q_1, q_2))s(q_1 q_2) = (\omega_2(q_1, q_2), e_Q)(e_N, q_1 q_2) = (\omega_2(q_1, q_2), q_1 q_2).$$

因此 $\tilde{\omega}_2(q_1, q_2) = \omega_2(q_1, q_2)$. 所以由 $\beta([(c, \omega_2)])$ 再经 α 得到的等价类仍然是 $[(c, \omega_2)]$. 即 $\alpha \circ \beta = \text{id}_{h^2(Q, N)}$.

Chapter 2. 对群的操作

再证 $\beta \circ \alpha = \text{id}_{\text{Ext}(Q, N)}$. 任取一个扩张等价类

$$\left[1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1 \right] \in \text{Ext}(Q, N).$$

取规范化集合截面 $s: Q \rightarrow G$, $\pi \circ s = \text{id}_Q$, $s(e_Q) = e_G$. 将 i 识别为嵌入. 由该截面得到广义 2-上闭链 (c, ω_2) , 其中 $c_q(n) = s(q)ns(q)^{-1}$, 且 $s(q_1)s(q_2) = \omega_2(q_1, q_2)s(q_1q_2)$. 再由 β 构造扩张

$$1 \rightarrow N \rightarrow N \rtimes_{c, \omega_2} Q \rightarrow Q \rightarrow 1.$$

我们要证明这个新扩张与原扩张等价. 定义映射 $\Phi: N \rtimes_{c, \omega_2} Q \rightarrow G$, $\Phi(n, q) = ns(q)$. 先证 Φ 是双射. 任取 $g \in G$, 令 $q = \pi(g)$. 则

$$\pi\left(gs(q)^{-1}\right) = \pi(g)\pi(s(q))^{-1} = qq^{-1} = e_Q,$$

所以 $gs(q)^{-1} \in \ker \pi = N$. 因而存在 $n \in N$ 使得 $g = ns(q)$. 这说明 Φ 满. 若 $\Phi(n_1, q_1) = \Phi(n_2, q_2)$, 即 $n_1s(q_1) = n_2s(q_2)$, 对两边作用 π , 得 $q_1 = q_2$. 记公共值为 q . 于是 $n_1s(q) = n_2s(q)$, 右乘 $s(q)^{-1}$ 得 $n_1 = n_2$. 所以 Φ 单. 因此 Φ 是集合双射.

再证 Φ 是群同态. 对任意 $(n_1, q_1), (n_2, q_2) \in N \rtimes_{c, \omega_2} Q$, 一方面

$$\Phi((n_1, q_1)(n_2, q_2)) = \Phi(n_1c_{q_1}(n_2)\omega_2(q_1, q_2), q_1q_2) = n_1c_{q_1}(n_2)\omega_2(q_1, q_2)s(q_1q_2).$$

另一方面

$$\Phi(n_1, q_1)\Phi(n_2, q_2) = n_1s(q_1)n_2s(q_2) = n_1s(q_1)n_2s(q_1)^{-1}s(q_1)s(q_2) = n_1c_{q_1}(n_2)\omega_2(q_1, q_2)s(q_1q_2).$$

两式相等, 故 Φ 是群同态. 既然 Φ 也是双射, 所以 Φ 是群同构.

最后检查 Φ 给出扩张等价. 对任意 $n \in N$,

$$\Phi(i(n)) = \Phi(n, e_Q) = ns(e_Q) = n,$$

即 Φ 在核 N 上为恒等. 对任意 $(n, q) \in N \rtimes_{c, \omega_2} Q$,

$$\pi(\Phi(n, q)) = \pi(ns(q)) = \pi(n)\pi(s(q)) = e_Q q = q.$$

这说明 Φ 兼容到商群 Q 的投射. 因此有交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N \rtimes_{c, \omega_2} Q & \longrightarrow & Q \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \sim \downarrow \Phi & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & G & \longrightarrow & Q \longrightarrow 1. \end{array}$$

所以由原扩张经 α 再经 β 得到的扩张与原扩张等价. 即 $\beta \circ \alpha = \text{id}_{\text{Ext}(Q, N)}$.

综上, α 与 β 互为逆映射, 从而得到自然双射 $\text{Ext}(Q, N) \longleftrightarrow h^2(Q, N)$. □

2.5. 群扩张

从 Lem. 2.2 第一式

$$c_{q_1} \circ c_{q_2} = \text{Inn}(\omega_2(q_1, q_2)) \circ c_{q_1 q_2}$$

可知, 虽然 $c : Q \rightarrow \text{Aut}(N)$ 一般不是群同态, 但模去内自同构后, 它会成为真正的群同态.

Proposition 2.14. 每个群扩张 $1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$ 自然诱导一个群同态 $\bar{c} : Q \rightarrow \text{Out}(N)$. 若 $s : Q \rightarrow G$ 是任意规范化集合截面, 且 $c_q(n) = s(q)ns(q)^{-1}$, 则

$$\bar{c}(q) = c_q \text{Inn}(N) \in \text{Out}(N).$$

该定义与集合截面 s 的选择无关.

Proof. 由 Lem. 2.2 第一式,

$$c_{q_1} \circ c_{q_2} = \text{Inn}(\omega_2(q_1, q_2)) \circ c_{q_1 q_2}.$$

在 $\text{Out}(N)$ 中, 内自同构变为平凡元, 因而 $\bar{c}(q_1)\bar{c}(q_2) = \bar{c}(q_1 q_2)$. 所以 $\bar{c}$ 是群同态.

若改变截面, 则 $c'_q = \text{Inn}(\alpha_1(q)) \circ c_q$. 因此 c'_q 与 c_q 在 $\text{Out}(N)$ 中有相同的像. 故 $\bar{c}$ 与截面选择无关. $\square$

Definition 2.22 [外作用 (outer action), 抽象核 (abstract kernel)]. 给定群 N, Q , 一个群同态 $\theta : Q \rightarrow \text{Out}(N)$ 称为 Q 在 N 上的外作用, 这样的外作用也常称为一个抽象核.

Proposition 2.15. 设 $\theta : Q \rightarrow \text{Out}(N)$ 是外作用. 则 θ 自然诱导群同态 $\theta_Z : Q \rightarrow \text{Aut}(Z(N))$.

Proof. 对 $q \in Q$, 取任意自同构 $c_q \in \text{Aut}(N)$ 代表外自同构类 $\theta(q)$. 若换取另一个代表 $c'_q = \text{Inn}(n) \circ c_q$, 则对任意 $z \in Z(N)$, $c'_q(z) = nc_q(z)n^{-1} = c_q(z)$, 因为 $c_q(z) \in Z(N)$. 因此 c_q 在 $Z(N)$ 上的限制不依赖代表元. 这给出良定义的作用 $\theta_Z(q)(z) = c_q(z)$. $\square$

符号 $\text{Map}(A, B)$ 意谓「从 A 到 B 的映射」, 此处所提到的映射系指集合层面.

Definition 2.23 [群上同调 (group cohomology)]. 设 Q 是群, M 是 Abel 群, 并且给定群作用 $c : Q \rightarrow \text{Aut}(M)$ 并把 $c(q)(m)$ 简写为 $q \cdot m$. 对 $n \geq 0$, 定义 n -上链群为 $C^n(Q, M) := \text{Map}(Q^n, M)$. 这里 Q^0 只含一个空元, 因而 $C^0(Q, M) \cong M$. 定义上边缘算

Chapter 2. 对群的操作

子 $d^n : C^n(Q, M) \rightarrow C^{n+1}(Q, M)$: 对 $f \in C^n(Q, M)$,

$$(d^n f)(q_1, \dots, q_{n+1}) := q_1 \cdot f(q_2, \dots, q_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(q_1, \dots, q_i q_{i+1}, \dots, q_{n+1}) \\ + (-1)^{n+1} f(q_1, \dots, q_n).$$

则 $d^{n+1} \circ d^n = 0$. 定义 $Z^n(Q, M) := \ker d^n$ 为 n -上闭链群, 定义 $B^n(Q, M) := \operatorname{im} d^{n-1}$ 为 n -上边缘群, 并约定 $B^0(Q, M) = 0$. 群 Q 系数在 M 的 n -上调群定义为

$$H^n(Q, M) := Z^n(Q, M) / B^n(Q, M).$$

首先说明 $C^n(Q, M)$ 确实是 Abel 群. 因为 M 是 Abel 群, 所以在 $C^n(Q, M) = \operatorname{Map}(Q^n, M)$ 上可以逐点定义加法:

$$(f + g)(q_1, \dots, q_n) := f(q_1, \dots, q_n) + g(q_1, \dots, q_n).$$

零元为常值零映射 $0(q_1, \dots, q_n) = 0_M$, 逆元为

$$(-f)(q_1, \dots, q_n) = -f(q_1, \dots, q_n).$$

结合律、交换律、零元和逆元性质都由 M 中相应性质逐点得到. 因此 $C^n(Q, M)$ 是 Abel 群. 再说明 d^n 是 Abel 群同态. 任取 $f, g \in C^n(Q, M)$, 对任意 $(q_1, \dots, q_{n+1}) \in Q^{n+1}$, 有

$$d^n(f + g)(q_1, \dots, q_{n+1}) \\ = q_1 \cdot (f + g)(q_2, \dots, q_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i (f + g)(q_1, \dots, q_i q_{i+1}, \dots, q_{n+1}) \\ + (-1)^{n+1} (f + g)(q_1, \dots, q_n).$$

由于 $q_1 \cdot -$ 是 M 的群自同构, 故

$$q_1 \cdot (f(q_2, \dots, q_{n+1}) + g(q_2, \dots, q_{n+1})) = q_1 \cdot f(q_2, \dots, q_{n+1}) + q_1 \cdot g(q_2, \dots, q_{n+1}).$$

其余各项也按逐点加法展开. 因而 $d^n(f + g) = d^n f + d^n g$. 所以 $d^n : C^n(Q, M) \rightarrow C^{n+1}(Q, M)$ 是 Abel 群同态. 于是 $Z^n(Q, M) = \ker d^n$ 是 $C^n(Q, M)$ 的子群. 又因为 d^n 是群同态且 $d^{n+1} \circ d^n = 0$, 所以

$$B^{n+1}(Q, M) = \operatorname{im} d^n \subseteq \ker d^{n+1} = Z^{n+1}(Q, M).$$

因此 $H^n(Q, M) = Z^n(Q, M) / B^n(Q, M)$ 定义良好. 上边缘算子满足 $d^{n+1} \circ d^n = 0$ 的性质不是十分显然, 下面给出证明:

2.5. 群扩张

Proof. 为证明 $d^{n+1}d^n = 0$, 我们把 d^n 写成若干上面算子 (coface operator) 的交错和.

$$D_i^n : C^n(Q, M) \rightarrow C^{n+1}(Q, M), \quad 0 \leq i \leq n+1.$$

对 $f \in C^n(Q, M)$, 定义

$$(D_0^n f)(q_1, \dots, q_{n+1}) = q_1 \cdot f(q_2, \dots, q_{n+1}),$$

$$(D_{n+1}^n f)(q_1, \dots, q_{n+1}) = f(q_1, \dots, q_n),$$

以及当 $1 \leq i \leq n$ 时,

$$(D_i^n f)(q_1, \dots, q_{n+1}) = f(q_1, \dots, q_i q_{i+1}, \dots, q_{n+1}).$$

于是 $d^n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i D_i^n$.

这些余面算子满足单纯形恒等式

$$D_r^{n+1} D_s^n = D_s^{n+1} D_{r-1}^n, \quad 0 \leq s < r \leq n+2. \quad (2.2)$$

等式两侧都是把 q_r, q_{r+1} 和 q_s, q_{s+1} 映射为 $q_r q_{r+1}$ 和 $q_s q_{s+1}$. 现在计算:

$$d^{n+1} d^n = \left(\sum_{r=0}^{n+2} (-1)^r D_r^{n+1} \right) \left(\sum_{s=0}^{n+1} (-1)^s D_s^n \right) = \sum_{r=0}^{n+2} \sum_{s=0}^{n+1} (-1)^{r+s} D_r^{n+1} D_s^n.$$

将指标分成两类: $s < r$ 和 $r \leq s$. 因此

$$d^{n+1} d^n = \sum_{0 \leq s < r \leq n+2} (-1)^{r+s} D_r^{n+1} D_s^n + \sum_{0 \leq r \leq s \leq n+1} (-1)^{r+s} D_r^{n+1} D_s^n.$$

注意第二个和式中自动有 $r \leq n+1$, 因为 $s \leq n+1$.

对第一个和式使用单纯形恒等式 (2.2), 于是

$$\sum_{0 \leq s < r \leq n+2} (-1)^{r+s} D_r^{n+1} D_s^n = \sum_{0 \leq s < r \leq n+2} (-1)^{r+s} D_s^{n+1} D_{r-1}^n.$$

令 $i = s, j = r-1$. 由于 $s < r$, 得 $i \leq j$; 又因为 $0 \leq s$ 且 $r \leq n+2$, 得 $0 \leq i \leq j \leq n+1$. 并且 $(-1)^{r+s} = (-1)^{j+1+i} = -(-1)^{i+j}$. 因此第一个和式变为

$$\sum_{0 \leq s < r \leq n+2} (-1)^{r+s} D_r^{n+1} D_s^n = - \sum_{0 \leq i \leq j \leq n+1} (-1)^{i+j} D_i^{n+1} D_j^n.$$

Chapter 2. 对群的操作

而第二个和式直接令 $i = r, j = s$, 得

$$\sum_{0 \leq r \leq s \leq n+1} (-1)^{r+s} D_r^{n+1} D_s^n = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n+1} (-1)^{i+j} D_i^{n+1} D_j^n.$$

所以

$$d^{n+1} d^n = - \sum_{0 \leq i \leq j \leq n+1} (-1)^{i+j} D_i^{n+1} D_j^n + \sum_{0 \leq i \leq j \leq n+1} (-1)^{i+j} D_i^{n+1} D_j^n = 0.$$

□

Lemma 2.3. 设给定映射 $c : Q \rightarrow \text{Aut}(N)$, $q \mapsto c_q$, $\omega_2 : Q \times Q \rightarrow N$, 满足 $c_{q_1} \circ c_{q_2} = \text{Inn}(\omega_2(q_1, q_2)) \circ c_{q_1 q_2}$. 定义

$$z_3(q_1, q_2, q_3) := \omega_2(q_1, q_2) \omega_2(q_1 q_2, q_3) \cdot (c_{q_1}(\omega_2(q_2, q_3)) \omega_2(q_1, q_2 q_3))^{-1}.$$

则 $z_3(q_1, q_2, q_3) \in Z(N)$. 并且若 Q 在 $Z(N)$ 上的作用定义为 $q \cdot z := c_q(z)$, $q \in Q, z \in Z(N)$, 则 z_3 是 $Z(N)$ -值 3-上闭链, 即 $dz_3 = 1, z_3 \in Z^3(Q, Z(N))$.

Proof. 为了简化记号, 记 $\omega_{i,j} := \omega_2(q_i, q_j)$, $\omega_{ij,k} := \omega_2(q_i q_j, q_k)$, $\omega_{i,jk} := \omega_2(q_i, q_j q_k)$. 同时记 $c_i := c_{q_i}$, $c_{ij} := c_{q_i q_j}$. 首先证明中心性. 由假设有 $c_i c_j = \text{Inn}(\omega_{i,j}) c_{ij}$. 考虑三重复合 $c_1 c_2 c_3$. 一方面,

$$(c_1 c_2) c_3 = \text{Inn}(\omega_{1,2}) c_{12} c_3 = \text{Inn}(\omega_{1,2}) \text{Inn}(\omega_{12,3}) c_{123} = \text{Inn}(\omega_{1,2} \omega_{12,3}) c_{123}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} c_1 (c_2 c_3) &= c_1 \text{Inn}(\omega_{2,3}) c_{23} = \text{Inn}(c_1(\omega_{2,3})) c_1 c_{23} \\ &= \text{Inn}(c_1(\omega_{2,3})) \text{Inn}(\omega_{1,23}) c_{123} = \text{Inn}(c_1(\omega_{2,3}) \omega_{1,23}) c_{123}. \end{aligned}$$

由于自同构复合本身满足结合律, 所以 $(c_1 c_2) c_3 = c_1 (c_2 c_3)$. 因此

$$\text{Inn}(\omega_{1,2} \omega_{12,3}) c_{123} = \text{Inn}(c_1(\omega_{2,3}) \omega_{1,23}) c_{123}.$$

右乘 c_{123}^{-1} , 得到 $\text{Inn}(\omega_{1,2} \omega_{12,3}) = \text{Inn}(c_1(\omega_{2,3}) \omega_{1,23})$. 于是 $\omega_{1,2} \omega_{12,3} (c_1(\omega_{2,3}) \omega_{1,23})^{-1} \in \ker(\text{Inn})$. 但 $\ker(\text{Inn} : N \rightarrow \text{Aut}(N)) = Z(N)$, 所以 $z_3(q_1, q_2, q_3) \in Z(N)$. 另, 我们可以把上面的结果记作

$$\frac{(c_1 c_2) c_3}{c_1 (c_2 c_3)} = \text{Inn}(z_{1,2,3}), \quad z_{1,2,3} = \omega_{1,2} \omega_{12,3} [c_1(\omega_{2,3}) \omega_{1,23}]^{-1}. \quad (2.3)$$

2.5. 群扩张

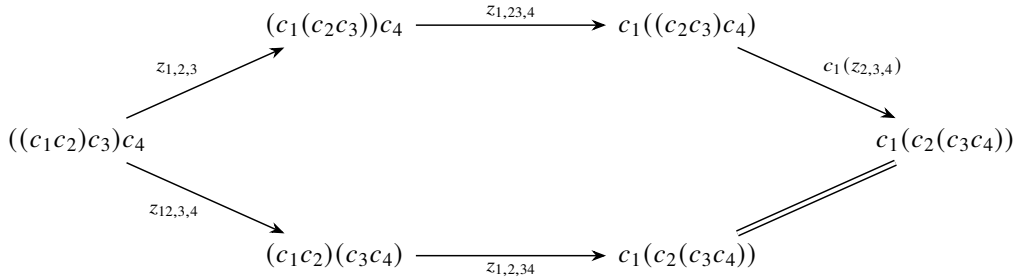
接着证明 z_3 是 3-上闭链. 由中心性, z_3 可以看成 $z_3 \in C^3(Q, Z(N))$. 在乘法记号下, 群上同调的上边缘算子给出

$$\begin{aligned} (dz_3)(q_1, q_2, q_3, q_4) &= c_{q_1}(z_3(q_2, q_3, q_4)) \\ &\quad \cdot z_3(q_1 q_2, q_3, q_4)^{-1} \\ &\quad \cdot z_3(q_1, q_2 q_3, q_4) \\ &\quad \cdot z_3(q_1, q_2, q_3 q_4)^{-1} \\ &\quad \cdot z_3(q_1, q_2, q_3). \end{aligned}$$

因而要证明 $dz_3 = 1$, 注意这里 $Z(N)$ 是 *Abel* 群, 故等价于证明

$$c_{q_1}(z_3(q_2, q_3, q_4)) z_3(q_1, q_2 q_3, q_4) z_3(q_1, q_2, q_3) = z_3(q_1 q_2, q_3, q_4) z_3(q_1, q_2, q_3 q_4).$$

这个等式来自四重复合 $c_{q_1} c_{q_2} c_{q_3} c_{q_4}$ 的五边形结合律. 具体地说, $z_3(q_i, q_j, q_k)$ 记录的是三重复合 $(c_{q_i} c_{q_j}) c_{q_k}$ 与 $c_{q_i}(c_{q_j} c_{q_k})$ 之间的偏差. 对四重复合, 有两条从 $((c_{q_1} c_{q_2}) c_{q_3}) c_{q_4}$ 到 $c_{q_1}(c_{q_2}(c_{q_3} c_{q_4}))$ 的重括号路径.



第一条路径先移动最左边的三重括号, 再移动中间的三重括号, 最后移动最右边的三重括号, 因此产生的偏差为

$$z_3(q_1, q_2, q_3) z_3(q_1, q_2 q_3, q_4) c_{q_1}(z_3(q_2, q_3, q_4)).$$

第二条路径先把 $q_1 q_2$ 与 q_3, q_4 重括号, 再把 q_1, q_2 与 $q_3 q_4$ 重括号, 因此产生的偏差为

$$z_3(q_1 q_2, q_3, q_4) z_3(q_1, q_2, q_3 q_4).$$

由于自同构复合严格满足结合律, 这两条路径必须给出相同结果. 所以

$$z_3(q_1, q_2, q_3) z_3(q_1, q_2 q_3, q_4) c_{q_1}(z_3(q_2, q_3, q_4)) = z_3(q_1 q_2, q_3, q_4) z_3(q_1, q_2, q_3 q_4).$$

又因为所有 z_3 的值都属于 $Z(N)$, 故它们可以交换顺序. 于是得到

$$c_{q_1}(z_3(q_2, q_3, q_4)) z_3(q_1, q_2 q_3, q_4) z_3(q_1, q_2, q_3) = z_3(q_1 q_2, q_3, q_4) z_3(q_1, q_2, q_3 q_4),$$

即 $dz_3 = 1$. 因此 z_3 是 Q 取值于 $Z(N)$ 的 3-上闭链. □

Chapter 2. 对群的操作

Lemma 2.4. 给定外作用 $\theta : Q \rightarrow \text{Out}(N)$. 对 θ 选择任意一组代表 $c_q \in \text{Aut}(N)$ 和元素 $\omega_2(q_1, q_2) \in N$, 使得

$$c_{q_1} c_{q_2} = \text{Inn}(\omega_2(q_1, q_2)) c_{q_1 q_2}.$$

由此构造的 $z_3 \in Z^3(Q, Z(N))$,

$$z_3(q_1, q_2, q_3) := \omega_2(q_1, q_2) \omega_2(q_1 q_2, q_3) \cdot (c_{q_1}(\omega_2(q_2, q_3)) \omega_2(q_1, q_2 q_3))^{-1},$$

其上同调类 $[z_3] \in H^3(Q, Z(N))$ 与代表 c_q 和元素 $\omega_2(q_1, q_2)$ 的选择无关.

Proof. 设由两组辅助选择 (c, ω_2) , (c', ω'_2) 得到的 3-上闭链分别为 z_3 和 z'_3 . 我们证明 $[z'_3] = [z_3] \in H^3(Q, Z(N))$.

第一步: 固定 c , 只改变 ω_2 . 假设 $c' = c$, 但 ω'_2 是另一组满足

$$c_{q_1} c_{q_2} = \text{Inn}(\omega_2(q_1, q_2)) c_{q_1 q_2} = \text{Inn}(\omega'_2(q_1, q_2)) c_{q_1 q_2}$$

的选择. 则 $\text{Inn}(\omega'_2(q_1, q_2)) = \text{Inn}(\omega_2(q_1, q_2))$. 因此

$$\eta(q_1, q_2) := \omega'_2(q_1, q_2) \omega_2(q_1, q_2)^{-1} \in Z(N).$$

于是存在中心值 2-上链 $\eta : Q \times Q \rightarrow Z(N)$ 使得 $\omega'_2(q_1, q_2) = \eta(q_1, q_2) \omega_2(q_1, q_2)$. 为简化记号, 写 $\eta_{i,j} := \eta(q_i, q_j)$, $\eta_{ij,k} := \eta(q_i q_j, q_k)$, $\eta_{i,j,k} := \eta(q_i, q_j q_k)$. 直接代入 z_3 的定义, 得

$$\begin{aligned} z'_3(q_1, q_2, q_3) &= \omega'_2(q_1, q_2) \omega'_2(q_1 q_2, q_3) (c_{q_1}(\omega'_2(q_2, q_3)) \omega'_2(q_1, q_2 q_3))^{-1} \\ &= \eta_{1,2} \omega_{1,2} \eta_{12,3} \omega_{12,3} (c_1(\eta_{2,3} \omega_{2,3}) \eta_{1,23} \omega_{1,23})^{-1}. \end{aligned}$$

由于 η 取值于 $Z(N)$, 且 $c_1(\eta_{2,3}) \in Z(N)$, 这些中心项可以交换, 因而 $z'_3 = z_3 \eta_{1,2} \eta_{12,3} \eta_{1,23}^{-1} c_1(\eta_{2,3})^{-1}$. 另一方面, 乘法记号下 2-上链 η 的上边缘为 $(d\eta)(q_1, q_2, q_3) = c_1(\eta_{2,3}) \eta_{12,3}^{-1} \eta_{1,23} \eta_{1,2}^{-1}$. 因而 $z'_3 = z_3 (d\eta)^{-1}$. 所以 z'_3 与 z_3 相差一个 3-上边缘, 从而 $[z'_3] = [z_3] \in H^3(Q, Z(N))$.

第二步: 改变代表 c . 现在考虑一般情形. 因为 c_q 与 c'_q 代表同一个外自同构类 $\theta(q) \in \text{Out}(N)$, 所以存在映射 $\alpha : Q \rightarrow N$ 使得 $c'_q = \text{Inn}(\alpha(q)) \circ c_q$. 先用 α 从 (c, ω_2) 构造一组与 c' 相容的修正因子:

$$\omega_2^\alpha(q_1, q_2) := \alpha(q_1) c_{q_1}(\alpha(q_2)) \omega_2(q_1, q_2) \alpha(q_1 q_2)^{-1}.$$

直接计算可得 $c'_{q_1} c'_{q_2} = \text{Inn}(\omega_2^\alpha(q_1, q_2)) c'_{q_1 q_2}$. 记由 (c', ω_2^α) 构造出的 3-上闭链为 z_3^α . 我们先说明 $z_3^\alpha = z_3$.

2.5. 群扩张

仍采用简写 $\alpha_i = \alpha(q_i)$, $\alpha_{ij} = \alpha(q_i q_j)$, $\omega_{i,j} = \omega_2(q_i, q_j)$. 有 $\omega_{1,2}^\alpha = \alpha_1 c_1(\alpha_2) \omega_{1,2} \alpha_{12}^{-1}$, $\omega_{12,3}^\alpha = \alpha_{12} c_{12}(\alpha_3) \omega_{12,3} \alpha_{123}^{-1}$. 因此

$$\omega_{1,2}^\alpha \omega_{12,3}^\alpha = \alpha_1 c_1(\alpha_2) \omega_{1,2} c_{12}(\alpha_3) \omega_{12,3} \alpha_{123}^{-1}.$$

另一方面, 因为 $c'_1 = \text{Inn}(\alpha_1) c_1$, 有

$$\begin{aligned} c'_1(\omega_{2,3}^\alpha) \omega_{1,23}^\alpha &= \alpha_1 c_1 \left(\alpha_2 c_2(\alpha_3) \omega_{2,3} \alpha_{23}^{-1} \right) \alpha_1^{-1} \cdot \alpha_1 c_1(\alpha_{23}) \omega_{1,23} \alpha_{123}^{-1} \\ &= \alpha_1 c_1(\alpha_2) (c_1 c_2)(\alpha_3) c_1(\omega_{2,3}) \omega_{1,23} \alpha_{123}^{-1}. \end{aligned}$$

又由 $c_1 c_2 = \text{Inn}(\omega_{1,2}) c_{12}$ 得 $(c_1 c_2)(\alpha_3) = \omega_{1,2} c_{12}(\alpha_3) \omega_{1,2}^{-1}$. 于是

$$c'_1(\omega_{2,3}^\alpha) \omega_{1,23}^\alpha = \alpha_1 c_1(\alpha_2) \omega_{1,2} c_{12}(\alpha_3) \omega_{1,2}^{-1} c_1(\omega_{2,3}) \omega_{1,23} \alpha_{123}^{-1}.$$

因此

$$\begin{aligned} z_{1,2,3}^\alpha &= \alpha_1 c_1(\alpha_2) \omega_{1,2} c_{12}(\alpha_3) \omega_{12,3} \left(\omega_{1,2}^{-1} c_1(\omega_{2,3}) \omega_{1,23} \right)^{-1} c_{12}(\alpha_3)^{-1} \omega_{1,2}^{-1} c_1(\alpha_2)^{-1} \alpha_1^{-1} \\ &= \alpha_1 c_1(\alpha_2) \omega_{1,2} c_{12}(\alpha_3) \omega_{1,2}^{-1} z_{1,2,3} \omega_{1,2} c_{12}(\alpha_3)^{-1} \omega_{1,2}^{-1} c_1(\alpha_2)^{-1} \alpha_1^{-1} \end{aligned}$$

中间括号正是 $z_{1,2,3}$ 的共轭形式. 更直接地整理可得 $z_{1,2,3}^\alpha = B z_{1,2,3} B^{-1}$, $B = \alpha_1 c_1(\alpha_2) \omega_{1,2} c_{12}(\alpha_3)$. 但由 [Lem. 2.3](#) 已知 $z_3(q_1, q_2, q_3) \in Z(N)$, 故 $B z_{1,2,3} B^{-1} = z_{1,2,3}$. 所以 $z_3^\alpha = z_3$.

最后, 对同一个 c' 而言, 原先给定的 ω'_2 与 ω_2^α 都满足 $c'_{q_1} c'_{q_2} = \text{Inn}(\cdot) c'_{q_1 q_2}$. 因此二者只相差一个中心值 2-上链. 也就是说, 存在 $\eta: Q \times Q \rightarrow Z(N)$ 使得 $\omega'_2(q_1, q_2) = \eta(q_1, q_2) \omega_2^\alpha(q_1, q_2)$. 由第一步, 由 (c', ω'_2) 得到的 z'_3 与由 (c', ω_2^α) 得到的 z_3^α 只相差一个 3-上边缘. 而 $z_3^\alpha = z_3$, 因此

$$[z'_3] = [z_3^\alpha] = [z_3] \in H^3(Q, Z(N)).$$

综上, $[z_3]$ 与代表 c_q 和元素 $\omega_2(q_1, q_2)$ 的选择无关. □

Theorem 2.9 [??]. 设给定外作用 $\theta: Q \rightarrow \text{Out}(N)$. 则存在唯一上同调类 $\zeta_\theta \in H^3(Q, Z(N))$, 称为 θ 的**扩张障碍**. 存在诱导外作用 θ 的群扩张 $1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$ 当且仅当 $\zeta_\theta = 1$.

Proof. 对每个 $q \in Q$, 选择一个 $c_q \in \text{Aut}(N)$ 代表 $\theta(q) \in \text{Out}(N)$. 因为 θ 是群同态, 所以 $c_{q_1} \circ c_{q_2}$ 与 $c_{q_1 q_2}$ 在 $\text{Out}(N)$ 中相同. 因而存在 $\omega_2(q_1, q_2) \in N$ 使得

$$c_{q_1} \circ c_{q_2} = \text{Inn}(\omega_2(q_1, q_2)) \circ c_{q_1 q_2}.$$

Chapter 2. 对群的操作

但是这样的 (c, ω_2) 未必满足 [Lem. 2.2](#) 第三式. 定义

$$z_3(q_1, q_2, q_3) := \omega_2(q_1, q_2)\omega_2(q_1q_2, q_3) \cdot (c_{q_1}(\omega_2(q_2, q_3))\omega_2(q_1, q_2q_3))^{-1}.$$

欲满足第三式, 上式应该是平凡的, z_3 衡量了距离平凡的程度. 由 [Lem. 2.3](#), $z_3(q_1, q_2, q_3) \in Z(N)$, 且 z_3 是 Q 取值于 $Z(N)$ 的 3-上闭链即 $z_3 \in Z^3(Q, Z(N))$. 给定 θ 后, 需要选择 c 和 ω_2 , 因为它们的任意选择导致 z_3 可能不平凡, 但是 z_3 只会出现在一个 3-上同调等价类中 ([Lem. 2.4](#)), 这个类就是 $\zeta_\theta = [z_3] \in H^3(Q, Z(N))$.

若 $\zeta_\theta = 1$, 则可以通过调整 ω_2 消去 z_3 , 使得

$$\omega_2(q_1, q_2)\omega_2(q_1q_2, q_3) = c_{q_1}(\omega_2(q_2, q_3))\omega_2(q_1, q_2q_3),$$

从而得到真正的广义 2-上闭链, 继而由 [Prop. 2.12](#) 构造扩张.

反之, 若扩张存在, 则其诱导出的 (c, ω_2) 已经满足广义 2-上闭链条件, 因而 z_3 为平凡上闭链, 所以 $\zeta_\theta = 1$. □

Definition 2.24. 记 $\text{Ext}_\theta(Q, N) \subseteq \text{Ext}(Q, N)$ 为所有诱导给定外作用 $\theta : Q \rightarrow \text{Out}(N)$ 的扩张等价类组成的子集.

Theorem 2.10. 设给定外作用 $\theta : Q \rightarrow \text{Out}(N)$. 若扩张阻碍 $\zeta_\theta \in H^3(Q, Z(N))$ 不平凡, 则 $\text{Ext}_\theta(Q, N) = \emptyset$. 若 $\zeta_\theta = 1$ 平凡, 则 $\text{Ext}_\theta(Q, N)$ 非空, 并且在选定基准扩张后, 有自然双射

$$\text{Ext}_\theta(Q, N) \longleftrightarrow H^2(Q, Z(N)).$$

更准确地说, $\text{Ext}_\theta(Q, N)$ 是 $H^2(Q, Z(N))$ 上的一个主齐性空间.

Proof. 若 ζ_θ 不平凡, 则由 [Thm. 2.9](#) 知不存在诱导外作用 θ 的扩张, 因而 $\text{Ext}_\theta(Q, N) = \emptyset$. 下面设 $\zeta_\theta = 1$. 由 [Thm. 2.9](#), 存在诱导外作用 θ 的扩张. 等价地, 存在规范化广义 2-上闭链 $(c, \omega_2) \in z^2(Q, N)$ 诱导外作用 θ . 固定这样一组 (c, ω_2) 作为基准.

由于 (c, ω_2) 诱导外作用 θ , 所以 c 在中心 $Z(N)$ 上给出 Q -作用 $q \cdot z := c_q(z)$, $z \in Z(N)$. 因此可以定义普通 *Abel* 系数群上同调 $H^2(Q, Z(N))$. 现在取中心值规范化 2-上闭链 $\eta \in Z^2(Q, Z(N))$. 定义 $\omega_2^\eta(q_1, q_2) := \eta(q_1, q_2)\omega_2(q_1, q_2)$. 我们先说明 (c, ω_2^η) 仍是诱导同一个外作用 θ 的规范化广义 2-上闭链.

首先, 因为 $\eta(q_1, q_2) \in Z(N)$, 所以 $\text{Inn}(\omega_2^\eta(q_1, q_2)) = \text{Inn}(\omega_2(q_1, q_2))$. 因此

$$c_{q_1}c_{q_2} = \text{Inn}(\omega_2^\eta(q_1, q_2))c_{q_1q_2}.$$

2.5. 群扩张

所以外作用没有改变. 其次, 检查广义 2-上闭链的结合条件. 由定义,

$$\omega_2^\eta(q_1, q_2)\omega_2^\eta(q_1q_2, q_3) = \eta(q_1, q_2)\eta(q_1q_2, q_3)\omega_2(q_1, q_2)\omega_2(q_1q_2, q_3).$$

又因为 (c, ω_2) 是广义 2-上闭链, 有 $\omega_2(q_1, q_2)\omega_2(q_1q_2, q_3) = c_{q_1}(\omega_2(q_2, q_3))\omega_2(q_1, q_2q_3)$. 另一方面, $\eta \in Z^2(Q, Z(N))$ 意味着

$$\eta(q_1, q_2)\eta(q_1q_2, q_3) = c_{q_1}(\eta(q_2, q_3))\eta(q_1, q_2q_3).$$

由于 η 取值于 $Z(N)$, 可以与 ω_2 项交换. 于是得到

$$\begin{aligned}\omega_2^\eta(q_1, q_2)\omega_2^\eta(q_1q_2, q_3) &= c_{q_1}(\eta(q_2, q_3)\omega_2(q_2, q_3))\eta(q_1, q_2q_3)\omega_2(q_1, q_2q_3) \\ &= c_{q_1}(\omega_2^\eta(q_2, q_3))\omega_2^\eta(q_1, q_2q_3).\end{aligned}$$

因此 (c, ω_2^η) 确实是规范化广义 2-上闭链.

由 *Prop. 2.12*, 它给出一个扩张 $N \rtimes_{c, \omega_2^\eta} Q$. 于是我们得到一个作用

$$Z^2(Q, Z(N)) \times \text{Ext}_\theta(Q, N) \longrightarrow \text{Ext}_\theta(Q, N),$$

在基准扩张处写为 $\eta \cdot [N \rtimes_{c, \omega_2} Q] := [N \rtimes_{c, \omega_2^\eta} Q]$.

接下来说明这个作用只依赖于 $[\eta] \in H^2(Q, Z(N))$. 若 $\eta' = (d\beta)\eta$ 其中 $\beta: Q \rightarrow Z(N)$ 是规范化 1-上链, 依据 *Def. 2.23*, 则 $\eta'(q_1, q_2) = \beta(q_1)c_{q_1}(\beta(q_2))\eta(q_1, q_2)\beta(q_1q_2)^{-1}$. 因此

$$\omega_2^{\eta'}(q_1, q_2) = \eta'(q_1, q_2)\omega_2(q_1, q_2) = \beta(q_1)c_{q_1}(\beta(q_2))\omega_2^\eta(q_1, q_2)\beta(q_1q_2)^{-1}.$$

因为 $\beta(q) \in Z(N)$, 有 $\text{Inn}(\beta(q)) \circ c_q = c_q$. 所以根据广义 2-上闭链的上同调等价定义 *Def. 2.20*, $(c, \omega_2^\eta) \sim (c, \omega_2^{\eta'})$. 于是二者给出等价扩张. 因此作用下降为 $H^2(Q, Z(N)) \curvearrowright \text{Ext}_\theta(Q, N)$.

下面证明该作用是传递的. 设 $E' \in \text{Ext}_\theta(Q, N)$ 是任意一个诱导同一外作用 θ 的扩张. 取规范化截面, 得到对应的广义 2-上闭链 (c', ω_2') . 因为 (c, ω_2) 与 (c', ω_2') 诱导同一个外作用 θ , 对每个 $q \in Q$ 存在 $\alpha(q) \in N$ 使得 $c'_q = \text{Inn}(\alpha(q)) \circ c_q$. 由 α 将 (c, ω_2) 变换为与 c' 相容的

$$\omega_2^\alpha(q_1, q_2) = \alpha(q_1)c_{q_1}(\alpha(q_2))\omega_2(q_1, q_2)\alpha(q_1q_2)^{-1}.$$

则 $c'_{q_1}c'_{q_2} = \text{Inn}(\omega_2^\alpha(q_1, q_2))c'_{q_1q_2}$. 由于 ω_2' 与 ω_2^α 都给出同一个 $\text{Inn}(\cdot)$, 它们相差一个中心值 2-上链. 即存在 $\eta: Q \times Q \rightarrow Z(N)$ 使得 $\omega_2'(q_1, q_2) = \eta(q_1, q_2)\omega_2^\alpha(q_1, q_2)$. 因为 (c', ω_2') 与 (c', ω_2^α) 都满足广义 2-上闭链条件, 代入两者的结合条件可得 $d\eta = 1$. 因而 $\eta \in Z^2(Q, Z(N))$. 此外, (c, ω_2^η) 经由 α 变换后正得到 (c', ω_2') . 所以 $(c, \omega_2^\eta) \sim (c', \omega_2')$. 因此 E' 等价于 $[\eta]$ 作用在基准扩张上的结果. 这说明作用是传递的.

Chapter 2. 对群的操作

最后证明作用是自由的. 若 $[\eta] \cdot [N \rtimes_{c, \omega_2} Q] = [N \rtimes_{c, \omega_2} Q]$, 则 $(c, \omega_2^\eta) \sim (c, \omega_2)$. 因为两边的 c 相同, 上同调等价中出现的映射 $\beta: Q \rightarrow N$ 必须满足 $\text{Inn}(\beta(q)) \circ c_q = c_q$. 因而 $\text{Inn}(\beta(q)) = \text{id}_N$, 即 $\beta(q) \in Z(N)$. 等价公式于是变为

$$\omega_2^\eta(q_1, q_2) = \beta(q_1)c_{q_1}(\beta(q_2))\omega_2(q_1, q_2)\beta(q_1q_2)^{-1}.$$

也就是说 $\eta(q_1, q_2) = \beta(q_1)c_{q_1}(\beta(q_2))\beta(q_1q_2)^{-1} = (d\beta)(q_1, q_2)$. 所以 $[\eta] = 1 \in H^2(Q, Z(N))$. 这说明作用是自由的.

综上, 当 $\zeta_\theta = 1$ 时, $H^2(Q, Z(N))$ 自由且传递地作用在 $\text{Ext}_\theta(Q, N)$ 上. 因此 $\text{Ext}_\theta(Q, N)$ 是 $H^2(Q, Z(N))$ 上的一个主齐性空间. 选定基准扩张 $[N \rtimes_{c, \omega_2} Q]$ 后, 得到双射

$$H^2(Q, Z(N)) \longrightarrow \text{Ext}_\theta(Q, N), \quad [\eta] \longmapsto [N \rtimes_{c, \eta\omega_2} Q].$$

□

总结一般核群扩张的分类方案: 设 N, Q 是群, 不要求 N 为 Abel 群. 分类核为 N , 商为 Q 的群扩张

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$$

可按如下步骤进行:

- 计算外自同构群 $\text{Out}(N) = \text{Aut}(N)/\text{Inn}(N)$.
- 枚举外作用 $\theta: Q \rightarrow \text{Out}(N)$.
- 对每个 θ , 由其在 $Z(N)$ 上诱导的作用计算 $H^3(Q, Z(N))$.
- 计算障碍类 $\zeta_\theta \in H^3(Q, Z(N))$. 若 $\zeta_\theta \neq 1$, 则不存在诱导外作用 θ 的扩张.
- 若 $\zeta_\theta = 1$, 则诱导外作用 θ 的扩张存在. 选某基准扩张后, 所有这样的扩张由 $H^2(Q, Z(N))$ 分类.
- 给定代表元, 可通过集合 $N \times Q$ 上的乘法 $(n_1, q_1)(n_2, q_2) = (n_1c_{q_1}(n_2)\omega_2(q_1, q_2), q_1q_2)$ 显式构造扩张群.

当 N 是 Abel 群时, 有 $Z(N) = N$ 且 $\text{Inn}(N) = 1$, 因而 $\text{Out}(N) = \text{Aut}(N)$. 这时外作用就是普通作用 $Q \rightarrow \text{Aut}(N)$. 此外, 非 Abel 情形中的 $H^3(Q, Z(N))$ 障碍在 Abel 核情形中自动消失, 所以固定作用下的扩张直接由 $H^2(Q, N)$ 分类. 因此一般核扩张理论确实是 Abel 核扩张理论的推广.

References of this chapter

- [陈王李 24] 陈猛, 王庆雪, and 李志远. 《抽象代数》. 1st. 上海, 中国: 复旦大学出版社, 2024, p. 175.
- [戚陶 26] 戚扬 and 陶瑞宝. 《固体物理中的对称性和拓扑》. Lecture notes. Version dated 2026-03-02. 2026.
- [Zha17] C. Zhang. “[Classifying Group Extensions with Not Necessarily Abelian Kernel](#)”. Bachelor’s thesis. Universität Stuttgart, June 26, 2017.
- [Bro82] K. S. Brown. [Cohomology of Groups](#). Graduate Texts in Mathematics 87. New York: Springer, 1982. isbn: 978-0-387-90688-1.

3

对群的进一步讨论

Contents

3.1	Sylow 定理.....	85
3.2	群的可解性.....	87
3.3	有限生成 Abel 群.....	89
3.4	Krull-Schmidt 定理.....	93
3.5	自由群.....	100

3.1 Sylow 定理

群的阶和其结构有什么联系? 对这个问题的回答, 最重要的莫过于 Sylow 定理.

Definition 3.1 [Sylow p -子群 (Sylow p -group)]. 设有限群 G 的阶为 $|G| = p^r s$, 其中 p 是素数, $r, s \in \mathbb{N}_+$, $p \nmid s$, 则 G 中的极大 p -子群, 即阶 p^r 的子群, 称作 G 的 Sylow p -子群.

Theorem 3.1 [Sylow 定理 (Sylow's theorem)]. 设 G 为有限群, $|G| = p^r s$, 其中 p 是素数, $r, s \in \mathbb{N}_+$, $p \nmid s$, 则

- **第一定理:** G 存在 p^l 阶子群, $1 \leq l \leq r$; 特别地, G 中存在 Sylow p -子群;
- **第二定理:** G 的任一 p -子群必含于某个 Sylow p -子群且 G 中任意两个 Sylow p -子群互相共轭;
- **第三定理:** 设 n_p 是 G 中 Sylow p -子群的个数, 则 $n_p \equiv 1 \pmod{p}$ 且 $n_p \mid s$; 设 P 是一个 Sylow p -子群, 则 $n_p = [G : N_G(P)]$.

Remark. 第一定理取 $l = 1$ 时, 也称为 **Cauchy 定理 (Cauchy's theorem)**: 设 p 是素数, 群 G 的阶可

* Chapter 3. 对群的进一步讨论

以被 p 整除, 则 G 中含 p 阶元.

Proof. 先证当 $l = r$ 时的结论, 即 G 中存在 Sylow p -子群. 令 $\Gamma = \{A \subseteq G \mid |A| = p^r\}$. 则 $|\Gamma| = C_{p^r s}^{p^r}$. 由

$$\binom{p^r s}{p^r} = \frac{p^r s (p^r s - 1) \cdots (p^r s - p^r + 1)}{p^r!} \equiv s \pmod{p},$$

可知 $|\Gamma| \equiv s \not\equiv 0 \pmod{p}$. 群 G 左乘作用于 Γ : 对任意 $g \in G, A \in \Gamma$, 定义

$$g \cdot A := gA = \{ga \mid a \in A\}.$$

取一条轨道 $\mathcal{O} = G \cdot A$, 记其稳定子为

$$H = \text{Stab}_G(A) = \{g \in G \mid gA = A\}.$$

由轨道-稳定子定理 ??, $|\mathcal{O}| = [G : H]$. 另一方面, 对任意 $h \in H$ 有 $hA = A$, 故 $HA = A$. 于是 A 是 H 的一些左陪集之并, 从而 $|H| \mid |A| = p^r$. 故 $|H| = p^d$ 对某个 $0 \leq d \leq r$ 成立, 于是 $|\mathcal{O}| = [G : H] = p^{r-d}s$. 因此每条轨道的长度都形如 $p^{r-d}s$.

现在把 Γ 分解为各条轨道的不交并. 由于 $|\Gamma| \not\equiv 0 \pmod{p}$, 不可能每条轨道长度都被 p 整除; 故至少存在一条轨道满足 $p \nmid |\mathcal{O}|$. 于是必有 $d = r$, 从而 $|H| = p^r$. 于是 H 是 G 的一个 p^r 阶子群, 即一个 Sylow p -子群.

接着证明 $n_p \equiv 1 \pmod{p}$. 仍考虑上述作用. 设轨道中恰有 m 条满足长度等于 s , 其余轨道长度都被 p 整除. 由上面的分析, 轨道长度等于 s 当且仅当其稳定子阶为 p^r .

对这样一条轨道 $\mathcal{O} = G \cdot A$, 若 $e \in A$, 则对任意 $h \in H = \text{Stab}_G(A)$, 有 $h = he \in hA = A$, 故 $H \subseteq A$. 又 $|H| = |A| = p^r$, 故 $H = A$, 从而 A 本身就是一个 Sylow p -子群. 而同一轨道中其余元素都形如 gA , 它们一般不含单位元, 因而不可能是子群. 所以每条长度为 s 的轨道中恰有一个 Sylow p -子群.

反过来, 任一 Sylow p -子群 P 本身属于 Γ , 且其稳定子就是 P 自身: 因为若 $gP = P$, 则 $g \in P$. 故其轨道长度为 $[G : P] = s$. 所以长度为 s 的轨道个数 m 恰好就是 Sylow p -子群个数 n_p .

于是由轨道分解 $|\Gamma| = n_p s + p \cdot (\text{某整数})$, 模 p 化简得 $|\Gamma| \equiv n_p s \pmod{p}$. 又前面已知 $|\Gamma| \equiv s \pmod{p}$, 故 $(n_p - 1)s \equiv 0 \pmod{p}$. 因为 $p \nmid s$, 得 $n_p \equiv 1 \pmod{p}$.

现在固定一个 Sylow p -子群 P , 设 $S = \{gPg^{-1} \mid g \in G\}$ 为与 P 共轭的所有子群之集合. G 以共轭作用于 S , 且该作用显然可迁. 其上点 P 的稳定子为 $\text{Stab}_G(P) = N_G(P)$. 因此由轨道-稳定子定理, $|S| = [G : N_G(P)]$. 又由于 $P \leq N_G(P)$, 故 $[G : N_G(P)] \mid [G : P] = s$. 于是 $|S| \mid s$.

下面证明任一 p -子群都包含于某个共轭于 P 的子群中. 设 $K \leq G$ 是任意 p -子群. 令 K 以共轭作用于 S . 由于 $|S|$ 整除 s , 故 $p \nmid |S|$. 另一方面, 在 p -群作用下, 每条轨道的长度都是 p 的幂; 因而若所有轨道长度都大于 1, 则它们都被 p 整除, 从而总大小也会被 p 整除, 矛盾. 故存在不动点 $Q \in S$, 使得 $kQk^{-1} = Q, \forall k \in K$. 这就是说 $K \leq N_G(Q)$. 又 $Q \leq N_G(Q)$, 所以 KQ 是子群, 且 $KQ/Q \cong K/(K \cap Q)$. 故 KQ/Q 是 p -群, 从而 $|KQ|$ 也是 p 的幂. 但 Q 已是 p^r 阶子群, 所以只能有 $KQ = Q$. 故 $K \leq Q$. 于是任意 p -子群都包含于某个与 P 共轭的 Sylow p -子群中.

3.2. 群的可解性

特别地, 若 K 本身也是 Sylow p -子群, 则由 $K \leq Q$ 且 $|K| = |Q| = p^r$, 得 $K = Q$. 所以任意 Sylow p -子群都与 P 共轭. 这说明 S 恰是 G 的全体 Sylow p -子群组成的集合, 从而 $n_p = |S| = [G : N_G(P)]$, 并且 $n_p \mid s$.

至此, 第二、第三定理都已证得. 最后证第一定理对一般 l 成立. 取一个 Sylow p -子群 P , 则 $|P| = p^r$. 由于有限 p -群具有阶为 p^l 的子群, 对每个 $1 \leq l \leq r$ 都存在 $P_l \leq P$ 使得 $|P_l| = p^l$. 因此 P_l 也是 G 的子群, 从而 G 中存在 p^l 阶子群. $\square$

上述证明蕴含了这样的结论: G 的任一 p -子群都包含于某个 Sylow p -子群中; 如果 $m = 1$, 那么这个唯一的 Sylow p -子群恰为 G 的正规子群, 这样的群 G 一定不是单群.

3.2 群的可解性

Definition 3.2 [合成群列 (composition series)]. 设 G 是群, 如果其子群序列 $\{G_i\}$ 满足

$$\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G,$$

那么称 $\{G_i\}_{i=0}^n$ 为 G 的一个长度为 n 的正规群列. 对任意 $i = 1, \dots, n$, G_i/G_{i-1} 称为该群列的商因子. 进一步, 如果对任意 $i > 0$, G_i/G_{i-1} 是单群, 那么称 $\{G_i\}$ 为 G 的合成群列.

我们来看一些例子:

- 设 $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$, 则 $\{0\} \trianglelefteq \mathbb{Z}_2 \trianglelefteq G$ 和 $\{0\} \trianglelefteq \mathbb{Z}_3 \trianglelefteq G$ 都是 G 的合成群列. 在这个例子中, 我们看到两个合成群列的商因子组均为 $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$.
- $\mathbb{Z}$ 的子群都形如 $m\mathbb{Z}$, $m \geq 0$, 除非 $m = 0$, 它们都同构于 $\mathbb{Z}$, 故 $\mathbb{Z}$ 无合成群列.
- 任意有限群 G 都有合成群列. 事实上, 依次取上一级群的极大正规子群即可.

Theorem 3.2 [Jordan-Hölder 定理 (Jordan-Hölder theorem)]. 设 G 为有限群, 且有两个不同的合成群列:

$$\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_r = G,$$

$$\{e\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_s = G.$$

则 $r = s$, 且存在 $\sigma \in S_r$, 对任意 $i > 0$, 有

$$G_i/G_{i-1} \cong H_{\sigma(i)}/H_{\sigma(i)-1}.$$

* Chapter 3. 对群的进一步讨论

Proof. 如果合成群列 $\{G_i\}$, $\{H_j\}$ 满足定理所述性质, 那么称这两个合成群列等价。下面我们对 $|G|$ 作归纳。当 $|G| = 1$ 时定理显然成立。设 $|G| > 1$, 则 $r \geq 1, s \geq 1$ 。

若 $G_{r-1} = H_{s-1}$, 则 $G/G_{r-1} = G/H_{s-1}$, 对 G_{r-1} 用归纳假设即得。可设 $G_{r-1} \neq H_{s-1}$ 。因为它们都是 G 的极大正规子群, G_{r-1} 和 H_{s-1} 必然互不包含。而 $G_{r-1}H_{s-1} \trianglelefteq G$, 故

$$G_{r-1} \subsetneq G_{r-1}H_{s-1} = G, \quad H_{s-1} \subsetneq G_{r-1}H_{s-1} = G.$$

令 $K = G_{r-1} \cap H_{s-1}$, 由第二同构定理 [Cor. 2.1](#),

$$G/G_{r-1} \cong H_{s-1}/K, \quad G/H_{s-1} \cong G_{r-1}/K.$$

特别地, $|K| < |G|$ 。取 K 的一个正规群列

$$\{e\} = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_m = K,$$

则 G 至少有下列 4 个正规群列:

$$(1) \quad \{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_{r-2} \trianglelefteq G_{r-1} \trianglelefteq G,$$

$$(2) \quad \{e\} = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_m \trianglelefteq G_{r-1} \trianglelefteq G,$$

$$(3) \quad \{e\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{s-2} \trianglelefteq H_{s-1} \trianglelefteq G,$$

$$(4) \quad \{e\} = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_m \trianglelefteq H_{s-1} \trianglelefteq G.$$

对 G_{r-1} 和 H_{s-1} 运用归纳假设知: (1) 与 (2), (3) 与 (4) 等价。又已证 (2) 与 (4) 等价。故 (1) 与 (3) 等价, 即 $r = s$ 且商因子组相同。 $\square$

Definition 3.3 [可解群 (solvable group)]. 设 G 是群, 如果 $\{G_i\}$ 是 G 的一个正规群列, 且其每个商因子均为 Abel 群, 那么称 G 为可解群, $\{G_i\}$ 为 G 的可解群列。

Example. 由定义可见群可解当且仅当导群列降至平凡, 从而 S_n 可解当且仅当 $n \leq 4$, 详见 [Thm. 1.5](#)。

Proposition 3.1. 有限可解群的合成群列的每个商因子都是素数阶循环群。

Proof. 设 G 是有限可解群, 取 G 的一组可解群列

$$\{e\} = N_0 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq N_t = G,$$

3.3. 有限生成 Abel 群

则对每个 $i > 1$, N_i/N_{i-1} 为 Abel 群。构造 N_i/N_{i-1} 的合成群列 $\{L_{i,j}\}_{j=0}^{n_i}$:

$$\{e\} = L_{i,0} \trianglelefteq L_{i,1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq L_{i,n_i} = N_i/N_{i-1}.$$

由子群对应定理, 上述合成群列诱导群列:

$$N_{i-1} = N_{i,0} \trianglelefteq N_{i,1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq N_{i,n_i} = N_i.$$

其中, 对每个 $j > 0$, $N_{i,j}/N_{i,j-1} = L_{i,j}/L_{i,j-1}$. 以上群列组合为 $\{G\}$ 的一个合成群列, 且每个商因子既是单群也是 Abel 群。根据 Sylow 定理 [Thm. 3.1](#), 有限 Abel 单群只能是素数阶循环群。□

3.3 有限生成 Abel 群

设 G 是有限生成 Abel 群¹, 定义 G 的**挠子群 (torsion subgroup)** 如下:

$$\text{Tor}(G) := \{a \in G \mid o(a) < \infty\}.$$

容易验证 $\text{Tor}(G)$ 确实是 G 的子群, 其中的元素称为**挠元 (torsion element)**.

Lemma 3.1. 设整数 $m_1, m_2, \dots, m_n$ 不全为 0 且 $\gcd(m_1, m_2, \dots, m_n) = 1$. 则存在矩阵 $M = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ 满足 $|M| = \pm 1$, 且对 $1 \leq j \leq n$, 都有 $a_{1j} = m_j$.

Proof. 对 n 用归纳法. $n = 1$ 时结论自然成立. 假设 $n > 1$, 若 $m_2 = \cdots = m_n = 0$, 则 $M = m_1 I_n$ 满足要求. 若 $m_2, \dots, m_n$ 不全为 0 且 $\gcd(m_2, \dots, m_n) = d$, 记 $q_j = \frac{m_j}{d}$, $2 \leq j \leq n$. 由归纳假设, 存在 $n-1$ 阶矩阵 $N = (b_{ij})$ 满足 $|N| = \pm 1$, 且 $b_{1,j-1} = q_j$, $2 \leq j \leq n$. 由条件知, m_1 和 d 互素, 故存在整数 $s, t \in \mathbb{Z}$ 使得 $sm_1 + td = 1$. 一个满足要求的矩阵 M 构造为

- $a_{1j} = m_j$, $1 \leq j \leq n$;
- $a_{21} = -t$, $a_{i1} = 0$, $2 < i \leq n$;
- $a_{2j} = sq_j$, $1 < j \leq n$;
- $a_{1+i,1+j} = b_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n-1$.

按第一列展开计算 $|M|$, 得 $|M| = (sm_1 + td)|N| = |N| = \pm 1$. □

¹有限生成的意思是生成元有限, 即存在有限多 $g_i \in G$ 使得任意的 $g \in G$ 均能写为 $g = \sum_i m_i g_i$ 的形式. 有限 Abel 群是有限生成 Abel 群.

* Chapter 3. 对群的进一步讨论

Proposition 3.2. 设 m, n 是正整数, 则 $\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Z}^m$ 当且仅当 $n = m$.

Proof. 只需证明必要性. 设 $\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Z}^m$, 则有群同态 $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m, g: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$ 使得复合映射 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 均为恒等映射. 设 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 的一组基, $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ 是 $\mathbb{Z}^m$ 的一组基. 记

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i, \quad a_{ij} \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq n;$$

$$g(v_j) = \sum_{i=1}^n b_{ij} u_i, \quad b_{ij} \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq m.$$

$A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ 分别是 $m \times n, n \times m$ 整数矩阵. 由 $f \circ g, g \circ f$ 是恒等映射, 我们有 $AB = I_m, BA = I_n$, 这里 I_m, I_n 分别表示 m 阶, n 阶单位矩阵.

设 $C = (c_{ij})$ 是一个 s 阶整数方阵, 我们定义 C 的迹 $\text{Tr } C = \sum_{i=1}^s c_{ii}$. 由直接计算得,

$$\text{Tr}(A \cdot B) = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n a_{lk} b_{kl} = \text{Tr}(B \cdot A).$$

故有 $m = \text{Tr}(I_m) = \text{Tr}(A \cdot B) = \text{Tr}(B \cdot A) = \text{Tr}(I_n) = n$. □

Theorem 3.3 [有限生成 Abel 群结构定理 (structure theorem for finitely generated abelian groups)]. 设 G 是有限生成 Abel 群, 则存在唯一的非负整数 n 满足下面的条件: 存在 G 的子群 $F \cong \mathbb{Z}^n$, 使得 G 有内直和分解

$$G = F \oplus \text{Tor}(G),$$

其中 F 称为 G 的自由部分, n 称为 G 的秩. 特别地, $\text{Tor}(G)$ 是有限 Abel 群.

Proof. 如果 G 是有限群, 我们可以设 $n = 0$ 且记 $\mathbb{Z}^0 = \{0\}$, 我们显然得出 $G = \text{Tor}(G)$, 故命题成立. 以下设 G 为无限群. 在任一个 Abel 群中, 子群都是正规群, 因而总可研究商群 $H := G/\text{Tor}(G)$, H 仍然是有限生成的 Abel 群. 设 $H = \langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$ 且生成元个数 n 最小. 我们有下列结论:

- H 的扭子群 $T(H)$ 平凡. 事实上, 任取 $a + \text{Tor}(G) \in T(H)$, 则存在整数 $t \neq 0$ 使 $ta \in \text{Tor}(G)$, 进而存在整数 $s \neq 0$ 使 $sta = 0$, 故 $a \in \text{Tor}(G)$, 即 $T(H)$ 中任意元素平凡.

3.3. 有限生成 Abel 群

- 我们可以看出 $g_1, g_2, \dots, g_n$ 是 H 的一组基, 从而 $H \cong \mathbb{Z}^n$. 假设存在不全为 0 的整数 $m_1, m_2, \dots, m_n$ 使 $\sum_{i=1}^n m_i g_i = 0$. 由第一条, 不妨设 $\gcd(m_1, m_2, \dots, m_n) = 1$. 由 **Lem. 3.1**, 存在矩阵 $M = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ 使得 $|M| = \pm 1$, 且 $a_{1j} = m_j$, $1 \leq j \leq n$. 由于 M 在 $M_n(\mathbb{Z})$ 中可逆,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^t = M \cdot (g_1, g_2, \dots, g_n)^t$$

也是一组生成元. 但 $x_1 = 0$, 从而 $H = \langle x_2, \dots, x_n \rangle$, 这与 n 的最小性矛盾.

- 对 $1 \leq i \leq n$, 取投影映射 $p : G \rightarrow H$ 下 g_i 的某个原像 y_i . 对任意 $x \in G$, 取 m_i 满足 $p(x) = \sum_{i=1}^n m_i g_i$, 则

$$t = x - \sum_{i=1}^n m_i y_i \in \text{Tor}(G)$$

为扭元素, 且 $x = t + \sum_{i=1}^n m_i y_i$. 如果有另一个表示 $x = t' + \sum_{i=1}^n m'_i y_i$, $t' \in \text{Tor}(G)$, $m'_i \in \mathbb{Z}$, 则

$$p\left(\sum_{i=1}^n (m_i - m'_i) y_i\right) = \sum_{i=1}^n (m_i - m'_i) g_i = 0,$$

因此, 对每个 i , $m_i = m'_i$, 也即 x 的上述表示法唯一.

- 令 F 为 G 中由 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 生成的子群, 则 $F \cong \mathbb{Z}^n$ 为自由 Abel 群. 由第三点的结论, G 是 F 和 $\text{Tor}(G)$ 的内直和.

最后, 我们需要证明 G 的分解的唯一性. 如果还有非负整数 m 满足: 存在 G 的子群 $F_1 \cong \mathbb{Z}^m$ 使得 G 有内直和分解 $G = F_1 \oplus \text{Tor}(G)$, 则有

$$\mathbb{Z}^n \cong F \cong G/\text{Tor}(G) \cong F_1 \cong \mathbb{Z}^m.$$

由 **Prop. 3.2**, $n = m$. 当然, 有限个扭元素生成的 Abel 群必有限, 故 $\text{Tor}(G) \cong G/F$ 为有限群. $\square$

Thm. 3.3 指出, 对有限生成 Abel 群的研究可转化为对有限 Abel 群的研究. 又由前文关于 Sylow 定理 **Thm. 3.1** 的讨论, 任何有限 Abel 群是其所有 Sylow 子群之内直和. 我们进而将研究重点放在有限 Abel p -群的研究上, 见下列定理.

Theorem 3.4. 设 p 为一个素数, A 为有限 Abel p -群. 则存在正整数 t , 正整数列 $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_t$ 及内直和分解 $A = \bigoplus_{i=1}^t A_i$, 其中 $A_i \cong \mathbb{Z}_{p^{l_i}}$, $1 \leq i \leq t$.

* Chapter 3. 对群的进一步讨论

Proof. 对 $|A| = p^r$ 作归纳, $r = 1$ 时结论自然成立. 设 $r > 1$, 取 A 中阶数最大的元素 a_1 , 设 $o(a_1) = p^{l_1}$, 记 $A_1 = \langle a_1 \rangle$. 当 A/A_1 为非平凡群时, 对 A/A_1 用归纳假设, 存在正整数 $l_2 \geq \cdots \geq l_t$ 及内直和分解 $A/A_1 = \bigoplus_{i=2}^t B_i$, 其中 $B_i \cong \mathbb{Z}_{p^{l_i}}$, $2 \leq i \leq t$. 记投影映射为 $\theta: A \rightarrow A/A_1$. 我们有下列结论:

- 对任意的 $2 \leq i \leq t$, 存在 $a_i \in A$ 使 $o(a_i) = p^{l_i}$ 且 $\theta(a_i)$ 是 B_i 的一个生成元. 事实上, 任取 B_i 的一个生成元 b_i 在 θ 下的原像. 设 $o(b_i) = p^k$, 则 $l_i \leq k \leq l_1$. 因 $p^{l_i} b_i \in A_1 = \langle a_1 \rangle$, 存在正整数 u , $1 \leq u \leq p^{l_1}$, 使得 $p^{l_i} b_i = ua_1$. 设 $u = p^\eta s$, 这里 $0 \leq \eta \leq l_1$ 是非负整数, s 是正整数且 $p \nmid s$. 由第一章习题 1.1 中的第 9 题, 我们有 $o(p^{l_i} b_i) = p^{k-l_i}$, $o(ua_1) = p^{l_1-\eta}$. 因此 $p^{k-l_i} = p^{l_1-\eta}$, 即 $k - l_i = l_1 - \eta$, $\eta = l_1 - k + l_i$. 令 $a_i = b_i - p^{l_1-k} sa_1$, 则有 $\theta(a_i) = \theta(b_i)$, 故 $\theta(a_i)$ 生成 B_i , 且 $p^{l_i} a_i = ua_1 - p^\eta sa_1 = 0$, 这表明 $o(a_i) \leq p^{l_i}$. 而我们总有 $o(a_i) \geq p^{l_i}$, 所以 $o(a_i) = p^{l_i}$.
- 令 $A_i = \langle a_i \rangle$, $1 \leq i \leq t$, 则 $A_i \cong \mathbb{Z}_{p^{l_i}}$. 考虑群同态 $\bigoplus_{i=1}^t A_i \rightarrow A$, $(x_1, x_2, \cdots, x_t) \mapsto \sum_{i=1}^t x_i$, 我们可证明这是群同构. 注意到

$$\left| \bigoplus_{i=1}^t A_i \right| = \prod_{i=1}^t p^{l_i} = |A_1| |A/A_1| = |A|,$$

只需证这是满射即可. 对任意 $x \in A$, 由 $\theta(a_i)$ 是 B_i 的生成元, 可取 $x_2, \cdots, x_t, x_i \in A_i$ 使得 $\theta(x) = \sum_{i=2}^t \theta(x_i)$, 从而 $x_1 = x - \sum_{i=2}^t x_i \in A_1$. 此即, 存在 $x_i \in A_i$, 使得 $x = \sum_{i=1}^t x_i$.

综上, 结论成立. □

Theorem 3.5 [有限 Abel 群标准分解定理 (structure theorem for finite abelian groups)].

设 A 为非零有限 Abel 群, 则存在唯一的正整数组 $(m, d_1, d_2, \cdots, d_m)$ 使得 A 有内直和分解

$A = \bigoplus_{i=1}^m A_i$, 其中 $A_i \cong \mathbb{Z}_{d_i}$, $1 < d_m \mid d_{m-1} \mid \cdots \mid d_1$.

Proof. 由 A 是非零有限 Abel 群, A 是它的所有 Sylow 子群 B_i 的内直和 ($1 \leq i \leq k$). 设 B_i 是 p_i -群, 取定理 9.4 中的分解 $B_i = \bigoplus_{j=1}^{t_i} B_{ij}$, 其中 $B_{ij} \cong \mathbb{Z}_{p_i^{l_{ij}}}$, $l_{i1} \geq l_{i2} \geq \cdots$. 令 $m = \max_i \{t_i\}$. 对 $1 \leq j \leq m$, 令 $A_j = \bigoplus_{i=1}^k B_{ij}$ (这里约定当 $j > t_i$ 时 $B_{ij} = 0$), 则可验证, 这组取法满足定理要求, 且 $d_j = \prod_{i=1}^k p_i^{l_{ij}}$.

3.4. Krull-Schmidt 定理

设 $(m, d_1, d_2, \dots, d_m)$ 和 $(n, c_1, c_2, \dots, c_n)$ 均为满足定理要求的两个整数列, 并设对应这两个整数列, A 有两种内直和分解:

$$A = \bigoplus_{i=1}^m A_i = \bigoplus_{i=1}^n \tilde{A}_i.$$

则 c_1 和 d_1 均为 A 中元素的阶的最大值, 当然 $c_1 = d_1$. 分别取 A 关于 $A_1, \tilde{A}_1$ 的商, 运用归纳法即可得到这两个整数列的一致性. $\square$

对于有限生成 Abel 群 G , 存在内直和分解 $G = N \oplus \text{Tor}(G)$, 其中 $N \cong \mathbb{Z}^n$ 为自由部分, 扭子群 $\text{Tor}(G)$ 为有限 Abel 群且它有标准分解式 $\text{Tor}(G) = \bigoplus A_i$, 其中 $A_i \cong \mathbb{Z}_{d_i}$, $1 < d_m \mid d_{m-1} \mid \dots \mid d_1$, 并且数组 $(m, d_1, d_2, \dots, d_m)$ 由 A 唯一确定.

3.4 Krull-Schmidt 定理

这一节我们在更大的一类群上进行分类. 群 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}_{p^n}$ 都是不可分解群, 所以有限生成 Abel 群结构定理也可以叙述为: 每个有限生成 Abel 群可以唯一地, 同构意义下, 表示为有限个不可分解群的直和. 那么是否在更广泛的群上也有这种唯一分解定理呢?

Definition 3.4 [不可分解群]. 称群 G 是不可分解群, 如果 $G \neq \{e\}$ 且 G 不能写成它的两个真子群的内直积.

定义等价于 $G \neq \{e\}$ 且

$$G \simeq H \times K \iff H = \{e\} \text{ 或 } K = \{e\}.$$

Example. 单群一定是不可分解群, 不可分解群不一定是单群. $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{p^n}, S_n$ 是不可分解群, 但不是单群.

Definition 3.5 [升链条件 (ascending chain condition), 降链条件 (descending chain condition)]. 称群 G 在正规子群上满足升链条件, 如果对每个 G 的正规子群链

$$G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \dots,$$

存在整数 n 使得 $G_i = G_n, \forall i \geq n$. 称群 G 在正规子群上满足降链条件, 如果对每个 G 的正规子群链

$$G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots,$$

存在整数 n 使得 $G_i = G_n, \forall i \geq n$.

* Chapter 3. 对群的进一步讨论

Example. 有限群满足升链条件, 降链条件. $\mathbb{Z}$ 满足升链条件, 不满足降链条件. $\mathbb{Z}(p^\infty) = \{a/b \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b = p^i, i \geq 0\}$ 满足降链条件, 不满足升链条件.

Theorem 3.6. 群 G 在正规子群上满足升链条件或降链条件, 则 G 是有限个不可分解群的直积.

Proof. 利用反证法. 若不然, 令

$$S = \{H \leq G \mid H \text{ 是直积因子, 且 } H \text{ 不是有限个不可分解群的直积}\}.$$

S 非空, 因为 $G \in S$. 若 $H \in S$, 则 H 可分解, 存在 H 的真子群 K_H, J_H 使得

$$H = K_H \times J_H = J_H \times K_H,$$

并且其中一个, 不妨为 $K_H \in S$. 令 $J: S \rightarrow S, H \mapsto K_H$. 由递归原理, 令 $f_n = f, \forall n \in \mathbb{N}$, 存在唯一的映射 $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow S$ 满足

$$\varphi(0) = G, \quad \varphi(n+1) = f(\varphi(n)) = K_{\varphi(n)} \quad (n \geq 0).$$

把 $\varphi(n)$ 记作 G_n , 就得到了正规子群列

$$G = G_0, G_1 = K_{G_0}, G_2 = K_{G_1}, \dots, G_{n+1} = K_{G_n}, \dots$$

根据构造, 有降链

$$G > G_1 > G_2 > G_3 > \dots$$

这与降链条件是矛盾的.

而

$$G = G_n \times J_{G_{n-1}} \times J_{G_{n-2}} \times \dots \times J_{G_0}, \quad G_i < G,$$

从而我们可以得到另一条升链

$$J_{G_0} < J_{G_1} \times J_{G_0} < J_{G_2} \times J_{G_1} \times J_{G_0} < \dots$$

与升链条件矛盾. □

下面来探究分解唯一性的条件.

Definition 3.6 [正规自同态 (normal endomorphism)]. 称群 G 的自同态 f 是正规的, 如果

$$af(b)a^{-1} = f(aba^{-1}), \quad \forall a, b \in G.$$

3.4. Krull-Schmidt 定理

Lemma 3.2. 群 G 在正规子群上满足升链条件 (降链条件), f 是一个 (正规) 自同态, 则 f 是自同构当且仅当 f 是满同态 (单同态).

Proof. 若 G 在正规子群上满足升链条件, f 是满同态. 考虑正规子群链

$$\{e\} < \text{Ker } f < \text{Ker } f^2 < \dots \quad (f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_k).$$

存在 n 使得 $\text{Ker } f^i = \text{Ker } f^n, \forall i \geq n$. f 满同态 $\Rightarrow f^n$ 满同态. 若 $a \in G, f(a) = e$, 则 $a = f^n(b)$, 对某个 $b \in G, e = f(a) = f^{n+1}(b)$, 即 $b \in \text{Ker } f^{n+1} = \text{Ker } f^n$, 从而 $a = f^n(b) = e$. 故 f 单同态, 所以 f 是同构.

若 G 在正规子群上满足降链条件, f 是单同态. 考虑正规子群的降链, $(\text{Im } f^k)$ 的正规性由 f 的正规性得到,

$$G > \text{Im } f > \text{Im } f^2 > \dots$$

存在 n 使得 $\text{Im } f^i = \text{Im } f^n, \forall i \geq n$. $\forall a \in G, f^n(a) = f^{n+1}(b)$, 对某个 $b \in G$. f 单同态 $\Rightarrow f^n$ 单同态, 于是

$$f^n(a) = f^n(f(b)) \Rightarrow a = f(b).$$

所以 f 满同态, 故 f 是同构. □

Lemma 3.3 [Fitting 引理 (Fitting's lemma)]. 群 G 在正规子群上满足升链条件和降链条件, f 是 G 的一个正规自同态, 则存在 $n \geq 1$ 使得

$$G = \text{Ker } f^n \times \text{Im } f^n.$$

Proof. 还是看上一个引理中的两个正规子群链, 存在 n 使得 $\text{Im } f^k = \text{Im } f^n, \text{Ker } f^k = \text{Ker } f^n, \forall k \geq n$. 下面检验内直积的两个条件.

设 $a \in \text{Ker } f^n \cap \text{Im } f^n$, 则 $a = f^n(b)$, 对某个 $b \in G$. 于是

$$f^{2n}(b) = f^n(f^n(b)) = f^n(a) = e,$$

故 $b \in \text{Ker } f^{2n} = \text{Ker } f^n$, 从而 $a = f^n(b) = e$. 因此 $\{e\} = \text{Ker } f^n \cap \text{Im } f^n$.

$\forall c \in G, f^n(c) \in \text{Im } f^n = \text{Im } f^{2n}$, 故 $f^n(c) = f^{2n}(d)$, 对某个 $d \in G$. 于是

$$f^n(c f^n(d^{-1})) = f^n(c) f^{2n}(d^{-1}) = e,$$

从而 $c f^n(d^{-1}) \in \text{Ker } f^n$. 又 $c = (c f^n(d^{-1})) f^n(d)$, 所以 $G = (\text{Ker } f^n)(\text{Im } f^n)$. 因此我们有 $G = \text{Ker } f^n \times \text{Im } f^n$. □

* Chapter 3. 对群的进一步讨论

Definition 3.7 [幂零自同态 (nilpotent endomorphism)]. 称群 G 的自同态 f 是**幂零的**, 如果存在 n 使得 $f^n(g) = e, \forall g \in G$.

Corollary 3.1. 不可分解群 G 在正规子群上满足升链条件和降链条件, f 是 G 的一个正规自同态, 则 f 或者是幂零的, 或者是自同构.

Proof. 由 Fitting 引理 **Lem. 3.3**, 存在 n 使得 $G = \text{Ker } f^n \times \text{Im } f^n$. G 不可分解 $\Rightarrow \text{Ker } f^n = \{e\}$ 或 $\text{Im } f^n = \{e\}$. $\square$

在群到自身的映射上定义加法:

$$f + g : G \rightarrow G, \quad a \mapsto f(a)g(a).$$

则群到自身的映射全体关于定义的加法构成一个群, 验证. f, g 是自同态并不能得到 $f + g$ 就是自同态, 所以自同态全体在加法下并不是一个子群.

Corollary 3.2. 不可分解群 G 在正规子群上满足升链条件和降链条件, 若 $f_1, \dots, f_n$ 是正规幂零自同态满足

$$f_{i_1} + \dots + f_{i_r} \quad (1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \leq n)$$

是自同态, 则 $f_1 + \dots + f_n$ 是幂零自同态.

Remark. 我们在 Krull-Schmidt 定理要用到这个定理, 写成逆否命题形式能更清楚地看出来是怎么用的:

$$f_i \text{ 是自同态 } (1 \leq i \leq n), f_1 + \dots + f_n \text{ 不是幂零的}$$

$\Rightarrow$ 若 f_i 是正规幂零的, 则存在

$$1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \leq n$$

使得

$$f_{i_1} + \dots + f_{i_r}$$

不是自同态. 若

$$f_{i_1} + \dots + f_{i_r} \quad (1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \leq n)$$

是自同态, 则存在 f_i 不是正规幂零的, 若是正规的, 则根据上面的引理是自同构.

3.4. Krull-Schmidt 定理

Proof. f, g 若是正规自同态, 且 $f+g$ 是自同态, 则 $f+g$ 是幂零的, 习题. 根据这个性质, $f_{i_1} + \dots + f_{i_r}$ 是正规的. 只要验证 $n=2$ 的情形, 归纳. 若 $f_1 + f_2$ 不是幂零的, 则是自同构. $g = (f_1 + f_2)^{-1}$ 是正规的, 验证. 若 $g_1 = f_1 g, g_2 = f_2 g$, 则 $1_G = g_1 + g_2$. 又因为

$$x^{-1} = (g_1 + g_2)(x^{-1}) = g_1(x^{-1})g_2(x^{-1}),$$

所以

$$x = [g_1(x^{-1})g_2(x^{-1})]^{-1} = g_2(x)g_1(x) = (g_2 + g_1)(x).$$

故 $1_G = g_2 + g_1$. 加法与乘法的分配律依赖于 g_1, g_2 是同态. 所以我们验证了 g_1, g_2 满足加法, 乘法交换:

$$g_1 + g_2 = g_2 + g_1, \quad g_1(g_1 + g_2) = g_1 1_G = 1_G g_1 = (g_1 + g_2)g_1,$$

从而 $g_1 g_2 = g_2 g_1$. 归纳地我们有公式

$$(g_1 + g_2)^m = \sum_{i=0}^m c_i g_1^i g_2^{m-i} \quad (c_i \in \mathbb{Z}).$$

其中 c_i 是二项式系数, $c_i i = h + \dots + h$. 因为 f_i 幂零, $g_i = f_i g$ 有非平凡的核 $\Rightarrow g_i$ 是幂零自同态. 对于充分大的 m 和任意 $a \in G$,

$$(g_1 + g_2)^m(a) = \sum_{i=0}^m c_i g_1^i g_2^{m-i}(a) = \prod_{i=0}^m e^{c_i} = e.$$

这与 $g_1 + g_2 = 1_G, G \neq \{e\}$ 矛盾. □

在证明唯一性定理前, 我们先对内直积的一些记号进行说明:

$$\varphi: G_1 \times \dots \times G_s \simeq G, \quad (g_1, \dots, g_s) \mapsto g_1 g_2 \dots g_s.$$

对任意 $g \in G$ 可以唯一地写成 $g = g_1 g_2 \dots g_s, g_i \in G_i$. 单同态 $\pi_i: G \rightarrow G_i, g \mapsto g_i$ 是良定义的, 我们把它和直积的自然投射看作是同一个单同态, $G = G_1 \times \dots \times G_s$.

Theorem 3.7 [Krull-Schmidt 定理 (Krull-Schmidt Theorem)]. 群 G 在正规子群上满足升链条件和降链条件. 如果

$$G = G_1 \times \dots \times G_s, \quad G = H_1 \times \dots \times H_t,$$

其中 G_i, H_i 是不可分解群, 则 $s = t$, 在适当调序后 $G_i \simeq H_i, \forall i$, 并且对任意 $r < t$,

$$G = G_1 \times \dots \times G_r \times H_{r+1} \times \dots \times H_t.$$

* Chapter 3. 对群的进一步讨论

Remark. 前面的定理保证了至少存在一个这样的分解. 这里的唯一性比有限生成 *Abel* 群结构定理的唯一性更强, 不仅是直积因子同构.

Proof. 归纳证明, 这里需要详细叙述归纳的命题. 令 $P(0)$ 是命题: $G = H_1 \times \cdots \times H_t$. 对于 $1 \leq r \leq \min(s, t)$, 令 $P(r)$ 是命题: 在适当调序后 $G_i \simeq H_i, i = 1, 2, \dots, r$, 并且

$$G = G_1 \times \cdots \times G_r \times H_{r+1} \times \cdots \times H_t$$

当 $r = t$ 时, 上式理解为 $G = G_1 \times \cdots \times G_t$. 需要验证对所有的 $r, P(r)$ 成立.

已经知道了 $P(0)$ 成立. 假设 $P(r-1)$ 成立, 我们来验证 $P(r)$. 令

$$\pi_1, \dots, \pi_s \text{ [resp. } \pi'_1, \dots, \pi'_t]$$

是

$$G = G_1 \times \cdots \times G_s \text{ [resp. } G = G_1 \times \cdots \times G_{r-1} \times H_r \times \cdots \times H_t]$$

的自然投射.

令 λ_i [resp. λ'_i] 是第 i 个直积因子的自然嵌入. 对于每个 i , 令

$$\varphi_i = \lambda_i \pi_i : G \rightarrow G, \quad \psi_i = \lambda'_i \pi'_i : G \rightarrow G.$$

容易验证有这些同态满足以下性质:

$$\begin{aligned} \varphi_i|_{G_i} &= 1_{G_i}, & \varphi_i \varphi_i &= \varphi_i, & \varphi_i \varphi_j &= 0_G \ (i \neq j), \\ \psi_1 + \cdots + \psi_t &= 1_G, & \psi_i \psi_i &= \psi_i, & \psi_i \psi_j &= 0_G \ (i \neq j), \\ \text{Im } \varphi_i &= G_i, & \text{Im } \psi_i &= G_i \ (i < r), & \text{Im } \psi_i &= H_i \ (i \geq r). \end{aligned}$$

从而

$$\varphi_r \psi_i = 0, \quad i < r$$

因为

$$(\varphi_r \psi_i)(x) = \varphi_r 1_{G_i} \psi_i(x) = \varphi_r \psi_i \psi_i(x) = e.$$

下面证明 $P(r)$ 的两部分: $G_r \simeq H_r$ 和

$$G = G_1 \times \cdots \times G_r \times H_{r+1} \times \cdots \times H_t.$$

由

$$\varphi_r = \varphi_r 1_G = \varphi_r (\psi_1 + \cdots + \psi_t) = \varphi_r \psi_r + \cdots + \varphi_r \psi_t.$$

每个 $\varphi_r \psi_i$ 的和都是正规自同态, 习题. 因为

$$\varphi_r|_{G_r} = 1_{G_r},$$

3.4. Krull–Schmidt 定理

且 G_r 对正规子群满足升链条件和降链条件, 还是习题, 所以

$$\varphi_r \psi_j|_{G_r}$$

是 $G_r \neq \{e\}$ 的一个自同构, 对某个 j , $r \leq j \leq t$, 这是根据前述推论得到的. 所以对任意 $n \geq 1$,

$$(\varphi_r \psi_j)^{n+1}$$

还是 G 的自同构, 而

$$G_r \neq \{e\}, \quad (\varphi_r \psi_j)^{n+1} = (\varphi_r \psi_j)^n \psi_j, \quad \forall n \geq 1$$

是正规自同态. 于是

$$\varphi_r|_{H_j} : H_j \rightarrow G_r$$

不能是幂零的. H_j 在正规子群上满足升链条件和降链条件, 还是习题, 所以

$$\psi_j \varphi_r|_{H_j}$$

是 H_j 的自同构, 从而

$$\psi_j|_{G_r} : G_r \rightarrow H_j, \quad \varphi_r|_{H_j} : H_j \rightarrow G_r$$

是同构. 适当调序后让 $j = r$, 就得 $G_r \simeq H_r$. 完成了前半部分的证明.

两个子群的链条件成立是比较显然的, 直观地讲, 大群的链比小群的链更长, 所以大群的链条件可以得到小群的链条件.

记

$$G = G_1 \times \cdots \times G_{r-1} \times H_r \times \cdots \times H_t.$$

子群

$$G_1 G_2 \cdots G_{r-1} H_r \cdots H_t$$

是内直积

$$G_1 \times \cdots \times G_{r-1} \times H_{r+1} \times \cdots \times H_t.$$

观察到当 $j < r$ 时,

$$\psi_r(G_j) = \psi_r \psi_j(G) = \{e\},$$

当 $j > r$ 时,

$$\psi_r(H_j) = \psi_r \psi_j(G) = \{e\},$$

因而

$$\psi_r(G_1 G_2 \cdots G_{r-1} H_r \cdots H_t) = \{e\}.$$

* Chapter 3. 对群的进一步讨论

而 $\psi_r|_{G_r}$ 是同构, 所以

$$G_r \cap (G_1 G_2 \cdots G_{r-1} H_r \cdots H_t) = \{e\}.$$

于是

$$G^* = G_1 G_2 \cdots G_{r-1} G_r H_r \cdots H_t$$

是内直积

$$G^* = G_1 \times \cdots \times G_{r-1} \times G_r \times H_{r+1} \times \cdots \times H_t.$$

定义

$$\theta: G \rightarrow G, \quad g = g_1 \cdots g_{r-1} h_r \cdots h_t \mapsto g_1 \cdots g_{r-1} \varphi(h_r) h_{r+1} \cdots h_t.$$

显然

$$\text{Im } \theta = G^*.$$

θ 是正规自同态. 根据链条件知道 θ 是同构, 则

$$G = \text{Im } \theta = G^*,$$

证明了后半部分.

所以在适当调序后

$$G_i \simeq H_i, \quad 0 \leq i \leq \min(s, t).$$

如果 $\min(s, t) = s$, 则

$$G_1 \times \cdots \times G_s = G = G_1 \times \cdots \times G_s \times H_{s+1} \times \cdots \times H_t.$$

如果 $\min(s, t) = t$, 则

$$G_1 \times \cdots \times G_s = G = G_1 \times \cdots \times G_t.$$

因为 $G_i \neq \{e\}, H_j \neq \{e\}, \forall i, j$, 所以对两种情况都一定有 $s = t$. □

3.5 自由群

本章参考李文威的《代数学方法: 卷一》[李文威 23, §4.8], 以及陈猛, 王庆雪和李志远的《抽象代数》[陈王李 24, §1.6, 习题 9*-10*].

设 X 为集合. 概略地说, X 上的自由群 $F(X)$ 是由从 X 的元素出发, 「形式地」进行乘法与取逆所能得到的表达式组成的群. 这些表达式称为自由群里的词, 也称 X 为**词母集**. 例如当 $X = \{x, y\}$ 时, $F(X)$ 是由

$$1, x, y, x^{-1}, y^{-1}, xy, yx, x^2, yxy, \cdots$$

等无穷多个词组成的集合. 「自由」意谓词的乘法除群论的基本要求如结合律和 $xx^{-1} = 1$ 外, 再无其它约束.

3.5. 自由群

Definition 3.8 [自由积 (free product)]. 设 $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是以 I 为指标集的一族群. 对正整数 n , 我们称 n -元组 $a = (x_1, \dots, x_n)$ 为 $\{G_\alpha\}$ 上的长度为 n 的**词**, 其中 $x_i \in \bigsqcup_{\alpha \in I} G_\alpha$. 约定长度为 0 的空词, 记作 e . 在 $\{G_\alpha\}$ 上词的全体构成的集合上构造等价关系 $\sim$ 如下:

- 记 e_α 为 G_α 的恒等元, 则

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, e_\alpha, x_{i+1}, \dots, x_n) \sim (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n);$$

- 如果 x_i, x_{i+1} 同属于某个 G_α , 则

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \sim (x_1, \dots, x_{i-1}x_{i+1}, \dots, x_n).$$

经过上述等价操作化至最简的词, 称为**既约的**. 记词 a 所在的等价类为 $[a]$. 对词 $a = (x_1, \dots, x_n), b = (y_1, \dots, y_m)$, 定义它们的乘积为

$$ab = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m),$$

称为词的**连接**. 记 $\{G_\alpha\}$ 上的词的全体等价类为 $*_{\alpha \in I} G_\alpha$. 可以定义 $*_{\alpha \in I} G_\alpha$ 上的乘法 $[a][b] = [ab]$ 使得其构成群, 称为 $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 的**自由积**.

Proof. 先证明题干中定义的乘法是良定义的. 不妨取 $a \in [a], a' \in [a]$, 其中 $a = (x_1, \dots, x_n)$ 是通过规则充分化简到词段长度最短的, 而 $a' = (x'_1, \dots, x'_{n'})$ 没有充分化简. 只需证明

$$ab = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \sim a'b = (x'_1, \dots, x'_{n'}, y_1, \dots, y_m),$$

我们可以利用规则 $a1, a2$ 先化简 $x'_1, \dots, x'_{n'}$ 的部分然后停止, 即可证明.

首先 $[e] \in *_{\alpha \in I} G_\alpha$ 显然是单位元, 其次, 根据词全体在词的乘法下构成的么半群的封闭性, 词的等价类的乘法也有封闭性. 对于词 a , 取 $a^{-1} = (x_n^{-1}, \dots, x_1^{-1})$, 那么 $aa^{-1} = a^{-1}a = e$, 所有的 $e_i, i = 1, \dots, n$ 都是某个 G_α 的单位元, 因此

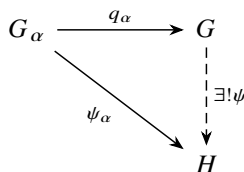
$$[a][a^{-1}] = [a^{-1}][a] = [e],$$

所以任意元素都有逆元, 即 $[a]^{-1} = [a^{-1}]$. 所以 $*_{\alpha \in I} G_\alpha$ 在此乘法下的确构成群. $\square$

Proposition 3.3. 设 $G = *_{\alpha \in I} G_\alpha$ 是群的自由积, $q_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ 将 x_α 映为 $[(x_\alpha)]$, $\psi_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$ 是群同态, 其中 $\alpha \in I$, 则存在唯一的群同态 $\psi : G \rightarrow H$, 使得对任意 $\alpha \in I$, 都有 $\psi \circ q_\alpha = \psi_\alpha$.

* Chapter 3. 对群的进一步讨论

Remark. 用下图理解.



另外, 这是某种泛性质, 关于此将在 [Subsec. 9.2.2](#) 中进一步讨论.

Proof. 自由积 $G = *_{\alpha \in I} G_\alpha$ 的元素可表示为约化词

$$w = (x_1, \dots, x_k), \quad x_j \in G_{\alpha_j}, \quad \alpha_j \in I,$$

其中 $k < \infty$ 且相邻指标满足 $\alpha_j \neq \alpha_{j+1}$.

定义映射 $\psi: G \rightarrow H$ 为

$$\psi([w]) = \psi_{\alpha_1}(x_1) \cdots \psi_{\alpha_k}(x_k).$$

由于每个 ψ_α 是群同态, 约化词的等价变换不会改变上述乘积, 故 ψ 定义良好, 且显然为群同态.

对任意 $x \in G_\alpha$,

$$\psi(q_\alpha(x)) = \psi([x]) = \psi_\alpha(x),$$

故 $\psi \circ q_\alpha = \psi_\alpha$.

若 $\psi': G \rightarrow H$ 亦满足 $\psi' \circ q_\alpha = \psi_\alpha$, 则对任意约化词 $w = (x_1, \dots, x_k)$, 有

$$\psi'([w]) = \prod_{j=1}^k \psi'([x_j]) = \prod_{j=1}^k \psi_{\alpha_j}(x_j) = \psi([w]).$$

因此 $\psi' = \psi$, 唯一性得证. □

Definition 3.9 [自由群 (free group)]. 设 S 为非空集合, 对于 $\alpha \in S$, 记

$$G_\alpha = \{\dots, \alpha^{-1}, e_\alpha = \alpha^0, \alpha = \alpha^1, \alpha^2, \dots\}$$

为 α 生成的无限循环群. 称 $*_{\alpha \in S} G_\alpha$ 为 S 生成的自由群, 记为 $F(S)$. 称 S 为字母表, 其中的元素为字母.

从定义立刻可知经典事实, S 生成的自由群是所有 $\alpha \in S$ 生成的自由群的自由积. 此基于观察诸 G_α 亦是自由群.

3.5. 自由群

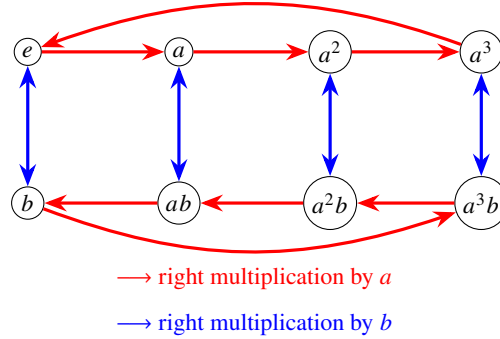


Figure 3.1: 8 阶二面体群的 Cayley 图

Example. 考虑词母表 $M = \{0, 1\}$, 于是

$$G_0 = \{\cdots, 0^{-1}, e_0, 0, \cdots\}, \quad G_1 = \{\cdots, 1^{-1}, e_0, 1, \cdots\},$$

我们可以创造一些既约词, 例如 $(0^{-2}1^301)$, (1^30^{-2}) , 然后连接

$$(0^{-2}1^301)(1^30^{-2}) = (0^{-2}1^3011^30^{-2}) \sim (0^{-2}1^301^40^{-2}).$$

可以定义所有的既约词, 在连接后既约的运算下, 构成群, 这就是 $M = \{0, 1\}$ 生成的自由群, 记作 F_2 , 同构意义下 F_2 只有一种, 同理 F_n , $n \in \mathbb{N}$.

设 R 为 $F(S)$ 的子集, N 为 $F(S)$ 的包含 R 的最小的正规子群, 令 $G = F(S)/N$, 称 G 为生成元集 S 在生成关系 R 下生成的群, 也记 $G = \langle S | R \rangle$. 若 $S = \{s_1, \cdots, s_n\}$, $R = \{r_1, \cdots, r_m\}$, 则可更详细地记

$$\langle S | R \rangle = \langle s_1, \cdots, s_n | r_1 = \cdots = r_m = e \rangle.$$

特别地, 在 $r_i = \alpha^{-i}\beta^j$ 时, 关系 $r_i = e$ 也可记为 $\alpha^i = \beta^j$.

如果这里改为 $G \cong F(S)/N$, 则称以上为 G 的群展示 (group presentation). 当 X 可取有限集时, 称为有限展示. 例如, 参见到如下对二面体群的展示.

Example 17. 对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 二面体群 D_n 有如下展示

$$D_n = \langle a, b \mid a^n = 1, b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle.$$

另一套符号, 生成元 a 对应于 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的生成元 $1 + n\mathbb{Z}$, 而 b 对应于 $\tau \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. 我们还可以使

* Chapter 3. 对群的进一步讨论

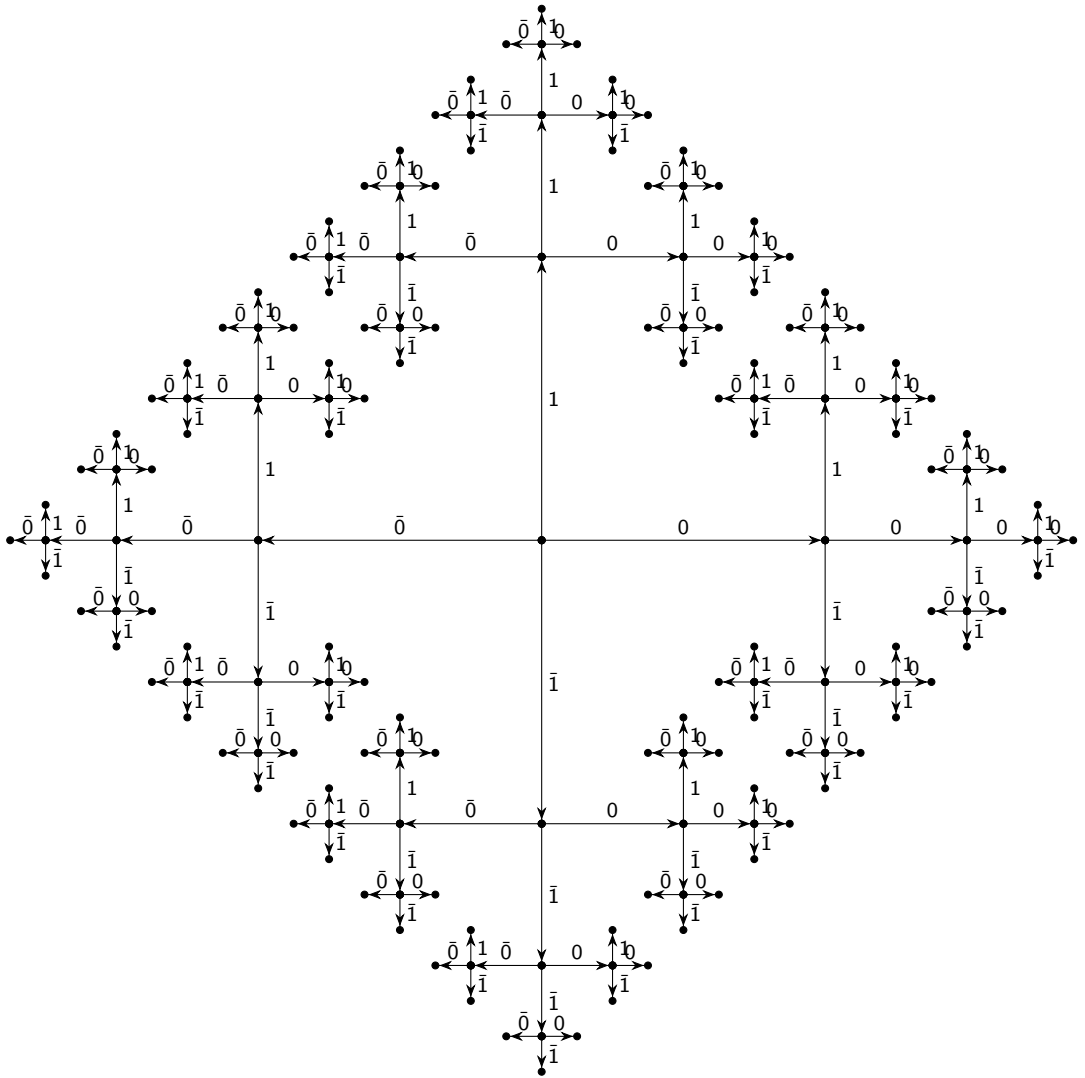


Figure 3.2: 二元素集合 $\{0, 1\}$ 的 Cayley 图, 此处记 $\bar{0} \equiv 0^{-1}$, 余同理; Figure Credit: 源代码来源于[此](#)

3.5. 自由群

用生成元 $\sigma := ab, \tau := b$ 给出另一套展示

$$D_n \simeq \langle \sigma, \tau \mid \sigma^2 = 1, \tau^2 = 1, (\sigma\tau)^n = 1 \rangle.$$

Example. 数学家 *Robert M. Guralnick* 和 *Gunter Malle* 证明了一切非 *Abel* 有限单群都可以用两个相互共轭的元素生成.²

Theorem 3.8 [Nielsen–Schreier 定理 (Nielsen–Schreier theorem)]. 自由群的子群也是自由群.

相关证明实则不短, 此处省略之. 拓扑论证可参见李文威的《代数学方法: 卷一》[李文威 23]. 以下推论十分违反直觉, 亦无简短证明.

Corollary 3.3. 设 F 为有限自由群, $H \leq F$ 且 $[F : H] < \infty$, 则

$$\text{rank}(H) = 1 + [F : H] (\text{rank}(F) - 1).$$

基于此, 可以构造出有限自由群的某子群的秩严格大于母群!

Example. 考虑 $F_2, H = \{\text{偶长度词}\}$, 则 $[F_2 : H] = 2$, 于是 $\text{rank}(H) = 1 + 2(2 - 1) = 3 > \text{rank}(F_2)$. 融合积是自由积的推广.

Definition 3.10 [融合积 (amalgamated product)]. 令 $(M_i)_{i \in I}$ 为一族么半群. 给定么半群 A 及一族同态 $(f_i : A \rightarrow M_i)_{i \in I}$. 满足以下泛性质的资料 $(M, (\varphi_i)_{i \in I})$ 称为 $(M_i, f_i)_{i \in I}$ 的融合积:

- M 是么半群, $\forall i \in I, \varphi_i : M_i \rightarrow M$ 是同态;
- 合成同态 $h := \varphi_i f_i : A \rightarrow M$ 与 i 无关;

²正式发表于 2012 年, 2010 年 arXiv 初稿. 当然, 其间的关系可以极复杂. 证明技术是曲折的, 依赖于有限单群的分类和较深入的群表示论.

* Chapter 3. 对群的进一步讨论

- 若资料 $(M', (\varphi'_i)_{i \in I})$ 也满足以上性质, 则存在唯一同态 $\varphi : M \rightarrow M'$ 使得下图交换.

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\varphi_i} & M \\ & \searrow \varphi'_i & \downarrow \exists! \varphi \\ & & M' \end{array}$$

可以从融合积出发定义自由积. 我们暂且打住相关讨论, 因为关于融合积我们不需要太多.

References of this chapter

- [李文威 23] 李文威. 《代数学方法: 卷一》. 1st. 北京, China: 高等教育出版社, 2023, 约 450.
- [陈王李 24] 陈猛, 王庆雪, and 李志远. 《抽象代数》. 1st. 上海, 中国: 复旦大学出版社, 2024, p. 175.

4

Contents

4.1 同伦群	107
4.2 同调群	109

几何学中的群

在本笔记中,我们遵从拓扑学中的通用定义:集合 X 被称为**拓扑空间**,若其上定义了拓扑 $\mathcal{T}$, 其是若干子集构成的集族,每个子集称为**开集 (open set)**,满足性质: (1) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$, (2) $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{T}, \forall \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}, |\mathcal{U}| \leq \infty$, (3) $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{T}, \forall \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$. 一个集合是**闭的**,若补集是开的. 拓扑空间之间的映射被称为**连续的**,若任意开集的原像是开集. 若连续映射的逆映射亦连续,称为**同胚 (homeomorphism)**.

兹列举常用点集拓扑结论,证明可查阅任意相关教材:

- 若 X, Y 是拓扑空间,则 $X \times Y$ 凭乘积拓扑自然地称为拓扑空间. 乘积拓扑是以 X, Y 中开集的 Descartes 积为开集所得到的拓扑.

4.1 同伦群

Definition 4.1 [??]. 设 X, Y 为拓扑空间, $C(X, Y)$ 为从 X 到 Y 的所有连续映射的集合. 称 $f, g \in C(X, Y)$ **同伦**, 记作 $f \simeq g$, 若存在连续的同伦映射 $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$, 使得对 $\forall x \in X, H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = g(x)$.
设 $A \subseteq X$, 称 f, g 相对 A 同伦, 记作 $f \simeq_A g$, 若 $H(a, t) = f(a) = g(a), \forall t \in [0, 1]$, 即保持在 A 上不变.

Chapter 4. 几何学中的群

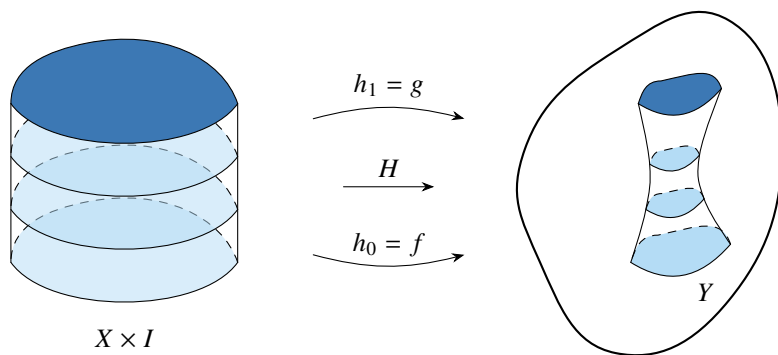


Figure 4.1: 同伦示意图

可以验证同伦和相对同伦是 $C(X, Y)$ 上的等价关系, 并记同伦等价类为 $[X, Y]$, 相对同伦等价类为 $[X, Y]_A$. 当 $A = \emptyset$ 时, 相对同伦就是同伦. 复合运算是保持同伦的, 即若 $f_1 \simeq_A f_2$, $g_1 \simeq_B g_2$, 则 $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$. 同伦于常值映射的映射称为**零伦**的.

Definition 4.2 [??]. 设 X, Y 为拓扑空间, 若存在两个连续映射 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow X$, 且 $g \circ f \simeq \text{id}_X$, $f \circ g \simeq \text{id}_Y$, 则称 f 和 g 互为**同伦逆**, X 和 Y 同伦等价, 记作 $X \simeq Y$.

同伦比同胚要弱, 例如 $\mathbb{R}^n$ 和单点集同伦. 我们称和单点集同伦的拓扑空间为**可缩空间**. 直观上看, 相较于同胚, 同伦允许「压缩」, 但是仍然不允许「创造和湮灭「洞」」. 可以证明, 可缩空间是道路连通的¹, X 可缩当且仅当 id_X 零伦.

Definition 4.3 [??]. 设 X 是拓扑空间, $x \in X$ 为**基点**, 记 (X, x) 为**基点空间**. 考虑满足 $f(\partial [0, 1]^n) = x$ 的连续映射 $f: ([0, 1]^n, \partial [0, 1]^n) \rightarrow (X, x)$. 第 n 阶**同伦群**定义为

$$\pi_n(X, x) := ([0, 1]^n, \partial [0, 1]^n), (X, x),$$

¹**道路连通**的定义: $\forall x, y \in X$, 存在连续映射 $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ 使得 $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. 这样的 γ 被称为**道路 (path)**. 直观上看, 道路连通就是任意两点之间存在「有限长」的路径, 强调有限长是因为存在连通 (不存在既开又闭的非平凡真子集) 但不是道路连通的例子 — 拓扑学家的正弦曲线. 另一个常见的连通性是**局部道路连通**: $\forall x \in X$, 任意邻域 $U \ni x$, 存在道路连通开集 V 使得 $x \in V \subseteq U$. 道路连通和局部道路连通互相不可推出. 例如无限梳状空间道路连通但不局部道路连通.

4.2. 同调群

其群运算由拼接给出: 对于 $[f], [g] \in \pi_n(X, x)$, 定义 $[f] \cdot [g] = [f * g]$, 其中

$$(f * g)(t, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} f(2t, x_2, \dots, x_n), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t - 1, x_2, \dots, x_n), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Remark. 可以证明如此定义的乘法是良定义的.

当 $n = 1$ 时, 同伦群被称为 π_1 . 其集合意义和最直观: 任意基本群中的元素, 是始于基点并终于基点的道路等价类. 例如圆周 S^1 的基本群就是 $\mathbb{Z}$, 单位元就是可收缩的零伦回路等价类, $\lceil +n \rceil$ 对应顺时针 (或逆时针) 绕 n 圈的闭合回路等价类, $\lceil -n \rceil$ 对应逆时针 (或顺时针) 绕 n 圈的闭合回路等价类, 容易想象这些回路等价类之间不同伦.

Definition 4.4 [??].

4.2 同调群

在 [Sec. 2.5](#) 中, 我们已经见过同调群了, 此处我们从几何学的角度再次引入之, 下文讲解单纯同调论.

5

Contents

5.1	图	111
5.2	路	113
5.3	树	113
5.4	流	113

图论速成课 (A crush course of graph theory)

5.1 图

Definition 5.1 [??]. 二元组 $G = (V(G), E(G))$ 称为**图**, 其中 $V(G)$ 是非空集合, 其元素称为**顶点 (vertex)**, $E(G)$ 中的元素是若干某连结某两个顶点的线段, 称为**边 (edge)**.

若顶点集和边集均为有限集, 称为**有限图**, 否则称为**无限图**. 边允许指定方向, 若边集存在指定了方向的元素, 就称为**有向图**, 否则称为**无向图**. 顶点的阶 $|V|$ 也被称为图的**阶**. 边允许两个顶点为同一个点, 此时称为**自环**. 两个顶点之间运行存在多个边, 称为**重边**. 允许存在没有边的顶点, 称为**孤立点**. 无重边无自环的有限无向图称为**简单图**. 任意两个顶点都有边的简单图称为**完全图**, n 阶完全图记作 K_n . 若顶点集可以分为两个不交子集, 使得每个边的两个端点分别落在两个子集内, 则称为**二分图**. 若二分图任意一对来自两个顶点子集的端点都有边, 称为**完全二分图**, 记作 $K_{k,l}$, k 与 l 是两个顶点子集的阶. 只有一个顶点的图称为**平凡图**, 否则称为**非平凡图**. 没有边的图称为**空图**, 阶 n 空图记作 N_n . 对有向图, 出去的边贡献的度称为**出度**, 进入的边贡献的度称为**入度**. 按度的奇偶定义**奇点**和**偶点**. 顶点的**度 (degree)** 是该顶点的边的个数, 其中自环贡献 2 个边. 所有顶点度数均相等的图称为**正则图**. 可以给每个边赋予一个实数, 称为**赋权图**.

对有限图 G , 可以写 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, 边可以写为 $e_{ij} = (v_i, v_j)$, 顶点 v 的度写作 $d(v)$, 出度

* Chapter 5. 图论速成课 (A crush course of graph theory)

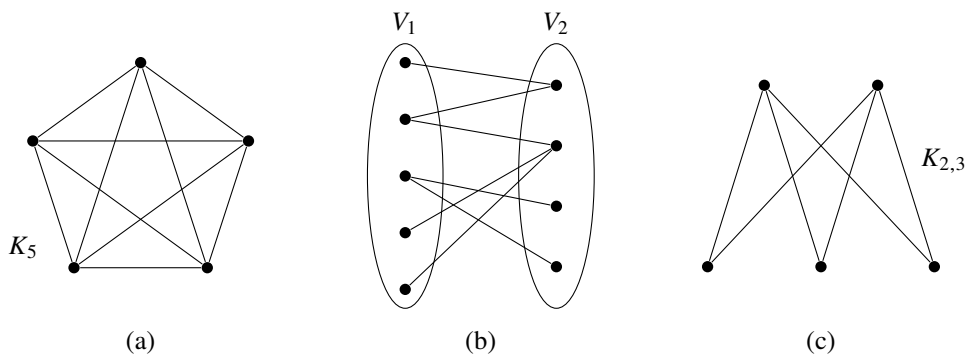


Figure 5.1: (a) 完全图 (b) 二分图 (c) 完全二分图

写作 $d^+(v)$, 入度写作 $d^-(v)$.

给定图 $G = (V, E)$, 图 $G' = (V', E')$ 称为 G 的??, 记作 $G' \leq G$, 若 $V' \subseteq V, E' \subseteq E$. 特别的, 如果 $V' = V$, 称 G' 是 G 的??; 如果 $V' \subseteq V$, 且 E' 包含了 G 在 V' 之间的所有边, 则称 G' 是 G 的??.

给定两个图 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$, 令 $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ 为两图的并, $G_1 \oplus G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \oplus E_2)$ 为两图的对称差, $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ 为两图的交, $G_1 - G_2 = (V_1, E_1 - E_2)$ 为两图的差. 特别的, 对于 n 阶简单图 $G, K_n - G$ 为 G 的??.

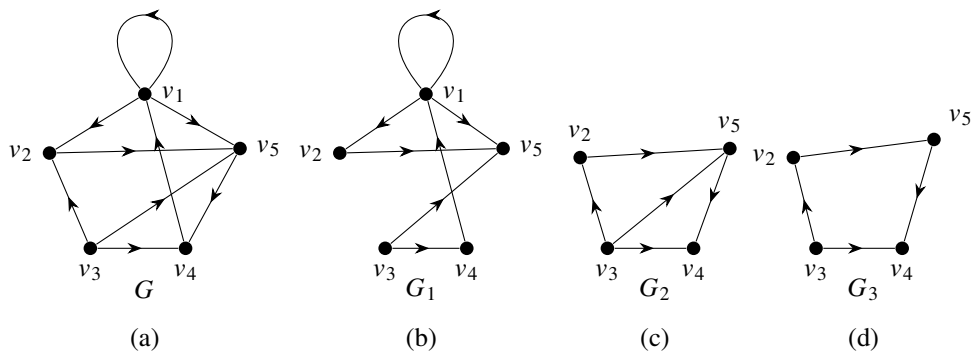


Figure 5.2: G_1 是 G 的生成子图, G_2 是 G 的导出子图, G_3 是 G 的子图.

设 v 是图 $G = (V, E)$ 的顶点, 定义 $\Gamma^+ = \{u \mid (v, u) \in E\}$ 为 v 的直接后继, $\Gamma^- = \{u \mid (u, v) \in E\}$ 为 v 的直接前继.

5.2. 路

图 $G_1 = (V_1, E_1)$ 与图 $G_2 = (V_2, E_2)$ 之间是**同构的**, 记作 $G_1 \cong G_2$, 如果存在双射 $f: V_1 \rightarrow V_2$, 且 $(u, v) \in E_1$ 当且仅当 $(f(u), f(v)) \in E_2$.

Proposition 5.1. 设有限图 $G = (V, E)$, n 阶正则图 K_n , 则

- $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$;
- 度为奇数的顶点个数为偶数;
- 若 G 有向, 则出度和等于入度和;
- K_n 边数 $\frac{1}{2}n(n-1)$;
- 若 G 非空且简单, 则存在度相同的顶点.

Proof.

□

5.2 路

Definition 5.2. 图 $G = (V, E)$ 中的**道路**是边序列 $P = (e_{i_1}, \dots, e_{i_q})$, 其中 $e_{i_k} = (v_l, v_j)$ 满足 v_l 是 $e_{i_{k-1}}$ 的终点, v_j 是 $e_{i_{k+1}}$ 的起点; 若 e_{i_q} 的终点也是 e_{i_1} 的起点, 则称 P 是**回路**. 有向图的道路仅允许沿着边的定向进行定义.

若道路中没有重复的边, 称为**简单道路**; 若简单道路中没有重复的顶点, 称为**初级道路**. 对无向图 G , 若任意两个顶点之间存在道路, 就称为**连通图**; 若子图 H 不是 G 的任何连通子图的真子图, 就称为**极大连通子图**或**连通分支**. 设 v 是图 G 的顶点, 使得 $G - v$ 的连通分支数比 G 多, 就称 v 为一个**割点**; 设 e 是图 G 的边, 使得 $G - e$ 的连通分支数比 G 多, 就称 e 为一个**割边**; 图 G 中极大的没有割点的连通子图称为**块**.

5.3 树

5.4 流

Part II

基础代数学的必要补充

The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve.

— Eugene Wigner

或许物理系的学生只正式学习过线性代数, 群论与群表示论, 但是我认为, 不管是出于对代数的学习还是用于物理工作, 某些除纯粹群论外的必要的代数知识仍然是相当重要的. 至少作为代数审美, 错过这段学习依旧是颇为可惜的.

本部分我们介绍除了群论外其他重要的代数学分支理论, 主要有环论, 模论, 代数, 范畴论, 作为面向物理学的笔记, 域论相关理论则采取回避的行为, 以考虑到主流物理学研究中几乎不会使用之.

— 笔者

6

环论速成课 (a crash course of ring theory)

Contents

6.1	环, 域, 代数, 及延伸概念	117
6.2	理想与商环	122
6.3	环的同态与同构	127
6.4	域的特征	131
* 6.5	主理想整区	133
6.6	多项式环	134
6.7	环的可解性	138
* 6.8	Wedderburn 小定理	140

本节主要参考教材 [陈王李 24, Chapter 2, p.51].

正如本章的标题, 本章的目的就是简短迅速地给出环论中的重要概念 — 在物理的应用中, 环是不可避免要涉及的概念, 尽管大多数时候并不是明确指出的, 以及环的应用也远不及群.

6.1 环, 域, 代数, 及延伸概念

本节主要介绍环的概念及其延伸的子概念, 域和代数这顺带介绍.

Definition 6.1 [环]. 环 $(R, +, \cdot)$ 是一个集合 R , 附带两个定义了的二元运算, 使得 $(R, +)$ 是 Abel 群, $(R, \cdot)$ 是半群, 且加法对乘法满足左右分配律: 对任意的 $a, b, c \in R$, 有

- $a(b + c) = ab + ac$;
- $(a + b)c = ac + bc$.

Remark. 诸多文献对环的定义要求 $(R, \cdot)$ 是么半群, 从而没有么环的概念, 默认所谈论的均是么环. 实际运用中, 但是大部分情况下环都是含么的, 需要注意不同资料对环定义的不同, 我们这里

Chapter 6. 环论速成课 (a crash course of ring theory)

不默认环含么. 但是我们这里定义 $(R, \cdot)$ 是半群, 而半群是满足结合律的, 所以默认环是「结合环」, 从而后面定义的代数都是「结合代数」. 一些其他文献则不要求 $(R, \cdot)$ 满足结合律, 从而不是半群, 因而不默认所言环和代数是结合的. 物理学中常用的 *Lie* 代数就不是结合的, 像这种非结合的环和代数我们会给出特殊说明.

我们常记 0 是加法单位元, 也叫零元, 1 是乘法单位元, 也叫么元. 称只有一个元素的环为零环, 因为 $1 = 0$, 下面一例阐明为何称其为零环,

Example. 如果环 R 中 $1 = 0$, 则其是零环. 因为对任意的 $r \in R$, $r = 1 \cdot r = 0 \cdot r = 0$.

这里我们提前使用了下面的引理.

Lemma 6.1. 设 R 是一个环, 则对任意的 $r, a, b \in R$, 记 $-r \equiv (-1) \cdot r$, 均有

- $0a = a0 = 0$;
- $r + (-r) = 0$;
- $(-a)b = a(-b) = -(ab)$;
- $(-a)(-b) = ab$.

需要注意, 符号的意义不是自明的, -1 指的是 1 的加法逆元, 第二条意在说明 $-r$ 是 r 的加法逆元.

Proof. 首先

$$0a = (0 + 0)a = 0a + 0a \implies 0 = 0a,$$

另一边同理.

对于后三条, 先证明 $r + (-r) = 0$, 这是因为

$$r + (-r) = (1 + (-1))r = 0r = 0.$$

然后证明 $(-a)b = -(ab)$, 只需验证 $(-a)b + (ab) = 0$,

$$(-a)b + (ab) = ((-a) + a)b = 0.$$

另一边同理. 最后证明 $(-a)(-b) = ab$, 只需说明 $-r = r \cdot (-1)$, 这是因为

$$r \cdot (-1) + r = r((-1) + 1) = 0.$$

从而 $(-a)(-b) = (-1)^2 ab = ab$. □

6.1. 环, 域, 代数, 及延伸概念

这个引理相当重要, 使得我们可以安全地按照习惯使用这些符号进行推演.

相比于群, 环多了一种运算, 所以结构更丰富. 一种运算是乘法, 另一种运算是加法, 就符号而言, 加法满足交换律 (故为 Abel 群), 乘法则不必满足, 且不必要求可逆. 可以想到一个最简单的例子就是所有的矩阵在矩阵加法和矩阵乘法下构成环.

如果乘法可交换, 就称为**交换环**. 在数学中, 交换环也是很重要的研究对象. 上面提到的矩阵环是交换的, 而实数集在通常的加法和乘法下构成交换环, 并且注意到, 除了加法单位元 0 外, 所有的元素都可逆, 性质明显好于一般的环. 我们称环中的**单位**是那些乘法可逆的元素, 环 R 的所有单位记作 $R^\times$, 即那些能构成乘法群的元素的集合, 称一个环是**除环**, 如果所有非零元素均为单位. 除环也叫做**体**, **斜域**.

据此我们总结出域的概念.

Definition 6.2 [域]. 环 $(R, +, \cdot)$ 称为**域**, 如果其是一个交换的除环.

域的例子我们已经大量接触了, 例如实数域 $\mathbb{R}$, 复数域 $\mathbb{C}$ 等, 这些元素是数的称为**数域**, 也就是我们常说的对加减乘除封闭的数的集合. 四元数集 $\mathbb{H}$ 不构成域, 但是构成斜域, 可验证之.

我们还可以继续添加运算, 得到更丰富的数学结构. 回想矩阵环, 如果我们对其中的矩阵进行数乘 (当然矩阵元和系数的数域要相同), 依旧可以保持集合的封闭性, 这暗示我们可以往环上定义数乘.

Definition 6.3 [代数]. 环 A 称为域 $\mathbb{F}$ 上的**代数**, 如果 A 对于加法和数乘称为域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 且乘法和数乘满足

$$k(ab) = (ka)b = a(kb), \quad k \in \mathbb{F}, \quad a, b \in A.$$

代数的例子很多, 例如量子力学用到的算符代数, 其元素是作用于态矢空间的线性算符, 比如说可观测量, 升降算符等. 八元数集 $\mathbb{O}$ 是一个不结合的代数 — 如果放宽环的乘法部分定义, 允许其不是半群, 没有结合律的话, 可以定义不结合的代数.

Convention 6.1. 如非特别声明, 默认环含幺元, 代数结合.

下面研究延伸的概念. 一些群中的概念可以类似地推广到环中, 例如子环和之后要讲的环同态.

Definition 6.4 [子环]. 称 S 是环 R 的子环, 如果 S 对 R 构成加法的子群以及乘法的子幺半群.

Chapter 6. 环论速成课 (a crash course of ring theory)

类似群中心, 定义**环中心** $Z(R)$ 为环 R 中所有乘法可交换的元素组成的集合, 可以验证其为 R 的一个交换的子环.

Definition 6.5 [整环]. 称环 R 为**整环**, 如果不存在非零元素 $a, b \in R$ 使得 $ab = 0$. 交换的整环称为**整区** (integral domain).

有时会引入**零因子**的概念: 若 $a, b \in R$ 非零, 使得 $ab = 0$ 或 $ba = 0$, 就称 a, b 是零因子; 也就是说, 零因子是非零的, 但是能让其他非零元变成零的元素. 整环等价的定义是说其没有零因子. 整环很常见, 这里举两例非整环: $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$; 另一例为量子力学中的 $\frac{1}{2}$ -自旋代数, 两个升算符的乘积是 0.

域和代数同样有子结构.

Definition 6.6 [子域]. 若 R 的含么子环 F 是域, 称 F 是 R 的**子域**.

此处略有微妙的一点是, 子域这个概念的母结构不要求是域, 只要是么环即可.

Definition 6.7 [子代数, 反代数]. 若 B 是代数 A 的线性子空间且乘法封闭, 称 B 是 A 的**子代数**. A 的反代数 A^{op} 由逆转乘法顺序确定, $a \cdot_{\text{op}} b := ba, \forall a, b \in A$.

Example. 矩阵环 $M_n(\mathbb{F})$ 和其反代数 $M_n(\mathbb{F})^{\text{op}}$ 是同构的, 同构映射可由矩阵转置运算给出.

Remark. 反代数的引入意在转换左模与右模, 见 [Chap. 7](#).

Example 18 [群环 (group ring), 群代数 (group algebra)]. 群环和群代数都是把群线性化的标准方法: 把群元素当成一组基, 再允许用某个系数环里的系数做有限线性组合; 乘法则由群乘法按双线性延拓得到. 更具体地说, 若 G 是群, R 是环, 则群环

$$R[G] := \left\{ \sum_{g \in G} a_g g \mid a_g \in R, \text{非 } 0 \text{ 的 } a_g \text{ 至多有限} \right\}.$$

加法被定义为按系数逐项相加, 乘法定义为

$$\left(\sum_g a_g g \right) \left(\sum_h b_h h \right) = \sum_{g,h} a_g b_h (gh).$$

6.1. 环, 域, 代数, 及延伸概念

当 R 成为域时, 记作 K , 就称如上定义的群环为群代数 $K[G]$, 并定义有限维群代数的内积

$$\left\langle \sum_{g \in G} a_g g \middle| \sum_{g \in G} b_g g \right\rangle = \sum_g a_g^* b_g \in K,$$

a_g^* 表示如果是 $\mathbb{C}$ 域则取共轭. 特别的, $\langle g|h \rangle = \delta_{gh}$, 满足正交归一关系, 重排定理则 **Thm. 1.1** 保证了群作用表现为正交变换/么正变换 $\langle g \cdot v | g \cdot w \rangle = \langle v | w \rangle, \forall v, w \in K[G]$. 群环和群代数的概念在群的线性表示理论中非常重要.

Theorem 6.1 [Frobenius 定理 (Frobenius theorem)]. $\mathbb{R}$ 上的有限维含么可除代数必同构于 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 与 $\mathbb{H}$ 其一.

Proof. 把代数 A 看作有限维实线性空间. 对任意 $a \in A$, 考虑左乘算子 $L_a : A \rightarrow A, x \mapsto ax$. 由线性代数中的 Cayley–Hamilton 定理, a 满足某个实系数多项式. 又因 A 是可除代数, 故无零因子; 因此 a 的极小多项式不可能分解成两个次数更低的非常数多项式, 所以它要么是一次的, 要么是实系数不可约二次的. 于是每个 $a \in A$ 都满足 $a \in \mathbb{R}$ 或, $a^2 - 2\alpha a + \beta = 0$ 其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 令

$$V := \{x \in A : \text{Tr}(L_x) = 0\}.$$

由上式可知, 对每个 $x \in V$ 都有 $x^2 \in \mathbb{R}$; 并且若 $x \neq 0$, 则 $x^2 < 0$, 否则 x 的极小多项式会在 $\mathbb{R}$ 上分裂, 矛盾. 故可定义

$$\langle x, y \rangle := -\frac{1}{2}(xy + yx) \quad (x, y \in V),$$

它取值于 $\mathbb{R}$, 且 $\langle x, x \rangle = -x^2 > 0, (x \neq 0)$, 所以这是 V 上的一个内积. 又因为 $\mathbb{R} \cap V = \{0\}$ 且 $\dim V = \dim A - 1$, 故 $A = \mathbb{R} \oplus V$. 取 $W \subseteq V$ 为生成 A 的极小线性子空间, 并取其一组正交归一基 $e_1, \dots, e_n$. 于是 $e_i^2 = -1, e_i e_j + e_j e_i = 0, (i \neq j)$, 即 $e_i^2 = -1, e_i e_j = -e_j e_i, (i \neq j)$. 若 $n = 0$, 则 $A = \mathbb{R}$. 若 $n = 1$, 则 A 由 $1, e_1$ 生成且满足 $e_1^2 = -1$, 故 $A \cong \mathbb{C}$. 若 $n = 2$, 则 A 由 $1, e_1, e_2, e_1 e_2$ 张成, 且满足 $e_1^2 = e_2^2 = -1, e_1 e_2 = -e_2 e_1$, 故 $A \cong \mathbb{H}$. 若 $n \geq 3$, 令 $u = e_1 e_2 e_3, v = e_1^2 e_2 = -e_2$. 利用结合律与反对易关系可验证

$$(u - v)(u + v) = u^2 - v^2 = 0,$$

而 $u \neq \pm v$, 故 $u - v$ 与 $u + v$ 均非零, 这与 A 无零因子矛盾. 故 $n \leq 2$. 综上, $A \cong \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 或 $\mathbb{H}$. $\square$

Chapter 6. 环论速成课 (a crash course of ring theory)

6.2 理想与商环

群有正规子群, 从而得到商群. 环有无正规子环, 从而得到商环呢? 答案是, 无法定义正规子环这一概念, 但是依旧可以定义一个新的子结构, 是得对其得到的商结构仍然为环, 这个结构就是要谈的理想.

Definition 6.8 [理想 (ideal)]. 设 R 是环, $I \subseteq R$ 称为 R 的**理想**, 如果

- I 是 R 的加法子群;
- 任意的 $r \in R, a \in I$, 有 $ra \in I$ 且 $ar \in I$.

从定义上可知, 理想带有某种吸收性, 当与其他元素相乘后, 得到的积会被吸入理想中. 可以说, 对环的研究, 很大一部分就是在研究理想, 理想是环论中相当重要的概念. 我们这里仅谈论**双边理想**, 而定义中第二条要求只满足一边时, 人们有时称这时的 I 为(左或右)单边理想.

Proposition 6.1. 理想是子环.

Proof. 理想的吸收性可以保证乘法的封闭性. □

Remark. I 是 R 的理想常记作 $I \trianglelefteq R$ 或者 $I \triangleleft R$, 类似正规子群的符号, 往后可以看到, 理想在环论中的功能恰如正规子群之于群论. 本笔记习惯上用 $\trianglelefteq$ 表示理想, $\triangleleft$ 表示真理想, 即蕴含真子集关系.

因为 I 是 R 的加法子群, 因 Abel 性, I 自动正规, 从而可以就加法构造商群

$$R/I := \{\bar{r} = r + I \mid r \in R\}$$

也是 Abel 群. 我们下面要在 R/I 上定义一种自然的乘法运算, 使其构成环: 对任意的 $r + I, s + I \in R/I$, 定义

$$(r + I) \cdot (s + I) = rs + I.$$

此处的良定义性是要证明的, 即等价类 $r + I = \tilde{r} + I, s + I = \tilde{s} + I$ 是否给出:

$$rs + I = \tilde{r}\tilde{s} + I,$$

等价地 $rs - \tilde{r}\tilde{s} \in I$. 根据既有假设, 我们知道 $r - \tilde{r}, s - \tilde{s} \in I$, 所以存在 $a, b \in I$ 使得 $\tilde{r} = r + a, \tilde{s} = s + b$, 从而

$$\tilde{r}\tilde{s} = (r + a)(s + b) = rs + rb + as + ab,$$

根据理想的吸收性, 后三项均属于 I , 从而 $rs - \tilde{r}\tilde{s} \in I$. 这就是我们构造出的商环, 总结如下:

6.2. 理想与商环

Definition 6.9 [商环]. 设 R 是环, I 是 R 的理想, 加法商群 R/I 上定义自然的乘法后得到一个环, 称为 R 对 I 的商环. 零元 $\bar{0} = I$, 幺元 $\bar{1} = 1 + I$.

Proposition 6.2. 设 I 是环 R 的理想, 则 $I = R$ 当且仅当 $1 \in I$.

Proof. 只证充分性, 如果 $1 \in I$, 则任意的 $r \in R$ 都有 $1 \cdot r \in I$, 这是因为吸收性. □

我们来谈谈理想的生成, 很多情形下我们希望能构造商结构, 此时就必须构造理想.

Definition 6.10. 设 S 是 R 的一个子集, 记 Λ 是所有包含 S 的理想的集族, 定义 S 生成的理想为

$$(S) := \bigcap_{I \in \Lambda} I.$$

Proof. (S) 是理想, 根据定义可以验证, 且是包含 S 的最小的理想, 这由交运算的性质可知. □

如果对于理想 I , 存在有限子集 S 使得 $I = (S)$, 称 I 是**有限生成的**. 如果只用一个元素就可以生成 I , 就称 I 是**主理想 (principal ideal)**.

Proposition 6.3. 设 R 是环, $S \subseteq R$ 非空, 则

$$(S) = \left\{ \sum_{i=1}^m a_i s_i b_i \mid a_i, b_i \in R, s_i \in S, 1 \leq i \leq m, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Proof. 记等式右侧的集合为 I , 设 J 是环 R 的一个理想且满足 $J \supseteq S$. 根据理想的定义, 对任意的 $a_i, b_i \in R$ 以及 $s_i \in S$, 均有 $a_i s_i b_i \in J$. 因此, 对任意的自然数 m , 都有 $\sum_{i=1}^m a_i s_i b_i \in J$, 从而 $J \supseteq I$. 所以如果 I 的确是理想, 则其必定是最小的. 下面证明 I 确为理想, 根据定义有 $(S) \supseteq I$, 且通过直接验证发现 I 是理想. 综上 $(S) = I$. □

Definition 6.11. 设 I, J 均是环 R 的理想, 定义

- $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$ 为理想 I 与 J 的和;

Chapter 6. 环论速成课 (a crash course of ring theory)

• $IJ = \left\{ \sum_{i=1}^m a_i b_i \mid a_i \in I, b_i \in J, 1 \leq i \leq m, m \in \mathbb{N} \right\}$ 为理想 I 和 J 的积.

可以验证 $I + J$ 与 IJ 也是 R 的理想.

类似于 Thm. 2.2, 下面的定理给出商环的理想和母环的理想之间的关系.

Theorem 6.2 [理想对应定理]. 设 I 是环 R 的理想, 考虑商映射

$$\begin{aligned} j : R &\rightarrow R/I, \\ r &\mapsto \bar{r} = r + I, \end{aligned}$$

- 设 T 是 R/I 的理想, 记 $j^{-1}(T) = \{r \in R \mid j(r) \in T\}$, 则 $j^{-1}(T)$ 是包含 I 的理想;
- 设 J 是 R 的理想, 记 $J/I = \{a + I \mid a \in J\} \subseteq R/I$, 则 J/I 是 R/I 的理想;
- 有如下一一对应关系:

$$\begin{aligned} \{T \mid T \text{ 是 } R/I \text{ 的理想}\} &\leftrightarrow \{J \mid J \text{ 是 } R \text{ 的理想且 } J \supseteq I\}, \\ T &\mapsto j^{-1}(T), \\ J/I &\leftarrow J. \end{aligned}$$

Proof. (1) 对任意的 $r \in I$, $j(r) = r + I = \bar{0} \in T$, 所以 $r \in j^{-1}(T)$, 即 $I \subseteq j^{-1}(T)$. 接着验证 $j^{-1}(T)$ 满足理想的定义, 取 $a, b \in j^{-1}(T)$, 从而 $j(a), j(b) \in T$, 因为 T 是 R/I 的理想, 所以 $j(a) - j(b) = j(a - b) \in T$, 这里用到了 j 作为加法群同态的性质, 从而 $a - b \in j^{-1}(T)$, 因此 $j^{-1}(T)$ 是 R 的加法子群, 再验证吸收性, 任取 $r \in R, a \in j^{-1}(T)$, 有 $j(r)j(a) = j(ra) \in T$, 从而 $ra \in j^{-1}(T)$ 满足吸收性, 故 $j^{-1}(T)$ 确实为包含 I 的 R 的理想.

(2) 任意的 $m, n \in J$, 因为 J 是 R 的理想, 从而 $m - n \in J$, 所以 $j(m - n) = j(m) - j(n) \in J/I$, 从而 J/I 是 R/I 的加法子群, 任取 $\bar{a} \in J/I, \bar{b} \in R/I$, 因为 J 是 R 的理想, 所以 $ab \in J$, 所以 $\bar{a}\bar{b} = j(a)j(b) = j(ab) \in J/I$, 满足吸收系, 从而 J/I 是 R/I 的理想.

(3) 符号均使用定理中的, 定义 $\Phi : T \mapsto j^{-1}(T), \Psi : J \mapsto J/I$. 前面已经证明了 Φ 和 Ψ 均是良定义的, 为了证明确有一一对应关系, 我们需要证明 $\Psi \circ \Phi = \text{id}$ 和 $\Phi \circ \Psi = \text{id}$.

- 先证明 $\Psi \circ \Phi = \text{id}$, 因为

$$\Psi(\Phi(T)) = \Psi(j^{-1}(T)) = j^{-1}(T)/I = \text{id}(T) = T,$$

我们要证明 $j^{-1}(T)/I = T$.

6.2. 理想与商环

- 证明: $j^{-1}(T)/I \subseteq T$: 任取 $\bar{r} \in j^{-1}(T)/I$, 有 $\bar{r} = r + I \in j^{-1}(T)/I$, 其中 $r \in j^{-1}(T)$, 故 $j(r) = r + I = \bar{r} \in T$.
- 证明: $T \subseteq j^{-1}(T)/I$: 任取 $\bar{r} \in T$, 存在某个 $r \in R$ 使得 $\bar{r} = r + I$, 所以 $r \in j^{-1}(T)$, $\bar{r} \in j^{-1}(T)/I$.

我们再证明 $\Phi \circ \Psi = \text{id}$, 因为

$$\Phi(\Psi(J)) = \Phi(J/I) = j^{-1}(J/I) = \text{id}(J) = J,$$

我们要证明 $j^{-1}(J/I) = J$.

- 证明: $j^{-1}(J/I) \subseteq J$: 任取 $r \in j^{-1}(J/I)$, 有 $j(r) = \bar{r} = r + I \in J/I$, 从而存在 $a \in J$, 使得 $r + I = a + I$, 即 $r - a \in I$, 根据理想的定义 $r = (r - a) + a \in J$, 这是因为 $r - a, a \in J$.
- 证明: $J \subseteq j^{-1}(J/I)$: 任取 $r \in J$, 因为 $j(r) = \bar{r} = r + I \in J/I$, 所以 $r \in j^{-1}(J/I)$.

综合以上, 命题得证. □

Proposition 6.4. 设 R 是非零含么交换环, 则 R 是一个域当且仅当 R 只有平凡的两个理想 $\{0\}$ 和 R .

Proof. 设 R 是域, I 是 R 的一个非零理想, 则存在非零元 $a \in I$, 以及存在 a^{-1} . 根据理想的吸收性, $aa^{-1} \in I$, 由 **Prop. 6.2**, $I = R$.

反之, 设 R 只有两个理想 $\{0\}$ 和 R . 对非零 $a \in R$, 考虑由 a 生成的理想 $I = (a) = \{ra \mid r \in R\}$ (见 **Prop. 6.3**), 因为 $a \in I$, 所以 $I \neq \{0\}$, 所以 $I = R$, 所以 $1 \in I$, 所以存在 $b \in R$, 使得 $1 = ba$. 因为 R 含么交换, 所以 $ab = ba = 1$, 即 a 是单位. 所以 $R^* = R \setminus \{0\}$, 所以 R 是域. □

Example. $\mathbb{Z}$ 的加法子群是 $n\mathbb{Z}$, 可以验证构成是 $\mathbb{Z}$ 的全部理想, 商环

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{n-1}\}$$

称为模 n 剩余类环, 是有限环. 设 p 为素数, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 是一个域, 由 **Prop. 6.4** 知.

Definition 6.12 [极大理想 (maximal ideal), 素理想 (prime ideal)]. 设 R 是环. 非全环 R 的理想 I 称为极大理想, 如果任意的 J 是 R 的理想且 $J \supseteq I$, 则 $J = I$ 或 $J = R$. 非全环 R 的理想 P 称为素理想, 如果任意的 $a, b \in R \setminus P$, 均有 $ab \notin P$.

极大理想 I 类似正整数的极大因子, 商环 R/I 类似正整数商去了极大因子, 从而没有非平凡因子. 素理想相当于完全分离了自身和其补集, 使得两部分在加法和乘法运算下各自封闭, 以及自身作为理想具有吸收性, 使得自身的元素与补集的元素相乘会回到自身; 相较之下, 普通的理想虽然也有吸收性, 但是补集内部乘法下可能进入其中, 也就是补集在乘法下不是封闭的.

Chapter 6. 环论速成课 (a crash course of ring theory)

Proposition 6.5. 设 R 是含么交换环, 则理想 I 极大当且仅当 R/I 是域, 理想 P 是素的当且仅当 R/P 是整区. 特别的, 每个极大理想均是素的.

Proof. (1) 我们先证明理想 I 极大当且仅当 R/I 是域.

- 设 I 极大, 则 R/I 是非零含么交换环. 由 **Thm. 6.2**, R/I 只有 $\{0\}$ 和 R/I 这两个理想 (如不然, 即有非平凡理想 T , 其商映射原像 $j^{-1}(T)$ 是严格大于 I 的理想, 与 I 极大矛盾), 再由 **Prop. 6.4**, R/I 是域.
- 设 R/I 是域, 由 **Prop. 6.4**, R/I 只有平凡理想, 由 **Thm. 6.2**, 这两个平凡理想按商映射原像一一对应于 R 和 I , 为 R 的包含 I 的全部理想, 故 I 极大.

(2) 再证明理想 P 是素的当且仅当 R/P 是整区.

- 设 P 是素的, 任取非零的 $a+I, b+I \in R/P$, 也就是 $a, b \notin P$. 乘法 $(a+P)(b+P) = ab+P$, 反证法, 假设 R/P 不是整的, 则存在 $a+P, b+P$ 使得 $(a+P)(b+P) = ab+P = P$, 即 $ab \in P$, 那么 $a \in P$ 或者 $b \in P$, 矛盾.
- 设 R/P 是整区, 所以任取非零的 $a, b \notin P$, 也就是 $a+P, b+P \in R/P$ 非零, 乘法 $(a+P)(b+P) = ab+P$ 满足 $ab \notin P$, 从而 P 是素的.

命题得证. □

Proposition 6.6. 设 R 是么环, I 是 R 的理想, $j: R \rightarrow R/I$ 是商映射, T 是 R/I 的理想. 则 T 是 R/I 的极大理想/素理想当且仅当 $j^{-1}(T)$ 是 R 的极大理想/素理想.

Proof. (1) 先证明极大理想情形. 假设 $j^{-1}(T)$ 不是极大的, 也就是存在 J 使得

$$\begin{aligned} j^{-1}(T) \triangleleft J \triangleleft R \\ \iff T \triangleleft J/I \triangleleft R/I, \end{aligned}$$

从而 T 非极大, 矛盾.

(2) 再证明素理想情形. 先证明必要性:

- $j^{-1}(T) \neq R$: 如不然, 则 $T = R/I$, 与 T 是 R/I 的素理想矛盾;
- 任取 $a, b \in R \setminus j^{-1}(T)$, 有 $\bar{a} = j(a), \bar{b} = j(b) \in (R/I) \setminus T$, 所以 $\bar{a}\bar{b} = (a+I)(b+I) = ab+I \neq I$, 从而 $ab \notin I$.

于是 T 是 R/I 的素理想. 再证明充分性:

6.3. 环的同态与同构

- $T \neq R/I$: 如不然, 则 $j^{-1}(T) = R$, 与 $j^{-1}(T)$ 是 R 的素理想矛盾;
- 任取 $\bar{a}, \bar{b} \in (R/I) \setminus T$, 则 $\bar{a}\bar{b} = (a+I)(b+I) = ab+I$, 这里 $a, b \in R \setminus j^{-1}(T)$ 且存在性被商映射 j 保证, 因为 $j^{-1}(T)$ 是 R 的素理想, 所以 $ab \notin j^{-1}(T) \supseteq I$, 所以 $\bar{a}\bar{b} \neq I$.

于是 R/I 是 T 的素理想. □

所以极大/素性质在商映射下保持.

6.3 环的同态与同构

如何刻画环的同态与同构关系. 从哲学上思考, 一定存在对象不同但是数学结构相同的环, 两者之间的等价关系用同构刻画. 另一方面, 我们也希望把群的同态和同构的概念拓展到环中. 下面给出具体的定义.

Definition 6.13 [环同态 (ring homomorphism), 环同构 (ring isomorphism)]. 设 R_1, R_2 是环, 若映射 $f: R_1 \rightarrow R_2$ 满足: 对任意的 $a, b \in R_1$,

- $f(a+b) = f(a) + f(b)$;
- $f(ab) = f(a)f(b)$;
- 当 R_1, R_2 均含幺时, $f(1) = 1$ 或 0 ;

则称 f 为从 R_1 到 R_2 的**环同态**. 若还满足 f 是双射, 则称 f 为从 R_1 到 R_2 的**环同构**, 并记 $R_1 \cong R_2$.

Remark. 上面的 1 同时指代 R_1, R_2 中的幺元, 0 是 R_2 中的零元. 不至混淆时常如此记以求简洁.

Remark. 代数无非是多了线性结构的环, 因此所谓**代数同态 (algebra homomorphism)** 和**代数同构 (algebra isomorphism)** 无非就是 $\mathbb{R}$ -线性的环同态和同构. 注意, 有些文献不要求代数满足结合律, 此时**代数同态**定义为保持乘法的线性映射.

注意到, 当 $f(1) = 0$ 时, 整个环都被同态到 0, 称此时为零同态. 当 R_1, R_2 有一个不含幺元时, 同态不要求上述第三点.

Example. 设 I 是环 R 的理想, 则商映射 $j: R \rightarrow R/I, r \mapsto \bar{r} = r + I$ 是满的环同态.

Chapter 6. 环论速成课 (a crash course of ring theory)

Example. 设 R 是幺环, 幺元为 1, 定义映射 $i: \mathbb{Z} \rightarrow R$, 对任意的 $n \in \mathbb{Z}$,

$$i(n) = \begin{cases} \underbrace{1 + \cdots + 1}_n, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ \underbrace{(-1) + \cdots + (-1)}_{-n}, & n < 0. \end{cases}$$

则 i 是环同态, 其是从 $\mathbb{Z}$ 到 R 的唯一的非零环同态.

Example. 设 a 是整数且 $a \equiv 3 \pmod{4}$, 则方程 $x^2 + y^2 = a$ 没有整数解. 可以这样证明: 假设有整数解, 考虑环同态 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, 我们有方程 $u^2 + v^2 = \bar{3}$ 在剩余类环 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 中有解, 而对于任意的 $u \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, 均有 $u^2 = \bar{0}$ 或 $\bar{1}$, 所以 $u^2 + v^2 \neq \bar{3}$, 矛盾.

回想群同态, 同态核是正规子群, 这个性质并不平凡. 这个奇妙的性质是否有相应的环论版本? 考虑到在环中, 理想扮演的角色类比为正规子群之于群论, 我们推测环的同态核应该是理想.

Definition 6.14 [环的同态核与像]. 设 $f: R_1 \rightarrow R_2$ 是环同态. 定义 $\ker f := \{a \in R_1 \mid f(a) = 0\}$ 为 f 的核, $\operatorname{im} f = \{f(a) \mid a \in R_1\}$ 为 f 的像.

Proposition 6.7. 设 $f: R_1 \rightarrow R_2$ 是非零环同态, 则 $\ker f$ 是 R_1 的理想, $\operatorname{im} f$ 为 R_2 的子环.

Proof. 按照定义验证即可. □

类似于 **Thm. 2.1**, 我们同时也有同态基本定理的环论版本, 可以简单理解为把群论版本的正规子群替换为理想.

Theorem 6.3 [环同态基本定理]. 设 R_1, R_2 是幺环, $f: R_1 \rightarrow R_2$ 是非零环同态, 则有环同构

$$\begin{aligned} \tilde{f}: R_1 / \ker f &\rightarrow \operatorname{im} f, \\ a + \ker f &\mapsto f(a). \end{aligned}$$

Proof. 由群同态基本定理 2.1, $\tilde{f}$ 是加法群同构, 只要验证 $\tilde{f}$ 是环同态, 即验证乘法的封闭性. 任取 $\bar{a}, \bar{b} \in R_1 / \ker f$, 有

$$\tilde{f}(\bar{a}\bar{b}) = \tilde{f}(\overline{ab}) = f(ab) = f(a)f(b) = \tilde{f}(\bar{a})\tilde{f}(\bar{b}),$$

从而 $\tilde{f}$ 是环同态, 进而是环同构. □

6.3. 环的同态与同构

类似于 [Cor. 2.1](#), 作为同态基本定理的推论, 有同构定理.

Corollary 6.1 [环同构定理]. 设 R 是么环, $I, J \trianglelefteq R, I \trianglelefteq J, S \leq R$, 则

- 第一定理: $J/I \trianglelefteq R/I$, 且

$$(R/I)/(J/I) \cong R/J.$$

- 第二定理: $I \trianglelefteq S+I \leq R, S \cap I \trianglelefteq S$, 且存在自然的环同构

$$\begin{aligned} f: (S+I)/I &\xrightarrow{\sim} S/(S \cap I), \\ a+b+I &\mapsto a+S \cap I, \end{aligned}$$

其中 $a \in S, b \in I$.

Remark. 正规子群的正规子群不一定是母群的正规子群: 即

$$K \trianglelefteq H \trianglelefteq G \not\Rightarrow K \trianglelefteq G.$$

同理, 理想的理想不一定是母环的理想.

这里稍作解读: (1) 第一定理说明, 理想关系在商映射下具有某种遗传性, 且对商集的商运算某种程度上可以像普通的分数一样运算; (2) 第二定理中, $S+I$ 的定义类同 [Def. 6.11](#), 但此处 S 是子环, 该定理刻画了子环和理想的和, 交的一些性质, 下图可辅助记忆,

$$\begin{array}{ccccc} & R & & R & \\ & \nabla I & & \nabla I & \\ I & \trianglelefteq & S+I & \leq & R \\ & \nabla I & & & \\ & S \cap I & & & \end{array}$$

其中第一个中间行的关系为条件, 其余关系均为结论.

Proof. 我们依次证明两个定理.

(1) 根据 [Thm. 6.2](#) 可知, $J/I \trianglelefteq R/I$. 定义映射

$$\begin{aligned} f: R/I &\rightarrow R/J, \\ r+I &\mapsto r+J, \end{aligned}$$

我们只需证明三件事:

Chapter 6. 环论速成课 (a crash course of ring theory)

- f 是良定义的: 任取 r, r' 满足 $r + I = r' + I$ 即 $r - r' \in I$, 因为 $I \subseteq J$, 从而 $r - r' \in J$, 所以

$$r + I \mapsto r + J = r' + J \leftarrow r' + I.$$

- f 是满的环同态: 取 r 遍历 R 可验证满性; 又可以验证 [Def. 6.13](#).
- $J/I = \ker f$: 因为 $\ker f = \{r + I \mid r + I = J\} = \{r + I \mid r \in J\} = J/I$.

然后由 [Thm. 6.3](#) 即得.

(2) $I \leq S + I$ 自明. 现说明 $S + I \leq R$, 加法子群由 [Cor. 2.1](#) 可知, 乘法子含么半群可验证之. 再说明 $S \cap I \leq S$, 加法子群由 [Cor. 2.1](#) 保证, 吸收性如此验证, 任取 $a \in S \cap I, b \in S$, 有 $ab \in S$ 因为 S 是子环, $ab \in I$ 因为理想 I 的吸收性. 最后我们证明那个环同构, 考虑

$$\begin{aligned} g : S + I &\rightarrow S/(S \cap I), \\ a + b &\mapsto a + S \cap I, \end{aligned}$$

其中 $a \in S, b \in I$.

- g 是良定义的: 若 $a + b = a' + b'$, 其中 $a, a' \in S, b, b' \in I$, 则 $a - a' = b' - b \in S \cap I$ ($a - a' \in S, b' - b \in I$ 且 $a - a' = b' - b$), 所以 $a + S \cap I = a' + S \cap I$.
- $\ker g = I$: 因为

$$\begin{aligned} \ker g &= \{a + b \mid a \in S, b \in I, a + S \cap I = S \cap I\} \\ &= \{a + b \mid a \in S \cap I, b \in I\} \\ &= I, \end{aligned}$$

最后一步取 b 遍历 I 即可.

然后运用 [Thm. 6.3](#) 即可. □

如果环同态的起点是一个域的话, 会得到一些额外的性质, 下述命题稍作讨论.

Proposition 6.8. 设 F 是一个域, R 是一个么环, $f : F \rightarrow R$ 是非零环同态, 则

- f 是单射, R 的子环 $\text{im } f$ 同构于 F ;
- 若 R 也是一个域, 则对任意非零 $a \in F$, 均有 $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

Proof. (1) 我们知道 $\ker f$ 是 F 的理想, 因为 F 是域, 根据 [Prop. 6.4](#) 可知其只有平凡理想. 因为 f 非零, 所以 $\ker f = \{0\}$, 从而是单射. 根据环同态基本定理 [Thm. 6.3](#), $F \cong \text{im } f$.

(2) 考虑 f^* 为 f 限制在 $R \setminus \{0\}$ 上, 从而 f^* 是乘法群同态, 即可. □

6.4. 域的特征

Proposition 6.9. 设 A 是域 $\mathbb{F}$ 上的含么代数, 则存在唯一的么环同态

$$\varphi : \mathbb{F} \rightarrow Z(A), \quad k \mapsto k \cdot \text{id}_A.$$

Proof. 对任意 $k \in \mathbb{F}$, 定义 $\varphi(k) := k1_A$. 先证 $\varphi(k) \in Z(A)$. 任取 $a \in A$, 由代数定义分别令 $b = 1_A$ 与 $a = 1_A$, 可得 $(k1_A)a = k(1_Aa) = ka$, 以及 $a(k1_A) = k(a1_A) = ka$. 因而 $(k1_A)a = a(k1_A)$, $\forall a \in A$, 这说明 $k1_A \in Z(A)$, 故 $\varphi(\mathbb{F}) \subseteq Z(A)$. 再证 φ 是环同态. 对任意 $k, l \in \mathbb{F}$, 由线性空间结构知

$$\varphi(k + l) = (k + l)1_A = k1_A + l1_A = \varphi(k) + \varphi(l).$$

又由代数定义, 取 $a = l1_A$, $b = 1_A$, 则

$$(kl)1_A = k(l1_A) = (k1_A)(l1_A) = \varphi(k)\varphi(l).$$

即 $\varphi(kl) = \varphi(k)\varphi(l)$. 此外, $\varphi(1_{\mathbb{F}}) = 1_{\mathbb{F}}1_A = 1_A$. 故 φ 为么环同态. 综上, φ 的像落在 $Z(A)$ 中, 因此得到么环同态 $\mathbb{F} \rightarrow Z(A)$, $k \mapsto k1_A$. $\square$

Example 19. 说明四元数体 $\mathbb{H}$ 不是 $\mathbb{C}$ -代数.

Proof. 假若四元数体 $\mathbb{H}$ 是 $\mathbb{C}$ -代数, 则根据上述命题, $\mathbb{C}$ 可以被嵌入 $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$, 这是不可能的. $\square$

6.4 域的特征

作为必要的, 下两节介绍域的特征和主理想整区, 作为讨论模的铺垫. 以及这部分在群表示论中也有相关运用.

设 F 是域, 考虑 $\mathbb{Z} \rightarrow F$ 的环同态

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow F, \quad f(n) = n \cdot 1_F,$$

则 $\ker f = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \cdot 1_F = 0\}$ 是理想. 所以 $\ker f = \{0\}$ 或 $p\mathbb{Z}$, p 是素数. 关于为什么 p 只能取素数, 将在 **Prop. 6.11** 解答.

称域 F 是**特征为 0** 的, 如果 $\ker f = \{0\}$, 记作 $\text{char} F = 0$.

Proposition 6.10. 设域 F 特征为 0, 则

- F 的一个最小子域同构于有理数域 $\mathbb{Q}$;

Chapter 6. 环论速成课 (a crash course of ring theory)

- 设 $n \in \mathbb{Z}$, $a \in F$, 则 $na = 0$ 当且仅当 $n = 0$ 或者 $a = 0$.

Remark. 此命题相当重要, 至少告诉我们以下事实:

- $\mathbb{Q}$ 是最小的特征零的域, 同构意义下;
- 特征零的域一定是无限域;
- 特征零的域不是加法循环群.

关于第三点, 在群表示论的 *Maschke* 定理 *Thm. 10.2* 中非常重要.

Proof. (1) 根据 $\text{char} F = 0$, 所以环同态 $f: \mathbb{Z} \rightarrow F$, $f(n) = n \cdot 1_F$ 是单射. 定义 $\tilde{f}: \mathbb{Q} \rightarrow F$, $\tilde{f}(\frac{a}{b}) = f(a)f(b)^{-1}$. 直接验证知 $\tilde{f}$ 是环同态. 由于 $\mathbb{Q}$ 是域, 根据 *Prop. 6.8*, $\tilde{f}$ 是单的, 且 $\mathbb{Q} \cong \text{im } \tilde{f} = \tilde{f}(\mathbb{Q})$. 下面说明 $\tilde{f}(\mathbb{Q})$ 是最小的子域. 考虑 K 是 F 的子域, 则 $0, 1_F \in K$, 从而任意非零整数 n , 均有 $(n \cdot 1_F), (n \cdot 1_F)^{-1} \in K$, 所以 $\tilde{f}(\mathbb{Q}) \subseteq K$.

(2) 只证必要性. 设 $na = 0$, $n \neq 0$, 因为 $\text{char} F = 0$, 所以 $n \cdot 1_F \neq 0$, 所以 $n \cdot 1_F$ 是 F 的单位, 故 $na = (n \cdot 1_F) a$, $a = (n \cdot 1_F)^{-1} \cdot na = 0$. $\square$

我们现在回答本节开头的问题.

Proposition 6.11. 设 F 是域, 环同态 $f: \mathbb{Z} \rightarrow F$, $f(n) = n \cdot 1_F$ 对 $\ker f = m\mathbb{Z}$, ($m \geq 1$), 一定有 m 是个素数.

Proof. 反证法, 假设 $m = m_1 m_2$, $1 \leq m_1, m_2 < m$, 则 $m_1, m_2 \notin m\mathbb{Z}$, 且

$$0 = f(m) = f(m_1 m_2) = f(m_1) f(m_2),$$

因为 F 是域, 所以 $f(m_1) = 0$ 或者 $f(m_2) = 0$, 进而 $m_1 \in m\mathbb{Z}$ 或者 $m_2 \in m\mathbb{Z}$, 矛盾. $\square$

依据以上命题, 我们给出一般的特征的定义.

Definition 6.15 [特征]. 若 $\text{Ker } f = p\mathbb{Z}$, p 是素数, 称域 F 的特征是 p , 记作 $\text{char} F = p$.

Remark. 同理可定义环和代数的特征, 总的来说就是么元自加到零元的次数.

Prop. 6.10 对有限特征域有以下版本.

Proposition 6.12. 设域 F 特征为 p , p 是素数, 则

- F 的一个最小的子域同构于 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$;
- 设 $n \in \mathbb{Z}$, $a \in F$, 则 $na = 0$ 当且仅当 $p \mid n$ 或者 $a = 0$.

Proof. (1) 因为 $\text{char} F = p$, 即 $\ker f = p\mathbb{Z}$, 由环同态基本定理 *Thm. 6.3*, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \text{im } f$, 而 $\text{im } f$ 是 F 的子域. 考虑 K 是 F 的子域, 则 $0, 1_F \in K$, 从而对任意非零整数 n , $n \cdot 1_F \in K$, 所以 $\text{im } f \subseteq K$.

(2) 若 $a = 0$, 则 $na = 0$. 若 $p \mid n$, 设 $n = pm$, 则 $na = m(pa) = m((p \cdot 1_F) \cdot a) = m(0 \cdot a) = 0$. 下面设 $na = 0$, $p \nmid n$. 根据带余除法, $n = pq + r$, $q \in \mathbb{Z}$, $0 < r < p$. 所以 $r \notin p\mathbb{Z} = \ker f$, $r \cdot 1_F$ 是 F 中的单位. 因此 $0 = na = (pq + r)a = ra = (r \cdot 1_F) \cdot a$, $a = (r \cdot 1_F)^{-1} \cdot (ra) = 0$. $\square$

下面的定义说明特征 p 和特征 0 的域在性质上的不同.

Theorem 6.4. 设 F 是域, p 为素数, $\text{char} F = p$, 则对任意的 $a, b \in F$ 和正整数 n , 均有

$$(a + b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}.$$

Proof. 当 $n = 1$ 时, 我们可以证明 $p \mid C_p^i$. 交叉项系数满足

$$C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!} = \frac{p(p-1) \cdots (p-i+1)}{i!},$$

因为 p 是素数, $i < p$, 所以分子中含 p 因子, 而分母不含, 即 $p \mid C_p^i$.

归纳法. 假设命题对 $n-1$ 成立, 则

$$(a + b)^{p^n} = \left((a + b)^{p^{n-1}} \right)^p = \left(a^{p^{n-1}} + b^{p^{n-1}} \right)^p = \left(a^{p^{n-1}} \right)^p + \left(b^{p^{n-1}} \right)^p = a^{p^n} + b^{p^n}.$$

得到对 n 也成立, 所以对所有正整数 n 均成立. $\square$

* 6.5 主理想整区

主理想整区研究的动机, 很大一部分来自于对模的分类. 对于主理想整区上的模, 很大程度上继承了线性代数中的性质, 这的确是我们希望看见的, 因为我们预期模是线性空间的推广, 性质上的保留是我们希望的. 对于不是主理想整区上的环, 其很多性质都会丢失, 例如基底可能无法定义.

Chapter 6. 环论速成课 (a crash course of ring theory)

Definition 6.16 [主理想整区 (principal ideal domain, PID)]. 设 R 是一个整区, 若 R 的每个理想都是主理想, 则称 R 为主理想整区.

Proposition 6.13. 若 R 是主理想整区, 则 R 的非零素理想均极大.

Proof. 若 $P = (a)$ 是 R 的一个非零素理想, $a \in R$ 非零. 若 P 非极大, 则存在理想 $M = (b)$ 满足 $M \neq R, M \neq P$ 且 $P \subseteq M$. 因为 $a \in M$, 故存在 $c \in R$ 使得 $a = bc$. 因为 (a) 是素理想, 根据素理想的定义, 必有 $b \in (a)$ 或者 $c \in (a)$. 若 $b \in (a)$, 说明 $P = (a)$ 包含 $(b) = M$, 矛盾. 若 $c \in (a)$, 则存在 $d \in R$ 使得 $c = da$. 由此得

$$a = bc = bda.$$

由于 R 是整区且 $a \neq 0$, 所以 $bd = 1$. 此时 b 是单位, 故 $M = (b) = R$, 矛盾. $\square$

作为一个十分重要的主理想整区的例子, 下面介绍 Euclid 整区.

Definition 6.17 [Euclid 整区 (Euclidean domain)]. 设 R 是整区, 称 R 是 **Euclid 整区**, 如果存在函数 $\varphi: R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 满足: 对任意的 $a, b \in R, b \neq 0$, 存在 $q, r \in R$ 使得 $a = bq + r$ 且 $r = 0$ 或者 $\varphi(r) < \varphi(b)$.

定义式中的 q 被称作 a 除以 b 的商, r 被称作余数. 直观地说, Euclid 整区就是可以做带余除法的环.

Theorem 6.5. Euclid 整区是主理想整区.

Proof. 设 I 是非零理想, $d = \min \{\varphi(a) \mid a \in I \setminus \{0\}\}$, 这里的 φ 是 Def. 6.17 中的. 根据此构造, 存在非零元素 $b \in I$, 使得 $\varphi(b) = d$. 下面证明 $I = (b)$. 因为 $b \in I, (b) \subseteq I$, 故只需证 $I \subseteq (b)$. 对于任意的 $a \in I$, 根据带余除法的性质, 存在 $q \in R$, 使得 $a = qb + r$, 其中 r 是余数, 满足 $r = 0$ 或者 $\varphi(r) < \varphi(b)$. 注意到 $r = qb - a$, 由于 $a, b \in I$, 所以 $r \in I$. 由于 $\varphi(b)$ 是集合中的最小值, 断定 $r = 0$, 从而 $a = qb, a \in (b)$. $\square$

6.6 多项式环

本节是对多项式环的一个引入, 更多的讨论会在 ?? 中继续.

Definition 6.18 [环上的多项式]. 设 R 是一个环, 考虑

$$R[x] := \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i \mid a_i \in R, 0 \leq i \leq n, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\},$$

其中 x 是未定元. 在 $R[x]$ 上自然地定义如下二元运算:

- 多项式加法:

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{i=0}^n b_i x^i := \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i$$

并可令 a_i, b_i 取 0 定义不同次数间多项式的加法;

- 多项式乘法

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right) \left(\sum_{j=0}^m b_j x^j \right) := \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} x^k.$$

如上定义的 $R[x]$ 构成环, 称为 R 上的一元多项式环, 满足性质

- 若 R 含幺元 1, 则 $R[x]$ 也含幺元 $f(x) = 1$;
- $R[x]$ 交换当且仅当 R 交换.

寻此定义可知, 这是我们熟知的 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上一元多项式的推广, 且该概念可以运用到一般的数域上, 考虑有限特征数域, 则 Thm. 6.4 的一个推论如下.

Corollary 6.2. 设 F 是域, p 为素数, $\text{char} F = p$, $F[x]$ 是 F 上的一元多项式环. 对任意 $f(x), g(x) \in F[x]$ 和正整数 n , 均有

$$(f(x) + g(x))^{p^n} = f(x)^{p^n} + g(x)^{p^n}.$$

类似微积分中所熟悉的, 定义多项式 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in R[x]$ 的**次数**为 $\deg f := \max_{0 \leq m \leq n} \{m : a_m \neq 0\}$. 对 $f = 0$, 一般约定 $\deg f = -\infty$. 通过乘法很容易验证 $\deg(fg) = \deg f + \deg g$.

考虑环 R 的双边理想 $I \trianglelefteq R$, 容易知道 $I[x] \trianglelefteq R[x]$ 也是双边理想. 逐项验证可知, $I[x]$ 关于加法构成子群, 关于乘法构成子半群, 且满足吸收性 — 每个系数都是理想中的元素, 可以系数其他与其相乘的系数到理想中.

Chapter 6. 环论速成课 (a crash course of ring theory)

Proposition 6.14. 设 R 是含么交换环, $I \trianglelefteq R$ 是双边理想, $j : R \rightarrow R/I$ 是自然的商同态, 定义其多项式延拓 $j : R[x] \rightarrow (R/I)[x]$: 对 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in R[x]$, 定义 $j(f(x)) = j(a_n)x^n + \cdots + j(a_0)$. 我们有 j 诱导的环同构 $R[x]/I[x] \cong (R/I)[x]$.

Proof. 延拓了的 j 显然是环同态, 且满射, 因为任意 $\sum_{k=0}^n (a_k + I)x^k \in (R/I)[x]$ 都是 $\sum_{k=0}^n a_k x^k \in R[x]$ 的像. $j\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right) = 0$ 等价于 $j(a_k) = 0$ 对一切 k 均成立, 也等价于 $a_k \in I$ 对一切 k 均成立, 也等价于 $\sum_{k=0}^n a_k x^k \in I[x]$. 故 $\ker j = I[x]$. 由环同构第一定理, $R[x]/I[x] \cong (R/I)[x]$. $\square$

Theorem 6.6 [带余除法]. 设 R 是含么交换环, 非零 $f(x) \in R[x]$ 有首项非零表达式 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, 则对任意多项式 $g(x) \in R[x]$, 存在唯一的 $q(x), r(x) \in R[x]$ 使得

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x),$$

且 $r(x) = 0$ 或 $\deg r(x) < \deg f(x)$. 称 $q(x)$ 是商式, $r(x)$ 是余式.

Proof. 记 $n = \deg f$.

存在性: 对 $\deg g$ 作归纳. 若 $g = 0$, 取 $q = r = 0$. 设 $g \neq 0$, 记 $m = \deg g$. 若 $m < n$, 取 $q = 0, r = g$ 即可. 若 $m \geq n$, 设 b_m 是 g 的首项系数, 令

$$g_1(x) = g(x) - a_n^{-1} b_m x^{m-n} f(x).$$

由于 $a_n^{-1} b_m x^{m-n} f(x)$ 与 $g(x)$ 的首项同为 $b_m x^m$, 故 $g_1 = 0$ 或 $\deg g_1 < m$. 由归纳假设, 存在 $q_1, r \in R[x]$, 使 $g_1 = q_1 f + r, r = 0$ 或 $\deg r < n$. 于是

$$g = (q_1 + a_n^{-1} b_m x^{m-n})f + r,$$

取 $q = q_1 + a_n^{-1} b_m x^{m-n}$ 即得所求.

唯一性: 若 $g = q_1 f + r_1 = q_2 f + r_2$, 其中 $r_i = 0$ 或 $\deg r_i < n$, 则 $(q_1 - q_2)f = r_2 - r_1$. 若 $q_1 \neq q_2$, 则

$$\deg((q_1 - q_2)f) = \deg(q_1 - q_2) + n \geq n,$$

因而 $\deg(r_2 - r_1) \geq n$. 但另一方面 $r_2 - r_1 = 0$ 或 $\deg(r_2 - r_1) < n$, 矛盾. 故 $q_1 = q_2$, 从而 $r_1 = r_2$. $\square$

6.6. 多项式环

Definition 6.19 [代数闭域 (algebraically closed field)]. 设 F 是域, 称 F 是代数闭域, 如果对任意非常数多项式 $f(x) \in F[x]$, 均存在 $x_0 \in F$ 使得 $f(x_0) = 0$. 这样的 x_0 称为这个多项式 $f(x)$ 的根.

代数闭域在物理学中十分必要, 正如虚数的引入最开始就是为了解决方程在非代数闭域的 $\mathbb{R}$ 内无解的问题, 科学实践中确保解的理论存在性十分重要, 这就是为什么 $\mathbb{C}$ 作为代数闭域而被广泛使用最重要的原因.

Theorem 6.7 [代数学基本定理 (fundamental theorem of algebra)]. $\mathbb{C}$ 代数闭, 从而其上的多项式均可完全因式分解.

Proof. 这里引用复变函数中的 *Liouville* 定理: 任意有界整函数必为常数. 设

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[z], \quad a_n \neq 0, \quad n \geq 1.$$

我们先证明 f 在 $\mathbb{C}$ 中至少有一个根. 反证. 假设 $f(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$. 则函数 $g(z) := \frac{1}{f(z)}$ 在整个复平面上处处有定义, 且是整函数. 下面证明 g 有界. 由于

$$f(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right),$$

当 $|z| \rightarrow \infty$ 时, $\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \rightarrow 0$. 因此存在 $R > 0$, 使得当 $|z| > R$ 时,

$$\left| \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| < \frac{|a_n|}{2}.$$

于是对任意满足 $|z| > R$ 的 z , 由三角不等式可得

$$\left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| \geq |a_n| - \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| > \frac{|a_n|}{2}.$$

从而

$$|f(z)| = |z|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| > \frac{|a_n|}{2} |z|^n,$$

即 $|g(z)| = \frac{1}{|f(z)|} < \frac{2}{|a_n| |z|^n}, |z| > R$. 这说明 g 在圆盘外部有界. 另一方面, 闭圆盘 $\overline{D(0, R)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ 是紧集, 而 g 连续, 故 g 在其上有界. 于是 g 在整个 $\mathbb{C}$ 上有界. 根据 *Liouville* 定

Chapter 6. 环论速成课 (a crash course of ring theory)

理, g 必为常数. 于是 $f = 1/g$ 也是常数, 这与 f 是非常数多项式矛盾. 故假设不成立, 从而 f 在 $\mathbb{C}$ 中至少有一个根. 下面证明完全分解. 设 $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ 是 f 的一个根, 即 $f(\lambda_1) = 0$. 由因式定理,

$$f(x) = (x - \lambda_1)f_1(x), \quad f_1(x) \in \mathbb{C}[x],$$

且 $\deg f_1 = n - 1$. 若 f_1 仍非常数, 再次应用上面的结论, f_1 在 $\mathbb{C}$ 中也有一个根 λ_2 , 因而 $f_1(x) = (x - \lambda_2)f_2(x)$. 如此继续下去, 经过有限步后得到

$$f(x) = a_n(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n), \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}.$$

这就证明了 $\mathbb{C}$ 是代数闭域, 且其上的非常数多项式都可完全分解为一次因子的乘积. $\square$

6.7 环的可解性

研究环和模的一大动机来自群表示理论, 关于模的定义, 通俗地说就是「环上的线性空间」, 正则模就是「环以自己为系数的线性空间」, 见 Def. 7.1. 研究域 K 上代数 A 的左正则模 A 时, 因为 A 自然成为 K 上的线性空间, 从而子模正是 A -不变子空间, 同时也是环 A 的左理想. 在线性代数中我们知道, 如果域 K 上的线性空间 V 有直和分解 $V = \bigoplus_i V_i$, 并用投影算符 P_i 表示 V 在 V_i 上平行于 $\bigoplus_{j \neq i} V_j$ 的投影, 那么 $1 = \sum_i P_i$, 这里诸 P_i 是两两正交的幂等算子, 从而 $V = \bigoplus_i \text{Im } P_i$,

反之亦然. 从环的角度看, 就是把环 A 分解为一些左理想的直和, 等价的就是寻找一系列两两正交的幂等元 e_i , 使得 $1 = \sum_i e_i$, 但注意无穷直和时暗含有限支撑的要求¹, 这里单位元 1 作为模的分量, 必须要求直和分解的分量只有有限个不为 0, 即要求环 A 的左理想直和分解用到的左理想个数有限. 所以我们只能研究有限个数左理想直和分解的情形!

Definition 6.20 [本原幂等元 (primitive idempotent)]. 幂等元 e 称为**本原的**, 如果其不能写成两个正交幂等元的和.

根据我们之前对线性空间与模和理想的类比讨论, 在有限左理想直和分解的情形下, 应该类同线性空间有下述结论:

Proposition 6.15. 设 R 是非零么环, 若其能进行有限非平凡左理想分解 $R = I_1 \oplus \cdots \oplus I_s$, 且 $1 = e_1 + \cdots + e_s$, 其中 $e_i \in I_i$, $i = 1, \dots, s$, 那么诸 e_i 构成 R 的一组正交幂等元, 且 $I_i = Re_i$. 反之, 设诸 e_j , $j = 1, \dots, t$ 构成 R 的一组正交幂等元, 记 $e = e_1 + \cdots + e_m$, 则 $Re = Re_1 \oplus \cdots \oplus Re_t$, 其中诸 Re_j 均为 R 的左理想.

¹ 见 Prop. 7.3, 当去掉有限支撑要求, 得到的其实是直积. 直和和直积的本质差别在于拥有的泛性质不同, 见 Subsec. 9.2.2.

6.7. 环的可解性

Proof. 考虑 $e_i = e_i 1 = e_i e_1 + \cdots e_i e_{i-1} + e_i^2 + e_i e_{i+1} + \cdots e_i e_s$, 根据左理想的左吸收性, $e_i e_j \in I_j$, $j = 1, \cdots, s$, 当分解是直和分解时, e_i 表示方式唯一, 所以只能 $e_i e_j = 0, i \neq j, e_i^2 = e_i$. 这就证明了诸 e_i 构成一组正交幂等元. 根据左理想的定义, 任取 $r \in R$, 均有 $re_i \in I_i$, 所以 $Re_i \subseteq I_i$. 任取 $r_i \in I_i$, 因为

$$r_i = r_i 1 = r_i e_1 + \cdots r_i e_{i-1} + r_i e_i + r_i e_{i+1} + \cdots + r_i e_s$$

是直和分解式, 所以 $r_i = r_i e_i \in Re_i$, 即 $I_i \subseteq Re_i$. 这就证明了 $I_i = Re_i$.

反之, 设诸 $e_j, j = 1, \cdots, t$ 构成一组正交幂等元, 显然 Re_i, Re 均为 R 的左理想. 考虑 $r \in R$, 有 $re = re_1 + \cdots + re_t \in Re_1 + \cdots + Re_t$, 因此 $Re \subseteq Re_1 + \cdots + Re_t$. 任取 $re_1 + \cdots + re_t \in Re_1 + \cdots + Re_t$, 有

$$r_1 e_1 + \cdots + r_t e_t = (r_1 e_1 + \cdots + r_t e_t) e \in Ae,$$

从而 $Re_1 + \cdots + Re_t \subseteq Ae$. 这样就证明了 $Re = Re_1 + \cdots + Re_t$. 任取 $ae \in Ae$, 则因为有分解, 所以能写成 $ae = a_1 e_1 + \cdots + a_t e_t$, 如果另有 $ae = b_1 e_1 + \cdots + b_t e_t$, 两个分解式同时右乘 e_j , 得

$$a_j e_j = b_j e_j,$$

所以表示方式唯一, 从而是直和分解. □

Definition 6.21 [可分解理想 (decomposable ideal)]. 环 R 的左理想 I 如果能进行非平凡左理想直和分解 就称其为可分解的, 若否称不可分解的.

Corollary 6.3. 设 $e \neq 1$ 为非零幺环 R 的幂等元, 则左理想 Re 不可分解当且仅当 e 本原.

Proof. 必要性: 若 Re 不可分解, 假若 e 不是本原的, 则存在正交幂等元分解 $e = e_1 + e_2$. 根据 **Prop. 6.15**, $Re = Re_1 \oplus Re_2$ 为非零左理想直和分解, 矛盾, 因而 e 本原.

充分性: 若 e 本原, 假若左理想 Re 可分解, 设 $Re = I_1 \oplus I_2$ 为非平凡左理想直和分解, 则有唯一分解式 $e = e_1 + e_2, e_1 \in I_1, e_2 \in I_2$. 注意到 $1 - e$ 和 e 构成正交幂等元, 根据 **Prop. 6.15**, 有

$$R = R(1 - e) \oplus Re = R(1 - e) \oplus I_1 \oplus I_2.$$

由于 $1 = (1 - e) + e_1 + e_2$, 根据 **Prop. 6.15**, $1 - e, e_1, e_2$ 是正交幂等元, 矛盾, 从而 Re 不可分解. □

注意, **Prop. 6.15** 和 **Cor. 6.3** 均可以得到双边理想和中心幂等元版本, 直接进行替换「左理想」 $\rightarrow$ 「双边理想」, 「幂等元」 $\rightarrow$ 「中心幂等元」即可.

对中心幂等元, 额外有性质:

Proposition 6.16. 非零幺环 R 的两个本原中心幂等元只能相等或正交.

Chapter 6. 环论速成课 (a crash course of ring theory)

非中心幂等元不必具有此性质, 例如取直积环的两个元 $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = (1, 1)$.

Proof. 设 e_1, e_2 是两个本原中心幂等元, 则

$$e_1 = e_1(e_2 + 1 - e_2) = e_1e_2 + e_1(1 - e_2), \quad (e_1e_2)^2 = e_1e_2,$$

$$[e_1(1 - e_2)]^2 = e_1(1 - e_2), \quad (e_1e_2)[e_1(1 - e_2)] = 0.$$

所以 $e_1e_2, e_1(1 - e_2) \in Z(R)$. 假若 $e_1e_2, e_1(1 - e_2) \neq 0$, 则 e_1 表示为了两个正交中心幂等元 e_1e_2 与 $e_1(1 - e_2)$ 的和, 与其本原性矛盾. 因此 $e_1e_2 = 0$ 或 $e_1(1 - e_2) = 0$, 后者意味着 $e_1 = e_1e_2$. 同理可证明 $e_2e_1 = 0$ 或 $e_2(1 - e_1) = 0$. 当不是 $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$ 时, 必有 $e_1 = e_1e_2 = e_2e_1 = e_2$. $\square$

Corollary 6.4. 如果非零幺环 R 满足 $1 = e_1 + \cdots + e_n$, 诸 e_i 为本原中心幂等元, $i = 1, \dots, n$, 则它们就是全部的本原中心幂等元.

Proof. 假若存在本原中心幂等元 $f \notin \{e_1, \dots, e_n\}$, 根据 **Prop. 6.16**, $fe_j = 0, j = 1, \dots, n$, 所以

$$f = f1 = fe_1 + \cdots + fe_n = 0,$$

矛盾, 因此不存在这样的 f . $\square$

* 6.8 Wedderburn 小定理

Definition 6.22 [分圆多项式 (cyclotomic polynomial)]. 设 $n \in \mathbb{N}_+$, 记 $\zeta = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, 称

$$\Phi_n(x) = \prod_{l=1, \gcd(l,n)=1}^n (x - \zeta^l)$$

为第 n 个分圆多项式.

Lemma 6.2. 设 $\Phi_n(x)$ 为第 n 个分圆多项式, $n \in \mathbb{N}$, 则:

- $x^n - 1 = \prod_{0 < d|n} \Phi_d(x)$;
- $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$;

6.8. Wedderburn 小定理

• 若 $n \geq 2$, 正整数 $m \mid n$ 且 $m < n$. 则在 $\mathbb{Z}[x]$ 中 $\Phi_n(x) \mid \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$.

Proof. 由定义, $x^n - 1$ 的根恰为全体 n 次单位根, 而每个 n 次单位根的阶唯一地等于某个 $d \mid n$, 故

$$x^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d(x).$$

由此对 n 作归纳. 当 $n = 1$ 时, $\Phi_1(x) = x - 1 \in \mathbb{Z}[x]$. 若对所有真因子 $d < n$ 已知 $\Phi_d(x) \in \mathbb{Z}[x]$, 则

$$\Phi_n(x) = \frac{x^n - 1}{\prod_{d \mid n, d < n} \Phi_d(x)} \in \mathbb{Q}[x].$$

由于右端分母在 $\mathbb{Z}[x]$ 中首一, 且整除 $x^n - 1 \in \mathbb{Z}[x]$, 由首一多项式除法知商仍在 $\mathbb{Z}[x]$, 故 $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

若 $m \mid n$ 且 $m < n$, 则由第一式

$$\frac{x^n - 1}{x^m - 1} = \frac{\prod_{d \mid n} \Phi_d(x)}{\prod_{d \mid m} \Phi_d(x)} = \prod_{d \mid n, d \nmid m} \Phi_d(x),$$

其中 $d = n$ 出现在右端, 故 $\Phi_n(x) \mid \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$. □

Theorem 6.8 [Wedderburn 小定理 (Wedderburn's little theorem)]. 有限除环是域.

Proof. 设 D 为有限除环, 其中心为 $F = Z(D)$, 记 $|F| = q$, 且 $|D| = q^n$. 若 $n = 1$, 则 $D = F$, 结论成立. 下设 $n > 1$, 反证.

考虑乘法群 $D^\times$ 对自身的共轭作用. 中心元恰为 $F^\times$, 故由类方程

$$|D^\times| = |F^\times| + \sum_i |C_{Gi}|,$$

其中 C_{Gi} 遍历所有非中心共轭类. 于是

$$q^n - 1 = (q - 1) + \sum_i |C_{Gi}|.$$

Chapter 6. 环论速成课 (a crash course of ring theory)

任取非中心元 $a_i \in C_{G_i}$, 其中心化子 $C_i = C_D(a_i)$ 是 D 的真除环, 且含 F . 设 $|C_i| = q^{m_i}$, 则作为 F -向量空间有 $m_i = [C_i : F]$, $n = [D : F]$, 从而 $m_i \mid n$, 且因 $a_i \notin F$, 有 $m_i < n$. 于是

$$|C_{G_i}| = [D^\times : C_i^\times] = \frac{q^n - 1}{q^{m_i} - 1}.$$

由前引理第三条可知

$$\Phi_n(q) \mid \frac{q^n - 1}{q^{m_i} - 1} = |C_{G_i}|.$$

又显然 $\Phi_n(q) \mid q^n - 1$, 故由上式得 $\Phi_n(q) \mid (q - 1)$. 然而

$$\Phi_n(q) = \prod_{1 \leq l \leq n, \gcd(l, n)=1} (q - \zeta^l),$$

其中 $n > 1$ 时各因子满足 $|q - \zeta^l| > q - 1$, 从而 $\Phi_n(q) > q - 1$. 这与 $\Phi_n(q) \mid (q - 1)$ 矛盾.

故必有 $n = 1$, 即 $D = F$, 从而 D 交换, 亦即 D 是域. □

References of this chapter

[陈王李 24] 陈猛, 王庆雪, and 李志远. 《抽象代数》. 1st. 上海, 中国: 复旦大学出版社, 2024, p. 175.

7

模论速成课 (a crash course of module theory)

Contents

7.1	模及其延伸概念	143
7.2	模的同态与同构	145
7.3	模的生成	146
* 7.4	无限维线性空间	149
* 7.5	模不变基数条件	150
7.6	张量积	153
7.7	模的可解性	165
7.8	Wedderburn–Artin 定理	168
* 7.9	Artin 模与 Noether 模	171

7.1 模及其延伸概念

模既可以看作向量空间的推广, 通俗地说就是环上的向量空间, 又可以看作 Abel 群的推广.

Definition 7.1 [模 (module)]. 设 R 是么环, $(M, +)$ 是 Abel 群, 称 M 是左 R -模, 如果存在映射 $f: R \times M \rightarrow M$, $(r, m) \mapsto r \cdot m$ 满足:

- $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$,
- $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$,
- $(r_1 r_2) \cdot m = r_1 (r_2 \cdot m)$,
- $1 \cdot m = m$,

对任意的 $r, r_1, r_2 \in R$, $m, m_1, m_2 \in M$ 均成立.

Chapter 7. 模论速成课 (a crash course of module theory)

无歧义时常简写 $r \cdot m \equiv rm$. 同理可以定义右 R -模, 左右 R -双模, 但是习惯上常只用左模, 作为约定, 常直接把左 R -模称为 R -模.

Example. 在量子力学中, 可观测量形成一个算符代数 $\mathcal{A}$, 设 $\mathcal{H}$ 表示可分 Hilbert 空间, 其中的元素称为态矢, 描述物理系统的状态. 算符代数 $\mathcal{A}$ 典型的例子如有界线性算符代数 $B(\mathcal{H})$, C^* -代数, von Neumann 代数, 甚至是简单的矩阵环 $M_n(\mathbb{C})$. 根据量子力学的基本原理, 算符代数 $\mathcal{A}$ 对系统状态 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ 有一个线性变换的左作用, $A|\psi\rangle$, $A \in \mathcal{A}$, 以及对 $\mathcal{H}$ 的对偶空间 $\mathcal{H}^*$ 内的对偶矢量有一个线性变换的右作用 $\langle\psi|A$. 通过验证模的定义, $\mathcal{H}$ 构成左 $\mathcal{A}$ -模, $\mathcal{H}^*$ 构成右 $\mathcal{A}$ -模. 我们可以构造形如 $|\psi\rangle\langle\phi|$ 的线性算符, 典型的例子如密度矩阵 $|\psi\rangle\langle\psi|$, 构成一个左右 $\mathcal{A}$ -双模.

Example. 设 D 是一个除环, 则 D -模也称为 D -矢量空间. 在 D -模中, 设 $\lambda \in D$, $x \in M$, 若 $\lambda \cdot x = 0$, 则有 $\lambda = 0$ 或者 $x = 0$. 只需考虑若 $\lambda \neq 0$, 取 $\lambda^{-1} \in D$, 有 $x = \lambda^{-1}\lambda x = \lambda^{-1} \cdot 0 = 0$.

类似群和环, 模同样有子结构.

Definition 7.2 [子模]. 设 M 是 R -模, $N \subseteq M$ 是非空, 称 N 是 M 的子模, 如果

- N 是 M 的加法子群,
- 任意的 $r \in R$, $y \in N$, 均有 $ry \in N$.

换句话说, 子模有点像不变子空间. 称子模 N 极大, 如果不存在严格大于 N 的非全模的子模.

Example. 设 M 是 R -模, 则 $\{0\}$ 和 M 是 M 的平凡子模.

Example. 将 R 视为 R -模, 则子模相当于左理想.

Example. 设 M 是 $\mathbb{Z}$ -模, 则 M 的子模相当于子群.

Definition 7.3 [商模]. 设 N 是 M 的 R -子模, 加法商群 $M/N = \{x + N \mid x \in M\}$. 定义映射

$$\begin{aligned} g : R \times M/N &\rightarrow M/N, \\ (r, x + N) &\mapsto r \cdot (x + N) = r \cdot x + N, \end{aligned}$$

则 M/N 在上述 g 下构成 R -模, 称为 M 关于 N 的商模.

Proof. 我们在此说明 g 是良定义的. 考虑 $x + N = x' + N$, 则存在 $u \in N$, 使得 $x' = x + u$, 于是

$$r \cdot x' = r \cdot x + r \cdot u \implies r \cdot x' - r \cdot x = r \cdot u \in N,$$

这里考虑到 N 是子模. □

换句话说, 商模有点像商空间.

7.2 模的同态与同构

Definition 7.4 [模同态 (module homomorphism), 模同构 (module isomorphism)]. 设 M_1, M_2 是 R -模, 若映射 $f: M_1 \rightarrow M_2$ 满足:

- f 是加法群同态,
- 与 R -作用交换, 即任意的 $r \in R, x \in M$, 均有 $f(rx) = rf(x)$,

则称 f 为 R -模同态. 若其还是双射, 就称其为 R -模同构, 并记 $M_1 \cong M_2$.

所谓 f 与 R -作用交换, 常用以下交换图示意,

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{R} & M_1 \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ M_2 & \xrightarrow{R} & M_2 . \end{array}$$

Definition 7.5 [模同态的核与像]. 设 $f: M_1 \rightarrow M_2$ 是 R -模同态, 定义 f 的核

$$\ker f := \{a \in M_1 \mid f(a) = 0\}.$$

定义 f 的像

$$\operatorname{im} f = \{f(a) \mid a \in M_1\}.$$

几乎完全照搬群论中的相关结论, 我们有

Proposition 7.1. 设 $f: M_1 \rightarrow M_2$ 是 R -模同态, 则

- $\ker f$ 是 M_1 的子模;
- $\operatorname{im} f$ 是 M_2 的子模;
- f 是单同态当且仅当 $\ker f = \{0\}$;
- f 是满同态当且仅当 $\operatorname{im} f = M_2$.

同态基本定理也有模版本的.

Chapter 7. 模论速成课 (a crash course of module theory)

Theorem 7.1 [模同态基本定理]. 设 $f: M \rightarrow T$ 是 R -模同态, 则 f 诱导出 R -模同构

$$\begin{aligned}\tilde{f}: M/\ker f &\rightarrow \operatorname{im} f, \\ x + \ker f &\mapsto f(x).\end{aligned}$$

Proof. 根据群同态基本定理 *Thm. 2.1*, 有群同构

$$M/\ker f \cong \operatorname{im} f.$$

只需说明和环作用交换. 任取 $r \in R, x \in M$, 有, 先将 $\tilde{f}$ 视为群同构, 利用 *Def. 7.3* 给出的环在商模上的作用, 则

$$\tilde{f}(r(x + \ker f)) = \tilde{f}(rx + \ker f) = f(rx) = rf(x) = r\tilde{f}(x + \ker f).$$

从而 $\tilde{f}$ 是模同态, 结合其已经是同构, 所以 $\tilde{f}$ 是模同构. □

$\operatorname{im} f$ 是 T 的子模, 定义 $\operatorname{cok} f = T/\operatorname{im} f$ 为余核 (cokernel).

7.3 模的生成

Definition 7.6. 设 M 是 R -模, $S \subseteq M, T(S) = \{W \mid W \text{ 是 } M \text{ 的子模且 } S \subseteq W\}$, 定义 $\langle S \rangle = \bigcap_{W \in T(S)} W$, 称为由 S 生成的子模. 若存在有限集 S 使得 $M = \langle S \rangle$, 则称 M 是有限生成的. 由一个元素生成的模称为循环模 (cyclic module) 或主模 (principal module).

关于 $\langle S \rangle$ 是子模, 证明类似子群的生成和子环的生成. 根据定义, 直接得到下面的性质, 该性质类同 *Def. 1.5* 和 *Prop. 6.3*.

Proposition 7.2. 设 M 是 R -模, $S \subseteq M$ 非空, 则

$$\langle S \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^t r_i m_i \mid r_i \in R, m_i \in S, 1 \leq i \leq t, t \in \mathbb{N} \right\rangle.$$

7.3. 模的生成

特别的, 当 $S = \{m_1, \dots, m_l\}$ 是有限集时,

$$\langle m_1, \dots, m_l \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^l r_i m_i \mid r_i \in R, 1 \leq i \leq l \right\}.$$

一些线性空间中的概念可以直接推广到模中, 下面择几例谈谈.

Definition 7.7. 设 M 是 R -模, $m_1, \dots, m_t \in M$, 若存在不全为零的元素 $r_1, \dots, r_t \in R$ 使得 $r_1 m_1 + \dots + r_t m_t = 0$, 则称 $m_1, \dots, m_t$ 为 R -线性相关, 否则称 R -线性无关. 设 $S \subseteq M$, 若 S 中任意有限多个两两不同的元素均 R -线性无关, 则称 S 是 R -线性无关. 若 S 和 M 满足

- S 是 R -线性无关,
- $\langle S \rangle = M$,

则称 S 是 M 的一组基. 如果 M 存在一组基, 则称 M 自由.

通俗地说, 自由模就是基底概念可良好定义的模. 下面的定理表明, 自由模到别的模的同态是由同态在基底上的效果唯一确定的, 即制定了基底的取值, 模同态就被唯一确定了.

Theorem 7.2. 设 M 是自由 R -模. B 是其一组基, T 是任意 R -模. 对任意给定映射 $f_0: B \rightarrow T$, 均存在唯一的 R -模同态 $f: M \rightarrow T$, 使得 $f|_B = f_0$.

Proof. 存在性: 对任意非零 $m \in M$, 根据基的定义, $m = \sum_{i=0}^r \lambda_i b_i$, $\lambda_i \in R$, $b_i \in B$, $r \in \mathbb{N}$. 定义 $f(m) = \sum_{i=0}^r \lambda_i f_0(b_i)$, $f(0) = 0$, 则可验证 f 是符合题意的模同态.

唯一性: 设 f, g 均为符合题意的模同态, 则对 $m = \sum_{i=0}^r \lambda_i b_i$,

$$f(m) = \sum_{i=0}^r \lambda_i f(b_i) = \sum_{i=0}^r \lambda_i g(b_i) = g(m), \quad \forall m \in M,$$

从而 $f = g$. □

Chapter 7. 模论速成课 (a crash course of module theory)

Proposition 7.3. 设 M 是自由 R -模, B 是其基, 则

$$M \cong R^{(B)}.$$

这里 $R^{(B)} := \bigoplus_{i \in B} R$ 且仅有限多个 $r_i \neq 0$.

Remark. 关于有限支撑的要求, 动机参见 *Hambel* 基相关内容 [Sec. 7.4](#).

Proof. $R^{(B)}$ 的元素可视为一族 $(r_b)_{b \in B}$, 其中 $r_b \in R$ 且仅有限多个 $r_b \neq 0$.
定义映射

$$\Phi : R^{(B)} \longrightarrow M, \quad (r_b)_{b \in B} \longmapsto \sum_{b \in B} r_b b.$$

这里的求和是良定义的, 因为 (r_b) 只有有限支撑, 所以上式是有限和.

(1) Φ 为 R -模同态. 对任意 $(r_b), (s_b) \in R^{(B)}$ 与 $a \in R$,

$$\Phi((r_b) + (s_b)) = \Phi((r_b + s_b)) = \sum_b (r_b + s_b)b = \sum_b r_b b + \sum_b s_b b = \Phi((r_b)) + \Phi((s_b)),$$

且

$$\Phi(a(r_b)) = \Phi((ar_b)) = \sum_b (ar_b)b = a \sum_b r_b b = a \Phi((r_b)).$$

因此 Φ 是 R -线性的.

(2) Φ 是满射. 由于 B 生成 M , 任取 $m \in M$ 都可表示为有限和

$$m = \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad a_k \in R, \quad b_k \in B.$$

令 $(r_b)_{b \in B} \in R^{(B)}$ 满足 $r_{b_k} = a_k$ 并且对其余 $b \in B$ 取 $r_b = 0$, 则 $\Phi((r_b)) = m$. 故 Φ 满射.

(3) Φ 是单射. 若 $\Phi((r_b)) = 0$, 即

$$\sum_{b \in B} r_b b = 0,$$

这仍是有限和. 由于 B 线性无关, 只能有所有系数 $r_b = 0$. 因此 $(r_b) = 0$, 从而 $\text{Ker}(\Phi) = 0$, Φ 单射.

综上, Φ 是双射的 R -模同态, 故为同构, 即 $M \cong R^{(B)}$. □

* 7.4 无限维线性空间

作为模空间的例子, 当环 R 取 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 并且 M 是有限生成时, 就得到了我们熟知的有限维线性空间, 相关性质可参见任意一本线性代数教材, 如谢启鸿、姚慕生、吴泉水的《高等代数》[谢姚吴 14]. 本节则作为补充, 讨论无限维线性空间中的一些情况, 同时作为线性代数的补充和模论的例子.

无限维线性空间的线性相关性定义同 Def. 7.7: 无穷个矢量线性有关, 就是存在其中的有限个矢量线性有关; 反之则为线性无关. Hamel 基的概念旨在把有限维线性空间基底的概念推广到无限维, 该概念的描述依赖 Zorn 引理 Thm. 0.3 确保其存在性.

Definition 7.8 [Hamel 基 (Hamel basis)]. 线性无关组 H 称作 **Hamel 基**, 如果线性空间中任意矢量均可用 H 中的有限个矢量线性表出. 等价地, 任意向 H 添加非零矢量均会导致线性相关.

Proof. 定义的等价性是显然的, 以及定义保证了任意矢量的表出方式唯一, 下面使用 Zorn 引理说明 Hamel 基的存在性. 考虑 S 是线性空间 V 的所有线性无关的子集构成的集族, 我们旨在构造其以集合的包含关系为偏序的极大元并说明其就是 Hamel 基. 任取一个全序子集 $\mathcal{T} \subseteq S$, 记

$$T_m := \bigcup_{T_i \in \mathcal{T}} T_i,$$

任取有限个元素 $t_1, \dots, t_n \in T_m$, 因为 $\mathcal{T}$ 的全序性, 存在一个 $T_i \ni t_1, \dots, t_n$, 从而 $t_1, \dots, t_n$ 线性无关, 所以 $T_m \in S$ 是 $\mathcal{T}$ 的上界. 由 Zorn 引理 Thm. 0.3, 存在 S 的极大元 H . 下证 H 为所求的 Hamel 基. 反证法, 考虑非零 $v \notin \text{span}(H)$, 若 H 不是 Hamel 基, 则 $\{v\} \sqcup H$ 依旧线性无关, 违反了 H 的极大性. $\square$

类似有限维线性空间的任意两个基内的元素个数相同, 我们有下面的命题.

Proposition 7.4. 同一线性空间的任意两个 Hamel 基等势.

Proof. 设任意两组 Hamel 基 A, B . 定义映射

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \times \mathbb{N}, \\ a &\mapsto (\{b_1, \dots, b_n\}, m), \end{aligned}$$

其中 $a = \sum_{i=1}^n c_i b_i$, $c_i \neq 0$. 下面说明 m 的意思: 考虑 $\{b_1, \dots, b_n\}$ 的原像, 注意到事实为其原像最多只有 n 个 (如不然, 则这些原像线性相关), 我们依据良序定理 Thm. 0.2 赋予这些原像良序, 设

Chapter 7. 模论速成课 (a crash course of module theory)

a 属于第 m 个. 从而 f 显然是单射, 于是 $|A| \leq |B|$, 同理 $|B| \leq |A|$. 依据 *Schröder–Bernstein* 定理 [Thm. 0.4](#), 两者等势. $\square$

但是 Hamel 基常常也不够用, 例如在物理学中常考虑本征基的完备性, 从而会涉及到无穷的分量, 例如 Fourier 级数是一种可数无穷的基底展开, Fourier 变换是不可数无穷的基底展开.

择一例体会之,

$$S(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

为方波信号的 Fourier 展开, 右式点态收敛¹至左式. 这里选用正弦基, 分量有可数无穷项非零.

以 Fourier 级数展开为例子, 依据 [Def. 7.8](#), 函数空间一定存在 Hamel 基使得任意函数均可以用有限项展开. Hamel 基的存在不依赖线性空间的性质! 但是这几乎没有实际的价值, 因为目前的研究表明, 这样的 Hamel 基极端不规则, 缺少良好的性质.

对于以上需求, 常用 Schauder 基. 相关讨论涉及分析与拓扑的知识, 请移步至[分析学笔记](#)和[拓扑学笔记](#)相关章节.

* 7.5 模不变基数条件

线性空间的 Hamel 基满足性质 [Prop. 7.4](#), 如果推广到环, 这个性质多大程度上仍然成立呢? 相关讨论聚焦于不变基数条件, 满足此条件的环, 其上的模才可以良好定义秩的概念.

Definition 7.9 [**不变基数条件 (invariant basis number, IBN)**]. 环 R 具有**不变基数条件**, 如果对任意的自由 R -模 M , 以及其任意的两个基 B, B' , 均有 $|B| = |B'|$. 此时可定义模 M 的**秩**为其基的基数.

所以满足不变基数条件时才可以良好定义秩的概念. 下面的引理讨论模 M 能找到无限基的情形. 引理断言, 幺环上的自由模, 无限基必等势.

Lemma 7.1. 记 R 是幺环, M 是自由 R -模, 如果 M 具有无限基 B , 则对于其他基 B' , 均有 $|B| = |B'|$.

Proof. (1) 断言 B' 无限, 下证明之. 反证法, 假若 B' 有限, 因为 $M = \langle B \rangle$, 则 $B' \subseteq \langle b_1, \dots, b_n \rangle$, 其中 $\{b_1, \dots, b_n\} \subseteq B$, 即

$$\langle b_1, \dots, b_n \rangle \supseteq \langle B' \rangle = F,$$

¹处处收敛, 但在跳跃点取“左右极限平均”.

7.5. 模不变基数条件

从而 $\langle b_1, \dots, b_n \rangle = F$, 因为 B 是无限的, 也就是说我们用 B 的真子集 $\{b_1, \dots, b_n\}$ 生成了 M , 所以 B 不是基, 矛盾.

(2) 下不妨 $|B'| \leq |B|$. 设 $T = \{b'_1, \dots, b'_k\} \subseteq B'$ 有限, 记 $B_T = B \cap \langle T \rangle$, 断言 B_T 有限. 下证明之. 存在 $\{b_1, \dots, b_n\} \subseteq B$ 使得 $T \subseteq \langle T \rangle$, 于是

$$B_T \subseteq \langle T \rangle \subseteq \langle b_1, \dots, b_n \rangle,$$

由线性无关性可知, $B_T \subseteq \{b_1, \dots, b_n\}$.

(3) 断言 $|B| \leq |B'|$. 下证明之. 令 $S_{B'}$ 是 B' 的所有有限子集构成的集族, 我们有 $|S_{B'}| = |B'|$, 见后文的引理补充证明 **Lem. 7.2**. 构造

$$\begin{aligned} f : B &\rightarrow S_{B'}, \\ b &\mapsto \{b'_1, \dots, b'_k\}, \end{aligned}$$

这里 $b = r_1 b'_1 + \dots + r_k b'_k$, $r_i \neq 0$, $r_i \in R$, $j = 1, \dots, k$. 注意到对 $T \in S_{B'}$, 我们有

$$b \in f^{-1}(T) \iff b \in \langle T \rangle,$$

依据 (2), $f^{-1}(T)$ 有限对任意的 $T \in S_{B'}$ 均成立. 所以

$$|B| = \left| \bigcup_{T \in S_{B'}} f^{-1}(T) \right| \leq \left| \bigcup_{T \in S_{B'}} \mathbb{N} \right| = |S_{B'}| \aleph_0 = |S_{B'}|.$$

最终 $|B| = |B'|$. □

Lemma 7.2. 设集合 X 满足 $|X| \geq \aleph_0$, 记 S_X 是 X 的所有有限子集构成的集族, 则 $|S_X| = |X|$.

Proof. 映射 $x \mapsto \{x\}$ 是单的, 从而 $|X| \leq |S_X|$. 记 $X^n = \prod_{i=1}^n X$, 定义映射

$$\begin{aligned} \pi_n : X^n &\rightarrow \mathcal{F}(X), \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \{x_1, \dots, x_n\}, \end{aligned}$$

是满射到所有「大小 $\leq n$ 」的有限子集, 于是

$$S_X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \pi_n(X^n),$$

Chapter 7. 模论速成课 (a crash course of module theory)

从而 $|S_X| \leq \left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n \right|$. 因为对于有限的 $n \in \mathbb{N}$, 总有 $|X^n| = |X|$, 所以

$$\left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |X^n| = \sum_{n \in \mathbb{N}} |X| = |X| \cdot \aleph_0 = |X|.$$

我们得到了 $|S_X| \leq |X|$, 根据 Schröder–Bernstein 定理 [Thm. 0.4](#), $|S_X| = |X|$. □

引理 [Lem. 7.1](#) 的重要意义在于告诉我们, 如果要验证不变基数条件 [Def. 7.9](#), 我们只需要验证有限基的情形即可. 最终我们得到了以下重要定理:

Theorem 7.3. 记 R 是么环, 则以下条件等价:

- R 具有不变基数条件;
- R 上的自由模 M 的任意两个有限基 B, B' , 均有 $|B| = |B'|$;
- R 满足对任意的正整数 m, n , 均有 $R^m \cong R^n \iff m = n$.

Proof. (1) $\implies$ (2) 依据定义 [Def. 7.9](#). (2) $\implies$ (3) 结合 [Lem. 7.1](#) 即可. (2) $\implies$ (3), 假设 (2) 和 $R^m \cong R^n$ 成立, 下证 $m = n$. 形如 R^m 为自由模, 可取标准基 $E_m = \{e_1, \dots, e_m\}$. 同构 $R^m \cong R^n$ 把 R^n 的标准基 $E_n = \{f_1, \dots, f_n\}$ 拉回, 那么 E_m 和 $\Phi^{-1}(E_n)$ 均是 R^m 的基, 这里 Φ 是同构. 依据 (2) 有 $|E_m| = |\Phi^{-1}(E_n)| = |E_n|$, 即 $m = n$. (3) $\implies$ (2), 设 $|B| = m, |B'| = n$, 我们有 $R^{|B|} \cong R^{|B'|}$, 由 [Prop. 7.3](#), $R^{|B|} \cong R^{|B'|} \cong M$. □

我们说明, 不变基数条件实际上相当容易满足.

Proposition 7.5. 下面非零么环均满足不变基数条件:

- 除环;
- 交换环
- 具有非平凡的商环满足不变基数条件.

Proof. (1) 除环的情形. 根据 [Thm. 6.4](#), 我们证明对自由模 M , 其两组有限基 $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, $B' = \{b'_1, \dots, b'_m\}$, 有 $n = m$. 我们使用归纳法, 先证明 $n = 1$ 的情形, 再对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, $B = \{b_1\}$, 作出

$$b'_1 = r_1 b_1, \quad b'_2 = r_2 b_1,$$

7.6. 张量积

其中 $r_1, r_2 \in R$ 非零. 于是

$$r_1^{-1}b_1 - r_2^{-1}b_2 = 0,$$

若 $b'_1 \neq b'_2$, 则 B 线性无关矛盾, 从而只能 $b'_1 = b'_2$, 同理得到所有 b'_i 均相等.

假设 n 情形成立, 下证 $n+1$ 情形. 此时 $B = \{b_1, \dots, b_{n+1}\}$, 因为 B' 是基, 所以

$$b_{n+1} = r_1 b'_1 + \dots + r_m b'_m,$$

这里 $r_1, \dots, r_m \in R$ 不全为零. 不妨 $r_m \neq 0$, 于是令 $B'' = \{b'_1, \dots, b'_{m-1}, b_{n+1}\}$, 其也是基. 考虑典范满同态

$$\pi: F \rightarrow F/\langle b_{n+1} \rangle,$$

从而 $F/\langle b_{n+1} \rangle$ 以 $\{\pi(b_1), \dots, \pi(b_n)\}$ 为基是自由模, 同时 $\{\pi(b'_1), \dots, \pi(b'_{m-1})\}$ 也是其基, 根据归纳假设 $n = m-1, n+1 = m$.

(3) 我们先证明存在满足不变基数条件的非平凡商环的情形, 然后利用该条件证明交换环情形. 注意到: I 是环 R 的理想, 对任意模 M ,

$$IM := \{rm \mid r \in I, m \in M\}$$

是 M 的子模且, M/IM 是 R/I -模, 如果如下定义自然的乘法:

$$(r+I)(m+IM) = rm + IM.$$

设自由模 M 的有限基 $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, 依上述, M/IM 是 R/I 模, 基 $\{b_1 + IM, \dots, b_n + IM\}$. 因为 R/I 满足不变基数条件, 所以 M/IM 的秩为 n , 从而 M 的秩为 n .

(2) 考虑 I 为交换环 R 的极大理想, 则 R/I 是域 (见 [Prop. 6.5](#)). 根据 (1) R/I 满足不变基数条件, 根据 (3) R 满足不变基数条件. $\square$

7.6 张量积

我们寻 [\[李文威 23\]](#) 在其著作《代数学方法: 卷一》[\[李文威 23, Chapter 6, p.207\]](#) 中提到的动机, 认识模的张量积.

不妨先从熟悉的矢量空间情形入手: 令 X, Y 为 $\mathbb{C}$ -矢量空间; 考虑取值在某一 $\mathbb{C}$ -矢量空间 A 的函数 $B: X \times Y \rightarrow A$. 如果 $B(x, \cdot)$ 和 $B(\cdot, y)$ 对所有 x, y 都是线性映射, 则 B 称为双线性型. 所谓 X 和 Y 的张量积无非是「泛双线性型」 $X \times Y \rightarrow X \otimes Y$. 更精确地说, 我们要求每个双线性型 $B: X \times Y \rightarrow A$ 皆能按

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & X \otimes Y \\ & \searrow B & \downarrow \exists! f \\ & & A \end{array}$$

Chapter 7. 模论速成课 (a crash course of module theory)

分解, 其中 f 是唯一确定的线性映射. 先不论构造, 记 $(x, y) \in X \times Y$ 在 $X \otimes Y$ 中的像为 $x \otimes y$. 双线性蕴涵

$$\begin{aligned}(x + x') \otimes y &= x \otimes y + x' \otimes y, & x \otimes (y + y') &= x \otimes y + x \otimes y', \\ (tx) \otimes y &= t(x \otimes y) = x \otimes (ty), & t &\in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

可以想见, 矢量空间 $X \otimes Y$ 应当由所有 $x \otimes y$ 张成, 而且除上列性质外 $X \otimes Y$ 再无其它约束, 否则就不成其「泛」了.

即, 张量积的动机, 在于从泛性质出发, 构造所有双线性映射的最一般载体. 关于泛性质的理解, 下面几例来自物理学中熟知的物理对象, 我们依次来体会.

Example. 经典的 Maxwell 能动张量

$$T = \varepsilon_0 \left(\mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{1}{2}E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{1}{2}B^2 \right)$$

按照物理学惯用语, 数学形式是所谓的**并矢 (dyadics)**. 但是依据张量积的泛性质 – 双线性对象是张量积, 所以并矢运算事实上是一种特别的张量积.

Example. 量子力学态空间的合成. 考虑两个子系统 $|\psi\rangle_1 \in \mathcal{H}_1$, $|\psi\rangle_2 \in \mathcal{H}_2$, 我们有如下三种方式构造联合系统

$$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \ni \begin{cases} |\psi\rangle_1 |\phi\rangle_2, & \text{可分辨} \\ |\psi\rangle_1 |\phi\rangle_2 - |\phi\rangle_1 |\psi\rangle_2, & \text{Fermion, 不可分辨} \\ |\psi\rangle_1 |\phi\rangle_2 + |\phi\rangle_1 |\psi\rangle_2, & \text{Boson.} \end{cases}$$

如下解释:

- 表达式 $|\psi\rangle_1 |\phi\rangle_2$ 意在表达省略符号 $\otimes$, 且两个线性空间中的元素无纠缠;
- 表达式 $|\psi\rangle_1 |\phi\rangle_2 \pm |\phi\rangle_1 |\psi\rangle_2$ 意在说明两个矢量以对称/反对称的方式进行张量积.

某些旧物理文献中混用了直积和张量积两个概念. *Schmidt* 分解 $|\Psi\rangle = \sum_i \alpha_i |u_i\rangle_1 \otimes |v_i\rangle_2$, $\forall |\Psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, 其中 $\{u_i\}$ 与 $\{v_i\}$ 是正交基, 告诉我们更多张量积空间的信息.

本节参考丘维声的《群表示论》[丘维声 11, Chapter 4, §1, p.118]. 下不完全忠于原文, 学有余力者敬请回头拜读原著.

Definition 7.10 [平衡映射 (balanced map)]. 考虑非零幺环 R , M 是右 R -模, N 是左 R -模, P

是加法 Abel 群. 如果存在映射 $f : M \times N \rightarrow P$ 使得

$$\begin{aligned} f(m_1 + m_2, n) &= f(m_1, n) + f(m_2, n), \\ f(m, n_1 + n_2) &= f(m, n_1) + f(m, n_2), \\ f(mr, n) &= f(m, rn), \end{aligned}$$

则称 f 是一个从 $M \times N$ 到 P 的平衡映射.

为了构造张量积, 先从 Descartes 积出发, 再逐步按条件得出. 考虑在 Descartes 积上定义通常的加法运算, 得到 Abel 群

$$F := \left\{ \sum_{(m,n) \in M \times N} k_{(m,n)} (m, n) \mid k_{(m,n)} \in \mathbb{Z}, \text{ 且只有有限多个 } k_{(m,n)} \neq 0 \right\}.$$

为了构造出 Def. 7.10 的平衡映射, 考虑商去一些结构. 方法是, 设 H 是由 F 中如下形式元素生成的子群:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n), \\ (m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2), \\ (mr, n) - (m, rn), \end{aligned}$$

记 $T := F/H$, 令商映射

$$\begin{aligned} t : M \times N &\rightarrow T, \\ (m, n) &\mapsto (m, n) + H, \end{aligned}$$

可以验证 t 符合 Def. 7.10, 从而 t 是一个从 $M \times N$ 到 T 的平衡映射, 并且 T 中每个元素均形如

$$\sum_i t(m_i, n_i),$$

且上式是有限和.

以上构造出的 T 和 t 有一些好的性质. 任取加法 Abel 群 P , 设 $f : M \times N \rightarrow P$ 是一个平衡映射, 因为 F 中的元素表示为有限和的方式唯一, 因此把 f 线性扩充

$$\begin{aligned} \tilde{f} : F &\rightarrow P, \\ \sum_i k_i (m_i, n_i) &\mapsto \sum_i k_i f(m_i, n_i) \end{aligned}$$

Chapter 7. 模论速成课 (a crash course of module theory)

也是一个映射, 且保持加法, 从而是群同态. 可以验证 $H \subseteq \ker \tilde{f}$, 并诱导商群同态

$$f^* : F/H \rightarrow P, \\ \sum_i k_i(m_i, n_i) + H \mapsto \tilde{f} \left(\sum_i k_i(m_i, n_i) \right).$$

容易验证我们有, 对任意的 $(m, n) \in M \times N$,

$$\begin{aligned} f^* [(m, n) + H] &= \tilde{f}(m, n) = f(m, n) \\ &= f^* t(m, n), \end{aligned}$$

也就是 $f = f^* t$. 这就是下述定理.

Theorem 7.4. 设 R 是非零幺环, M 是右 R -模, N 是左 R -模, 对任意的加法 Abel 群 T , 均存在平衡映射 $t : M \times N \rightarrow T$, 使得 T 的每个元素均为形如 $\sum_i t(m_i, n_i)$ 的有限和, 并且对任意的加法 Abel 群 P 和任意平衡映射 $f : M \times N \rightarrow P$, 均存在群同态 $f^* : T \rightarrow P$ 使得 $f = f^* t$.

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{t} & T \\ & \searrow f & \downarrow f^* \\ & & P. \end{array}$$

张量积的定义正是基于这个定理.

Definition 7.11 [张量积 (tensor product)]. 设 R 是非零幺环, M 是右 R -模, N 是左 R -模. 如果加法 Abel 群 T 和平衡映射 $t : M \times N \rightarrow T$ 使得 T 中每个元素是形如 $\sum_i t(m_i, n_i)$ 的有限和, 且对任意加法 Abel 群 P 和任意平衡映射 $f : M \times N \rightarrow P$, 均存在群同态 $f^* : T \rightarrow P$ 使得 $f = f^* t$, 称二元组 (T, t) 是 M 与 N 的张量积.

张量积的存在性由 **Thm. 7.4** 确定, 下证唯一性: 张量积在同构意义下是唯一的.

Proposition 7.6. 张量积在群同构意义下唯一.

7.6. 张量积

Proof. 设环 R 上的左右模 M 与 N 有张量积 (T, t) 与 (T', t') , 下图交换,

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{t} & T \\ & \searrow t' & \uparrow \sigma \\ & & T' \end{array}$$

从而 $t' = \sigma t$, $t = \tau t'$, 从而 $t = \tau \sigma t$. 考虑到 T' 中的每个元素均为形如 $\sum_i t'(m_i, n_i)$ 的有限和, 所以 $\tau \sigma = 1_T$, 同理 $\sigma \tau = 1_{T'}$, 于是 σ 和 τ 均为双射, 由各自为群同态, 从而 T 和 T' 群同构. $\square$

所以我们可以记张量积为 $(M \otimes_R N, t)$, 上下文无歧义时只写 $M \otimes N$, 将 $t(m, n)$, 于是 **Def. 7.10** 对平衡映射的简写为 $m \otimes n$, 三点要求可以等价地写为三条性质

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \otimes n &= m_1 \otimes n + m_2 \otimes n, \\ m \otimes (n_1 + n_2) &= m \otimes n_1 + m \otimes n_2, \\ (mr) \otimes n &= m \otimes (rn). \end{aligned}$$

有限和 $\sum_i k_i(m_i, n_i)$ 也可以写为 $\sum_i m_i \otimes n_i$.

Remark. 表示 $\sum_i m_i \otimes n_i$ 不是唯一的. 例如 $0 = 0 \otimes n, m \otimes 0, 0 \otimes 0$. 非平凡的, 在 $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$ 中,

$$\frac{2}{3} \otimes \bar{1} = \frac{1}{3} \otimes 2\bar{1} = \frac{1}{3} \otimes \bar{0} = 0.$$

Corollary 7.1. 设 R 是非零么单位环, M 与 N 分别是其左右模, 张量积 (T, t) , 则对任意的加法 Abel 群 P 及平衡映射 $f: M \times N \rightarrow P$, 均存在唯一的群同态 $f^*: T \rightarrow P$ 使得 $f = f^*t$.

Proof. 设还有 g^* 使得 $f = g^*t$, 则对任意的 $\sum_i m_i \otimes n_i \in T$, 有

$$\begin{aligned} f^*\left(\sum_i m_i \otimes n_i\right) &= \sum_i f^*(m_i \otimes n_i) = \sum_i f^*t(m_i, n_i) = \sum_i f(m_i, n_i), \\ g^*\left(\sum_i m_i \otimes n_i\right) &= \sum_i g^*(m_i \otimes n_i) = \sum_i g^*t(m_i, n_i) = \sum_i f(m_i, n_i), \end{aligned}$$

所以 $f^* = g^*$. $\square$

Chapter 7. 模论速成课 (a crash course of module theory)

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & M \otimes N \\ & \searrow f & \downarrow \exists! \\ & & P \end{array}$$

Figure 7.1: 张量积交换图

充分说明张量积的构造. 结合此命题, 我们有交换图 Fig. 7.1.

Proposition 7.7. 设 R 是非零么环, M, M' 为右 R -模, N, N' 为左 R -模, $f : M \rightarrow M'$, $g : N \rightarrow N'$ 为模同态, 则存在 $M \otimes N$ 到 $M' \otimes N'$ 的唯一群同态, 记作 $f \otimes g$, 使得

$$(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n).$$

即有交换图

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & M \otimes N \\ f \times g \downarrow & & \downarrow \exists! f \otimes g \\ M' \times N & \longrightarrow & M' \otimes N' . \end{array}$$

Proof. 映射 $M \times N \xrightarrow{f \times g} M' \times N' \rightarrow M' \otimes N'$ 也是平衡映射, 于是见 Cor. 7.1 以及 Fig. 7.1, 存在唯一的群同态 $f \otimes g$ 使得上图交换. $\square$

Prop. 7.7 说明

$$(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$$

给出的 $f \otimes g$ 唯一给出了同态的张量积, 从而可知同态的张量积与同态的合成兼容,

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g).$$

考虑到对任意指标集, 群集族上的内外直积同构, 同理模的内外直和, 我们不加区分地使用 $\times$ 及 $\prod$ 表示内外直积, $\oplus$ 及 $\bigoplus$ 表示内外直和. 注意有些文献使用 $+$, $+$ 等符号表示直和, 本笔记不采用之.

Proposition 7.8. 设 A 是含么 K -代数. 则 $A \otimes_K A$ 可赋予一个 K -代数结构, 对任意 $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 \in A, k \in K$, 有

$$\bullet (a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b, a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2;$$

7.6. 张量积

- $(ka) \otimes b = a \otimes (kb) = k(a \otimes b)$;
- $(a_1 \otimes a_2)(b_1 \otimes b_2) = a_1 b_1 \otimes a_2 b_2$;
- $1_A \otimes 1_A = 1_{A \otimes_K A}$;
- 若 a, b 均可逆, 则 $(a \otimes b)^{-1} = a^{-1} \otimes b^{-1}$.

Proof. 前两条只是张量积对加法与标量的平衡关系. 事实上, 由张量积的定义,

$$(a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b, \quad a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2,$$

且 $(ka) \otimes b = a \otimes (kb)$. 又由双线性, $(ka) \otimes b = k(a \otimes b)$, 从而 $(ka) \otimes b = a \otimes (kb) = k(a \otimes b)$.

下证第三条所给公式确实定义了 $A \otimes_K A$ 上的乘法. 对固定 $b_1, b_2 \in A$, 定义映射

$$\varphi_{b_1, b_2} : A \times A \rightarrow A \otimes_K A, \quad (a_1, a_2) \mapsto a_1 b_1 \otimes a_2 b_2.$$

此映射对两个变量分别可加, 且对任意 $k \in K$,

$$\varphi_{b_1, b_2}(ka_1, a_2) = (ka_1 b_1) \otimes a_2 b_2 = a_1 b_1 \otimes k(a_2 b_2) = \varphi_{b_1, b_2}(a_1, ka_2),$$

故 φ_{b_1, b_2} 是平衡映射. 由张量积的泛性质 **Cor. 7.1**, 存在唯一群同态 $\mu_{b_1, b_2} : A \otimes_K A \rightarrow A \otimes_K A$ 使得 $\mu_{b_1, b_2}(a_1 \otimes a_2) = a_1 b_1 \otimes a_2 b_2$. 再由同样的泛性质, 这些同态唯一拼合为双线性映射 $\mu : (A \otimes_K A) \times (A \otimes_K A) \rightarrow A \otimes_K A$, 从而在 $A \otimes_K A$ 上定义了乘法, 且 $(a_1 \otimes a_2)(b_1 \otimes b_2) = a_1 b_1 \otimes a_2 b_2$. 对任意纯张量 $a \otimes b$, 有 $(1_A \otimes 1_A)(a \otimes b) = 1_A a \otimes 1_A b = a \otimes b$, 以及 $(a \otimes b)(1_A \otimes 1_A) = a 1_A \otimes b 1_A = a \otimes b$. 任意元素皆为有限和 $\sum_i a_i \otimes b_i$, 故由分配律, $(1_A \otimes 1_A)x = x = x(1_A \otimes 1_A)$, $\forall x \in A \otimes_K A$. 所以 $1_{A \otimes_K A} = 1_A \otimes 1_A$. 最后, 若 a, b 均可逆, 则

$$(a \otimes b)(a^{-1} \otimes b^{-1}) = aa^{-1} \otimes bb^{-1} = 1_A \otimes 1_A = 1_{A \otimes_K A},$$

同理 $(a^{-1} \otimes b^{-1})(a \otimes b) = 1_{A \otimes_K A}$. 因此 $(a \otimes b)^{-1} = a^{-1} \otimes b^{-1}$. □

下面的命题揭示了张量积的保直和性, 在同构意义下.

Proposition 7.9. 对非零幺环 R 的左右模族 $(M_i)_{i \in I}, (N_j)_{j \in J}$ 有自然的同构

$$\begin{aligned} \alpha : \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \otimes \left(\bigoplus_{j \in J} N_j \right) &\xrightarrow{\cong} \bigoplus_{(i, j) \in I \times J} M_i \otimes N_j, \\ (m_i)_{i \in I} \otimes (n_j)_{j \in J} &\mapsto (m_i \otimes n_j)_{(i, j) \in I \times J}. \end{aligned}$$

Chapter 7. 模论速成课 (a crash course of module theory)

Proof. 如图

$$\begin{array}{ccc}
 \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \times \left(\bigoplus_{j \in J} N_j \right) & \xrightarrow{t} & \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \otimes \left(\bigoplus_{j \in J} N_j \right) \\
 & \searrow \beta & \downarrow \alpha \\
 & & \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} (M_i \otimes N_j)
 \end{array}$$

可知, 这里的 t 是张量积平衡映射, $\beta: (m_i)_{i \in I} \times (n_j)_{j \in J} \mapsto (m_i \otimes n_j)_{(i,j) \in I \times J}$ 可验证是平衡映射, 根据 [Cor. 7.1](#), 存在唯一的同态 α 使得此图交换, 且其双射性容易验证, 从而 α 正是同构, 其唯一且自然. $\square$

再次提醒, 在代数学中, 直和要求有限支撑, 这是为了避免收敛性从而有拓扑的额外要求, 回顾 Hamel 基 [Sec. 7.4](#) 相关讨论体会之.

Proposition 7.10. 设 M 是 (S, R) -双模, N 是左 R -模, 则 $M \otimes_R N$ 是左 S -模. 如果直和分解 $M = M_1 \oplus M_2$ 使得 M_1, M_2 均是 (S, R) -双模, 则

$$M \otimes_R N \cong (M_1 \otimes_R N) \oplus (M_2 \otimes_R N)$$

是左 S -模同构. 对称情形同理, 多级直和分解同理.

Proof. (I) 我们证明 $M \otimes_R N$ 是左 S -模, 为此我们要自然地定义 R 环作用. 对于 $s \in S$, 令

$$\begin{aligned}
 f_s: M \times N &\rightarrow M \otimes_R N, \\
 (m, n) &\mapsto sm \otimes n.
 \end{aligned}$$

可以验证 f_s 是一个平衡映射. 根据 [Cor. 7.1](#), 存在唯一的同态 ψ_s 使得下图交换,

$$\begin{array}{ccc}
 M \times N & \xrightarrow{t} & M \otimes_R N \\
 & \searrow f_s & \downarrow \psi_s \\
 & & M \otimes_R N
 \end{array}$$

其中 t 就是张量积的平衡映射. 从而

$$\begin{aligned}
 f_s(m, n) &= \psi_s t(m, n) = \psi_s(m \otimes_R n) \\
 &= sm \otimes_R n,
 \end{aligned}$$

7.6. 张量积

于是

$$\psi_s \left(\sum_i m_i \otimes n_i \right) = \sum_i \psi_s (m_i \otimes n_i) = \sum_i sm_i \otimes n_i,$$

所以 ψ_s 就是我们要找的 S 环作用具体方式. 约定

$$s \left(\sum_i m_i \otimes n_i \right) := \psi_s \left(\sum_i m_i \otimes n_i \right) = \sum_i sm_i \otimes n_i,$$

第二个等号来自 ψ_s 的效果.

(2) **Prop. 7.9** 给出

$$M \otimes_R N \cong (M_1 \otimes_R N) \oplus (M_2 \otimes_R N)$$

是群同态, 我们要说明其与 S 环作用交换, 从而是模同构. 任取 $m_i \in M$, 唯一分解 $m_i = m_{i1} + m_{i2}$, $m_{i1} \in M_1, m_{i2} \in M_2$, 对任意的 $s \in S$, 均有

$$sm_i = sm_{i2} + sm_{i2}, \quad sm_{i1} \in M_1, sm_{i2} \in M_2.$$

即 σ 为群同构, 于是任取 $\sum_i m_i \otimes n_i \in M \otimes N$,

$$\begin{aligned} \sigma s \left(\sum_i m_i \otimes n_i \right) &= \sum_i \sigma s (m_i \otimes n_i) = \sum_i \sigma (sm_i \otimes n_i) \\ &= \sum_i (sm_{i1} \otimes n_i + sm_{i2} \otimes n_i), \\ s \sigma \left(\sum_i m_i \otimes n_i \right) &= \sum_i s \sigma (m_i \otimes n_i) = \sum_i s (m_{i1} \otimes n_i + m_{i2} \otimes n_i) \\ &= \sum_i (sm_{i1} \otimes n_i + sm_{i2} \otimes n_i), \end{aligned}$$

所以 $s\sigma = \sigma s$. □

Remark. 不能直接规定

$$s \left(\sum_i m_i \otimes n_i \right) = \sum_i sm_i \otimes n_i$$

为 S 环作用, 因为有限和表示 $\sum_i m_i \otimes n_i$ 不唯一.

Chapter 7. 模论速成课 (a crash course of module theory)

Proposition 7.11. 设 R 是非零幺环, N 为左 R -模, 则有左 R -模同构

$$R \otimes_R N \cong N.$$

Proof. 把 R 视作 R -双模, 考虑

$$\begin{aligned} f: R \times N &\rightarrow N, \\ (r, n) &\mapsto rn, \end{aligned}$$

显然 f 是平衡映射. 根据 **Cor. 7.1**, 存在唯一的群同态 $\varphi: R \otimes_R N \rightarrow N$ 使得 $f = \varphi t$. 令

$$\begin{aligned} \psi: N &\rightarrow R \otimes_R N, \\ n &\mapsto 1 \otimes n, \end{aligned}$$

显然 ψ 是群同态, 且 $\varphi\psi = 1_N$, 又

$$\psi\varphi(r \otimes n) = \psi(rn) = 1 \otimes rn = 1r \otimes n = r \otimes n,$$

即 $\psi\varphi = 1_{R \otimes_R N}$, 所以 $R \otimes_R N \cong N$.

$$\begin{array}{ccc} R \times N & \xrightarrow{t} & R \otimes_R N \\ & \searrow f & \uparrow \psi \downarrow \phi \\ & & N \end{array}$$

□

Proposition 7.12 [张量积的结合律]. 设 R, S 都是非零幺环, L 是右 R -模, M 是 (R, S) -双模, N 是左 S -模, 则有群同构

$$(L \otimes_R M) \otimes_S N \cong L \otimes_R (M \otimes_S N).$$

如果 L 是 (H, R) -双模, 则此为左 H -模同构; 如果 N 是 (S, H) -双模, 则此为右 H -模同构

Remark. 有时用记号 M_R 表示 M 是右 R -模, 余类推, 本命题说明张量积具有结合律, 在同构意义下. 我们可以用下面的符号总结此命题,

$$L_R \otimes_R M_S \otimes_S N.$$

7.6. 张量积

Proof. 设 f, g 如下,

$$\begin{aligned} f : L \times M \times N &\rightarrow \left(L \otimes_R M \right) \otimes_S N, \\ (l, m, n) &\mapsto (l \otimes m) \otimes n; \\ g : L \times M \times N &\rightarrow L \otimes_R \left(M \otimes_S N \right), \\ (l, m, n) &\mapsto l \otimes (m \otimes n). \end{aligned}$$

容易验证两者均是平衡映射, 且 $\left(L \otimes_R M \right) \otimes_S N$ 和 $L \otimes_R \left(M \otimes_S N \right)$ 中的元素均为类似

$$\sum_j \sum_i f(l_{ij}, m_{ij}, n_j), \quad \sum_j \sum_i g(l_{ij}, m_{ij}, n_j)$$

的有限和, 根据 [Def. 7.11](#) 和 [Cor. 7.1](#) 可知, 存在两个唯一的群同态,

$$\begin{aligned} \varphi : \sum_j \sum_i f(l_{ij}, m_{ij}, n_j) &\mapsto \sum_j \sum_i g(l_{ij}, m_{ij}, n_j), \\ \psi : \sum_j \sum_i g(l_{ij}, m_{ij}, n_j) &\mapsto \sum_j \sum_i f(l_{ij}, m_{ij}, n_j), \end{aligned}$$

代入 f, g 的效果验算可知 $\varphi\psi$ 和 $\psi\varphi$ 均是恒等, 所以

$$\left(L \otimes_R M \right) \otimes_S N \cong L \otimes_R \left(M \otimes_S N \right).$$

至于 $L \otimes M \otimes N$ (无歧义时采纳此记号) 何时称为模, [Prop. 7.10](#) 已揭示之. □

Proposition 7.13 [张量积的交换律]. 若 M, N 均是 R -中心双模, 则有双模同构 $M \otimes N \cong N \otimes M$.

Remark. 中心双模的意思是左右环作用效果一致, 即 $rm = mr$.

Proof. 考虑映射 $m \otimes n \mapsto n \otimes m$ 显然为同构, 亦可验证是模同构. □

Theorem 7.5. 若 V, W 都是域 K 上的有限维线性空间, 则 $V \otimes_K W$ 也是域 K 上的有限维线

Chapter 7. 模论速成课 (a crash course of module theory)

性空间. 若 $v_1, \dots, v_r$ 是 V 的一组基, $w_1, \dots, w_s$ 是 W 的一组基, 则

$$\{v_i \otimes w_j \mid i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s\}$$

是 $V \otimes_K W$ 的一组基, 从而

$$\dim_K (V \otimes_K W) = (\dim_K V) (\dim_K W).$$

Proof. 因为 $V = \bigoplus_{i=1}^r \langle v_i \rangle \otimes_K W$, 是 K -中心模同构, 从而是线性空间同构, 因 $\langle v_i \rangle \cong K$, 因此

$$\langle v_i \rangle \otimes_K W \cong K \otimes_K W \cong W,$$

且也是线性空间同构. 于是

$$V \otimes_K W \cong \bigoplus_{i=1}^r W = W^r,$$

于是 $\dim (V \otimes W) = (\dim V) (\dim W)$. 任取 $v \in V, w \in W$, 因为

$$v \otimes w = \left(\sum_{i=1}^r a_i v_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^r b_j w_j \right) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r a_i b_j v_i \otimes w_j$$

分量线性无关, 所以 $v_i \otimes w_j$ 确为基. □

我们以熟知的线性变换的张量积来收尾本节. 考虑数域 K 上的线性空间和线性变换

$$V_1 \xrightarrow{A_1} V'_1, \quad V_2 \xrightarrow{A_2} V'_2.$$

由 **Prop. 7.7**, 存在从 $V_1 \otimes V_2$ 到 $V'_1 \otimes V'_2$ 的唯一群同态 $A_1 \otimes A_2$ 使得

$$(A_1 \otimes A_2) (v_1 \otimes v_2) = A_1 (v_1) \otimes A_2 (v_2).$$

容易验证和数乘运算对易, 从而 $A_1 \otimes A_2$ 是线性空间 $V_1 \otimes V_2$ 到 $V'_1 \otimes V'_2$ 的一个线性映射. 称 $A_1 \otimes A_2$ 是线性映射 A_1 与 A_2 的张量积. 特别的, 设 V 和 W 均是域 K 上的线性空间, A 和 B 都是 V 和 W 上的线性变换, 则存在 $V \otimes W$ 上唯一的线性变换 $A \otimes B$ 使得

$$(A \otimes B) (v \otimes w) = A (v) \otimes B (w).$$

7.7. 模的可解性

当选定基后, 设 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, 经过计算, 可得

$$(a_{ij}B) = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1r}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}B & \cdots & a_{rr}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1s} & \cdots & a_{1r}b_{11} & \cdots & a_{1r}b_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{s1} & \cdots & a_{11}b_{ss} & \cdots & a_{1r}b_{s1} & \cdots & a_{1r}b_{ss} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1}b_{11} & \cdots & a_{r1}b_{1s} & \cdots & a_{rr}b_{11} & \cdots & a_{rr}b_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}b_{s1} & \cdots & a_{r1}b_{ss} & \cdots & a_{rr}b_{s1} & \cdots & a_{rr}b_{ss} \end{pmatrix},$$

此处设 $\dim V = r$, $\dim W = s$.

7.7 模的可解性

Definition 7.12 [单模 (simple module)]. 环 R 上的左模 M 称为**单模**, 如果其没有非平凡的子模.

单模又被称为**不可约模 (irreducible module)**, 这个名字多出于表示论语境, 相应的, 非单模也被称为**可约模 (reducible module)**. 单模的定义本质就是单群在模论中的推广, 而模本身为 Abel 群, 子模自动正规, 故定义中不明确要求正规性.

Proposition 7.14. 非零 R -左模 M 是单的当且仅当它的任一非零元都生成自身.

也就是说, 对于任意非零 $m \in M$, 都有 $M = Rm$. 这个命题十分强大, 至少说明两个很重要的单模特征: 单模是循环模, 任意非零么环有单模.

Proof. 设非零 $N \trianglelefteq M$, 任取非零 $n \in N$, 若 $Rn = M$, 则因为 $Rn \subseteq N$, 从而 $M \subseteq N$, 所以只能 $N = M$, M 是单的. 反之, 若 M 是单的, 任取非零 $m \in M$, 因为 $Rm \trianglelefteq M$, 但是 M 是单的, 从而 $Rm = M$. $\square$

Theorem 7.6 [Schur 引理 (Schur's lemma)].

Chapter 7. 模论速成课 (a crash course of module theory)

- **第一引理:** 设 M, N 为环 R -单左模, 则非零同态 $f: M \rightarrow N$ 必为同构, 从而 $\text{End}_R(M)$ 是除环.
- **第二引理:** 设 A 是代数闭域 K 上的代数, M 是有限维 A -左单模, 则 $\text{End}_A(M) \cong K$.

Proof. 第一引理: 单模按定义非零. 运用单性可知或者 $\text{Ker}(\varphi) = M$, 此时 $f = 0$; 或者 $\text{Ker}(f) = 0$, 此时 $M \cong \text{Im}(f) = N$, 故 f 是同构.

第二引理: 模 M 自然是线性空间, 从而 f 是线性变换, 因数域有是代数封闭的, 必有 f 的某一特征值 $\lambda \in K$, 附有特征矢量 $m \in M$ 使得 $f(m) = cm$. 根据 **Prop. 7.14**, $Rcm = cRm = cM$, $Rf(m) = f(Rm) = f(M)$, 对比等式两边知 $f \cong c1_M$, 从而除环 $\text{End}_A(M) \cong K$. $\square$

Example 20. 证明对代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的矩阵代数 $M_n(\mathbb{F})$ 有 $Z(M_n(\mathbb{F})) \cong \mathbb{F}$, 即矩阵代数中心的元素均形如 λI_n .

Proof. 令 $A = M_n(\mathbb{F})$, $M = \mathbb{F}^n$, 其中 A 对 M 的作用取为通常的矩阵乘法. 先证 M 是单左 A -模. 任取非零 $v \in M$ 与任意 $w \in M$, 总可取矩阵 $X \in M_n(\mathbb{F})$ 使得 $Xv = w$, 故 $Av = M$, 由 **Prop. 7.14** 知 M 为单模. 现取任意 $z \in Z(A)$. 由中心的定义, 左乘映射 $L_z: M \rightarrow M, m \mapsto zm$ 与一切 A 的作用可交换, 因为对任意 $a \in A$ 与 $m \in M$,

$$L_z(am) = z(am) = (za)m = (az)m = a(zm) = aL_z(m).$$

故 $L_z \in \text{End}_A(M)$. 由于 M 是有限维单左 A -模, 由 **Schur** 第二引理, $\text{End}_A(M) \cong \mathbb{F}$. 因而存在 $\lambda \in \mathbb{F}$ 使得 $L_z = \lambda \text{id}_M$. 这就是说 $zm = \lambda m, \forall m \in M$, 故 $z = \lambda I_n$. 于是 $Z(A) \subseteq \{\lambda I_n : \lambda \in \mathbb{F}\}$. 反过来任意纯量矩阵 λI_n 显然与所有矩阵可交换, 从而 $Z(A) = \{\lambda I_n : \lambda \in \mathbb{F}\} \cong \mathbb{F}$. $\square$

从 **Schur** 第二引理可见在模的分解, 尤其是之后的群表示理论中, 数域的代数封闭性的重要性. 这也是为什么物理学几乎必然要使用 $\mathbb{C}$ 而不是 $\mathbb{R}$ 的一大例证. **Schur** 引理在群表示论中非常重要, 在一般的物理学方向群论教材中, 一般只讨论 $\mathbb{C}$ 上不可约线性空间的版本, 且证明冗长缺乏启发性; 此处我们从模的分解角度出发, 更直击要害.

Definition 7.13 [半单模 (semisimple module)]. 环 R 上的左模 M 称为半单模, 如果对每一个子模 $N \leq M$, 均存在子模 $H \leq M$ 使得 $M = N \oplus H$.

同样的, 半单模也被称为**完全可约模 (completely reducible module)**. 事实上, 半单模有很多等价定义, 诸多文献各择其一, 乍一看不同的定义所需条件强弱有异, 然如下命题指出相互之间的等价性:

7.7. 模的可解性

Proposition 7.15. 对于模 M , 下述条件等价:

1. M 可表为一族单子模的和: $M = \sum_{i \in I} M_i$;
2. M 可表为一族单子模的直和: $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$;
3. M 的任意子模有直和补模;

均为等价定义.

Proof. 以下证明过程截取自李文威的《代数学方法: 卷一》[李文威 23, §6.11, 命题 6.11.4]. 另, 群表示论中线性空间的相应版本 **Thm. 10.1** 则部分截取自丘维声的《群表示论》[丘维声 11] 相关章节.

现证 (1) $\implies$ (2). 设 $M = \sum_{i \in I} M_i$, 每个 M_i 都是单子模. 置

$$\mathcal{J} := \left\{ J \subset I : \sum_{i \in J} M_i \text{ 是直和} \right\}.$$

我们将用 Zorn 引理 **Thm. 0.3** 证明偏序集 $(\mathcal{J}, \subseteq)$ 有极大元. 注意到空和定义为零模故 $\emptyset \in \mathcal{J}$, $\mathcal{J} \neq \emptyset$. 我们断言 $(\mathcal{J}, \subseteq)$ 中每个链都有上界, 论证如下: 给定全序子集 $\mathcal{J}' \subseteq \mathcal{J}$, 并集 $J' := \bigcup_{J \in \mathcal{J}'} J$ 仍属于 $\mathcal{J}$, 这是因为 $\sum_{i \in J'} M_i$ 为直和当且仅当

$$\forall i \in J', M_i \cap \sum_{\substack{j \in J' \\ j \neq i}} M_j = \{0\},$$

而此条件仅须对 J' 的有限子集检验即可.

取 J 为 $(\mathcal{J}, \subseteq)$ 的极大元. 若 $\bigoplus_{i \in J} M_i = M$ 则得到 (2), 否则存在 $k \in I$ 使得 $M_k \not\subseteq \bigoplus_{i \in J} M_i$; 因为 M_k 单, $M_k \cap \bigoplus_{i \in J} M_i = \{0\}$, 由此可推出 $J \sqcup \{k\} \in \mathcal{J}$, 矛盾.

现证 (2) $\implies$ (3). 任取子模 $M' \subset M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, 置

$$\mathcal{J} := \left\{ J \subseteq I : M' + \bigoplus_{i \in J} M_i \text{ 是直和} \right\}.$$

Chapter 7. 模论速成课 (a crash course of module theory)

仿照前面论证可知存在极大元 $J \in \mathcal{J}$, 我们断言 $M'' := \bigoplus_{i \in J} M_i$ 满足 $M = M' \oplus M''$. 设若不然, 必

存在 $k \in I$ 使 $M_k \not\subseteq M' \oplus M''$, 单性蕴涵 $M_k \cap (M' \oplus M'') = \{0\}$, 从而 $J \sqcup \{k\} \in \mathcal{J}$ 导致矛盾.

现证 (3) $\implies$ (1). 我们断言任意非零子模 $M' \subseteq M$ 皆有单子模. 假设此性质并定义 $\text{soc}(M)$ 为 M 中所有单子模的和, 由 (3) 知存在 $M' \subseteq M$ 使得 $M = \text{soc}(M) \oplus M'$, 若 $M' \neq \{0\}$ 则存在单子模 $N \subseteq M'$, 于是从 $N \subseteq \text{soc}(M) \cap M' = \{0\}$ 导出矛盾.

最后断言的证明如下. 另断言: 对任意非零模 M 皆存在子模 $M_2 \subseteq M_1 \subseteq M$ 使得 M_1/M_2 为单. 取 $m \in M \setminus \{0\}$, $M_1 := Rm$, 定义 R 的左理想 $\mathfrak{a} := \text{Ker}[R \xrightarrow{r \mapsto rm} M_1]$ 以使 $R/\mathfrak{a} \simeq M_1$. 由 Zorn 引理 [Thm. 0.3](#) 知存在极大左理想 $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}$, 取对应于 $\mathfrak{b}/\mathfrak{a} \subseteq R/\mathfrak{a}$ 的子模 $M_2 \subset M_1$ 即可. 以上断言给出 M' 的单子商 M_1/M_2 . 证明开端已经说明了 M' 和 M_1 继承 M 之性质 (3), 于是存在嵌入 $M_1/M_2 \hookrightarrow M_1 \subseteq M'$, 此即所求的单子模. $\square$

Proposition 7.16. 半单模的子模半单.

Proof. 考虑短正合列 $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$, [Prop. 7.15](#) 条件 (3) 若对 M 成立, 则对 M' 和 M'' 亦然. 设 $M'_0 \subseteq M'$ 为子模, 按假设存在 $N \subseteq M$ 使得 $M = M'_0 \oplus N$. 容易验证 $M' = M'_0 \oplus (N \cap M')$, 故 (3) 对 M' 成立. 另一方面, 按假设 M' 是直和项: $M \simeq M' \oplus S$, 于是 $M'' \simeq M/M'$ 同构于 M 的子模 S , 由前一步知 M'' 也满足 (3). $\square$

7.8 Wedderburn–Artin 定理

代数也可以类同群环模定义单性与半单性.

Definition 7.14 [单代数 (simple algebra)]. 域 K 上的代数 A 称为单的, 如果其没有非平凡的双边理想.

Definition 7.15 [半单代数 (semisimple algebra)]. 域 K 上的代数 A 称为半单的, 如果其左正则模半单.

同模的情形类似, 代数的半单性也有很多等价定义.

Proposition 7.17. 设 A 是域 K 上的有限维代数, 则下述条件等价:

1. 左正则 A -模 A 半单;

2. 任意 A -左模均半单;
3. A 没有非平凡幂零双边理想.

Proof. (1) $\implies$ (2): 任取 A -左模 M . 从 M 取一组生成元, 得到某个自由模 F , 其到 M 的满同态 $\pi: F \rightarrow M$. 根据 [Prop. 7.3](#), F 是若干个半单的左正则 A -模 A 的直和, 而半单模的任意直和仍半单, 故由假设知 F 半单. 又半单模的商模仍半单, 从而 $M \cong F/\ker \pi$ 也是半单模.

(2) $\implies$ (3): 反证. 设 I 是 A 的非平凡幂零双边理想, 且 $I^n = 0$ 而 $I^{n-1} \neq 0$. 由假设, 作为 A -左模的 I^{n-1} 半单, 根据 [Prop. 7.15](#), 存在非平凡单左子模 $L \leq I^{n-1}$. 由于 $L \subseteq I^{n-1}$ 且 $I^n = 0$, 有 $IL \subseteq I^n = 0$. 现在考虑 $J := LA$. 因为 L 是左正则 A -单模从而是左理想, 故 J 是双边理想; 又 $L = L \cdot 1 \subseteq LA = J$, 所以 $J \neq 0$. 对任意 $l_1 a_1, l_2 a_2 \in J$, 有

$$(l_1 a_1)(l_2 a_2) = l_1(a_1 l_2)a_2.$$

但因 L 为左理想, $a_1 l_2 \in L$, 于是 $l_1(a_1 l_2) \in IL = 0$ (这里用到 $l_1 \in L \subseteq I$). 故 $J^2 = 0$, 即 J 是非零幂零双边理想, 矛盾. 因而 A 没有非零幂零理想.

(3) $\implies$ (1): 我们证明更强的命题: A 的任意左理想都是半单模. 对左理想的维数作归纳. 当左理想 $M = 0$ 时结论显然成立. 设对所有维数小于 $\dim_K M$ 的左理想结论成立, 现设 $M \neq 0$. 由于 A 有限维, M 也是有限维线性空间, 故 M 中存在极小非零左理想 $L \leq M$. 于是 L 是单左模.

下证 L 中存在幂等元 e , 且对任意 $x \in L$ 有 $xe = x$. 先说明 $L^2 \neq 0$. 若 $L^2 = 0$, 则 $(LA)^2 = LALA \subseteq L^2 A = 0$, 所以 LA 是非零幂零双边理想. 但 $L = L \cdot 1 \subseteq LA$, 故 $LA \neq 0$, 这与假设矛盾. 因此 $L^2 \neq 0$, 从而可取 $x \in L$ 使得 $Lx \neq 0$. 定义右乘映射

$$\rho_x: L \rightarrow L, \quad y \mapsto yx.$$

它是 A -模同态, 且非零. 由 [Schur 第一引理 Thm. 7.6](#), ρ_x 为同构. 于是存在 $e \in L$ 使得 $ex = x$. 又因为 $(e^2 - e)x = 0$, 而 ρ_x 单射, 故 $e^2 - e = 0$, 即 $e^2 = e$. 再对任意 $y \in L$, 有

$$(ye - y)x = yex - yx = y(ex) - yx = yx - yx = 0.$$

由 ρ_x 的单射性知 $ye = y, \forall y \in L$. 现在定义 $\pi: M \rightarrow L, m \mapsto me$. 这是 A -模同态, 因为

$$\pi(am) = (am)e = a(me) = a\pi(m).$$

对任意 $y \in L$, 有 $\pi(y) = ye = y$, 所以 $\pi|_L = \text{id}_L$. 因而 $M = L \oplus \ker \pi$. 由于 $L \neq 0$, 故

$$\dim_K \ker \pi < \dim_K M.$$

又 $\ker \pi$ 仍是左理想, 由归纳假设, $\ker \pi$ 半单, 从而 M 半单. 归纳完成, 任意左理想皆半单. 特别取 $M = A$, 得左正则 A -模 A 半单. $\square$

Wedderburn–Artin 定理对半单代数/环的分类具有重要意义, 其有很多种相互不完全等价的表述, 下面提供的是最常见的环论版本.

Chapter 7. 模论速成课 (a crash course of module theory)

Theorem 7.7 [Wedderburn–Artin 定理 (Wedderburn–Artin theorem)]. 非零么环半单当且仅当其同构于一个除环上所有矩阵单环的有限直和, 即存在除环 D_i 和正整数 n_i , $i = 1, \dots, r$, 使得

$$R \cong \bigoplus_{i=1}^r M_{n_i}(D_i).$$

该半单环是单的, 当且仅当直和式中只有一个分量.

至于代数版本, 多了一个域 K 的线性结构. 只需要把定理中的「环」替换为「代数」即可.

Proof. 以下证明改写自 [nLab](#).

设 R 是半单环. 则按定义, 任意右 R -模都是若干单右 R -模的直和, 而任意有限生成的 R -模必为其中有限个的直和. 因此, 右正则 R -模 R (此处记作 R_R) 同构于若干单右 R -模的有限直和; 这些单模实际上就是 R 的极小右理想. 把这个直和写作 $R \cong \bigoplus_i I_i^{\oplus m_i}$, 其中各个 I_i 是两两不同构的单右 R -模, 第 i 个以重数 m_i 出现. 于是对于其自同态环, 有

$$\text{End}(R_R) \cong \bigoplus_i \text{End}(I_i^{\oplus m_i}).$$

并且我们可以将 $\text{End}(I_i^{\oplus m_i})$ 识别为一个矩阵环:

$$\text{End}(I_i^{\oplus m_i}) \cong M_{m_i}(\text{End}(I_i)),$$

这里右 R -模 I_i 的自同态环 $\text{End}(I_i)$, 由于 I_i 是单模, 依 Schur 引理 [Thm. 7.6](#) 可知是一个除环. 由于 $R \cong \text{End}(R)$, 我们便得到

$$R \cong \bigoplus_i M_{m_i}(\text{End}(I_i)).$$

这里我们使用右模, 是因为 $R \cong \text{End}(R)$; 如果改用左模, 则有 $R \cong \text{End}(R)^{\text{op}}$, 但证明仍然完全类似. □

Corollary 7.2 [Burnside 公式 (Burnside's formula)]. 设 K 是代数闭域, A 是 K 上有限维半单代数, $M_1, \dots, M_r$ 是两两不同构的全部不可约左 A -模的代表元. 则左正则 A -模有分解

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^r M_i^{\oplus \dim_K M_i}.$$

7.9. Artin 模与 Noether 模

换言之, 每个单模 M_i 在 A 中的重数恰等于 $\dim_K M_i$. 特别地,

$$\dim_K A = \sum_{i=1}^r (\dim_K M_i)^2.$$

Note. *Burnside* 公式这个名字多见于群表示论语境, 此处所述是作为 *Wedderburn–Artin* 定理的推论的更一般的形式.

Proof. 由 *Wedderburn–Artin* 定理 *Thm. 7.7*, 代数 A 同构于若干矩阵代数的有限直和. 又因为 K 是代数闭域, 根据 *Schur* 第二引理 *Thm. 7.6*, 每个除环因子必同构于 K , 故存在正整数 $n_1, \dots, n_r$ 使得

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^r M_{n_i}(K).$$

对每个 i , 记 $S_i = K^{n_i}$, 视为矩阵代数 $M_{n_i}(K)$ 上的标准左模. 则 S_i 是不可约左 $M_{n_i}(K)$ -模, 且任意不可约左 $M_{n_i}(K)$ -模都与 S_i 同构. 另一方面, 作为左 $M_{n_i}(K)$ -模, $M_{n_i}(K) \cong S_i^{\oplus n_i}$, 因为矩阵可按列分解, 每一列都给出一个与 K^{n_i} 同构的子模. 因此, 作为左 A -模, $A \cong \bigoplus_{i=1}^r S_i^{\oplus n_i}$. 这说明 A 的全部

两两不同构不可约左模恰为这些 S_i , 且 S_i 在正则模中的重数正是 n_i . 又因为 $\dim_K S_i = n_i$, 故若将 M_i 记作这些不可约模的代表元, 则

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^r M_i^{\oplus \dim_K M_i}.$$

最后对两边取 K -维数, 得

$$\dim_K A = \sum_{i=1}^r \dim_K (M_i^{\oplus \dim_K M_i}) = \sum_{i=1}^r (\dim_K M_i)^2.$$

□

* 7.9 Artin 模与 Noether 模

References of this chapter

[李文威 23] 李文威.《代数学方法: 卷一》. 1st. 北京, China: 高等教育出版社, 2023, 约 450.

Chapter 7. 模论速成课 (a crash course of module theory)

[谢姚吴 14] 谢启鸿, 姚慕生, and 吴泉水. 《高等代数》. Chinese. 4th ed. Beijing, China: 复旦大学出版社, 2014. isbn: 978-7-309-10989-4.

[丘维声 11] 丘维声. 《群表示论》. 高等教育出版社, 2011. isbn: 978-7-04-032711-3.

8

代数速成课 (a crash course of algebra)

Contents

8.1 张量代数	173
8.2 Clifford 代数	179
8.3 旋量代数	182

8.1 张量代数

分次结构十分常见, 以至人人用而不觉. 通俗地说, 所谓分次代数就是代数内部存在「分层结构」, 曰「次数」, 核心在于第 i 层和第 j 层相乘, 结果会落进第 $i + j$ 层. 例证如多项式代数 $R[X] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} RX^n$, 按照项的次数分层.

Definition 8.1 [分次模 (graded module), 分次代数 (graded algebra)]. 令 D 为 Abel 么半群, 以 $+$ 表二元运算, 0 表么元.

- 交换环 R 上的 D -分次模是配备直和分解 $M = \bigoplus_{i \in D} M_i$ 的模 M . 从 M 到 N 的分次同态意谓满足 $\forall i, \varphi(M_i) \subseteq N_i$ 的同态, 张量积 $M \otimes N$ 上诱导自然的分次结构

$$(M \otimes N)_k = \bigoplus_{\substack{i, j \in D \\ i+j=k}} M_i \otimes N_j.$$

称 $x \in M_i \setminus \{0\}$ 为 M 中次数为 i 的齐次元, 也记作 $\deg(x) = i$; 对 0 不定义次数. 分次

Chapter 8. 代数速成课 (a crash course of algebra)

子模意谓 M 中满足 $N = \bigoplus_i (N \cap M_i)$ 的子模.

- 交换环 R 上的 D -分次代数是配备直和分解 $A = \bigoplus_{i \in D} A_i$ 的 R -代数, 其乘法满足 $A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j}$ 且 $1 \in A_0$; 因此 A_0 是子代数. 同态 $\varphi: A \rightarrow B$ 须同时是 D -分次模的同态, 亦即适合于 $\varphi(A_i) \subseteq B_i$. 分次理想意谓 A 中形如 $I = \bigoplus_i (I \cap A_i)$ 的理想; 因而当 $I \neq A$ 时 $A/I = \bigoplus_i A_i/I \cap A_i$ 仍是分次代数.

当 $(D, +) \subseteq (\mathbb{Z}, +)$ 时, 我们径称这些对象是分次的.

回忆 Prop. 7.9 断言张量积保直和, 上述定义第一点可行.

Example. 光滑微分流形 M 上的所有 $\mathbb{C}$ -值微分形式对运算 $(\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta$ 构成 $\mathbb{C}$ -代数, 记作 $A(M) = \bigoplus_{k=0}^{\dim M} A^k(M)$, 其中 $A^k(M)$ 表示 k 次微分形式构成的 $\mathbb{C}$ -矢量空间. 回忆到 $A^0(M) = C^\infty(M)$ 而 $A^k(M)$ 中任意元素 ω 在局部坐标 $x_1, \dots, x_n$ 下可唯一地表作

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad f_{i_1, \dots, i_k} \in C^\infty(M)$$

的形式. 于是 $A(M)$ 构成分次代数, 乘法不交换, 然而几何学中有熟悉的公式

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{ab} \eta \wedge \omega, \quad \omega \in A^a(M), \eta \in A^b(M).$$

代数 $A(M)$ 的另一个关键性质是它具有外微分运算 $d: A(M) \rightarrow A(M)$.

Definition 8.2. 给定 Abel 幺半群 $(D, +)$ 以及加法同态 $\epsilon: D \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 分次代数 A 如满足

$$xy = (-1)^{\epsilon(\deg x)\epsilon(\deg y)} yx, \quad x, y \in A: \text{齐次元}$$

则称 A 的乘法是 ϵ -交换的.

取 $\epsilon = 0$ 则回归到交换分次代数. 最寻常的选取自然是 $D \subseteq \mathbb{Z}$ 而 $\epsilon: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 是商同态的情形, 这时我们常把 ϵ -交换称作**反交换**. 有时我们还会加上性质

$$[\epsilon(\deg x) = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}] \implies x^2 = 0. \quad (8.1)$$

当 $2 \in R^\times$ 时, ϵ -交换性蕴涵 $\epsilon(\deg x) = 1 \implies x^2 = -x^2 \implies x^2 = 0$, 条件 (8.1) 自动成立. 在微分几何等应用中常取 $R = \mathbb{C}, \mathbb{R}$, 故无差异.

8.1. 张量代数

Lemma 8.1. 在 D -分次代数 (或分次模) 中的双边理想 I (或子模) 是分次的当且仅当它能由齐次元生成.

Proof. 以下只处理理想情形. 分次理想按定义当然由齐次元生成. 欲证其逆, 只需说明 I 有齐次生成元 $\{a_s : s \in S\}$ 蕴涵 $I = \sum_i I \cap A_i$. 按生成元的定义, I 中元素是形如 ua_sv 的元素的 R -线性组合, 其中 $u, v \in A$; 将 u, v 进一步拆成齐次项则可假设这些 ua_sv 都是齐次元. $\square$

Theorem 8.1 [Koszul 符号规则 (Koszul sign rule)]. 取定 $Abel$ 么半群 $(D+,)$ 及加法同态 $\epsilon : D \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 并令 A, B 为 D -分次代数. 在张量积 $A \otimes B$ 上定义乘法使得对齐次元有

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{\epsilon(\deg b)\epsilon(\deg a')} aa' \otimes bb',$$

则

- $A \otimes B$ 对此乘法成为 D -分次代数;
- 自然同态 $\iota_A : A \rightarrow A \otimes B$ 和 $\iota_B : B \rightarrow A \otimes B$ 都是分次代数的同态;
- 若 A 和 B 都是 ϵ -交换的, 则 $A \otimes B$ 亦然;
- **Koszul 辫结构** $c_\epsilon(A, B) : A \otimes B \xrightarrow{\sim} B \otimes A$ 是分次代数的同构.

Proof. 对齐次元定义

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{\epsilon(\deg b)\epsilon(\deg a')} aa' \otimes bb'.$$

由

$$((a \otimes b)(a' \otimes b'))(a'' \otimes b'') = (-1)^{\epsilon(\deg b)\epsilon(\deg a') + (\epsilon(\deg b) + \epsilon(\deg b'))\epsilon(\deg a'')} (aa')a'' \otimes (bb')b'',$$

以及

$$(a \otimes b)((a' \otimes b')(a'' \otimes b'')) = (-1)^{\epsilon(\deg b')\epsilon(\deg a'') + \epsilon(\deg b)(\epsilon(\deg a') + \epsilon(\deg a''))} a(a'a'') \otimes b(b'b''),$$

知乘法结合; 么元为 $1_A \otimes 1_B$. 又若 $a \in A_p, b \in B_q, a' \in A_{p'}, b' \in B_{q'}$, 则

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') \in (A \otimes B)_{(p+q)+(p'+q')},$$

故 $A \otimes B$ 是 D -分次代数. 自然嵌入 $\iota_A(a) = a \otimes 1_B, \iota_B(b) = 1_A \otimes b$ 显然保持次数, 且保持乘法, 因而是分次代数同态. 若 A, B 均为 ϵ -交换的, 则只需对齐次元验证. 有

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{\epsilon(\deg b)\epsilon(\deg a')} aa' \otimes bb'$$

Chapter 8. 代数速成课 (a crash course of algebra)

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^{\epsilon(\deg b)\epsilon(\deg a') + \epsilon(\deg a)\epsilon(\deg a') + \epsilon(\deg b)\epsilon(\deg b')} a' a \otimes b' b \\
 &= (-1)^{(\epsilon(\deg a) + \epsilon(\deg b))(\epsilon(\deg a') + \epsilon(\deg b'))} (a' \otimes b')(a \otimes b).
 \end{aligned}$$

故 $A \otimes B$ 亦为 ϵ -交换的. 最后定义

$$c_\epsilon(A, B)(a \otimes b) = (-1)^{\epsilon(\deg a)\epsilon(\deg b)} b \otimes a.$$

它保持次数, 且

$$\begin{aligned}
 c_\epsilon((a \otimes b)(a' \otimes b')) &= (-1)^{\epsilon(\deg b)\epsilon(\deg a') + \epsilon(\deg a)\epsilon(\deg a') + \epsilon(\deg b)\epsilon(\deg b')} bb' \otimes aa' \\
 &= (-1)^{\epsilon(\deg a)\epsilon(\deg b) + \epsilon(\deg a)\epsilon(\deg b') + \epsilon(\deg a')\epsilon(\deg b')} bb' \otimes aa',
 \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
 c_\epsilon(a \otimes b)c_\epsilon(a' \otimes b') &= (-1)^{\epsilon(\deg a)\epsilon(\deg b) + \epsilon(\deg a')\epsilon(\deg b')} (b \otimes a)(b' \otimes a') \\
 &= (-1)^{\epsilon(\deg a)\epsilon(\deg b) + \epsilon(\deg a)\epsilon(\deg b') + \epsilon(\deg a')\epsilon(\deg b')} bb' \otimes aa'.
 \end{aligned}$$

故 $c_\epsilon(A, B)$ 是分次代数同态. 又 $c_\epsilon(B, A)c_\epsilon(A, B) = \text{id}_{A \otimes B}$, $c_\epsilon(A, B)c_\epsilon(B, A) = \text{id}_{B \otimes A}$, 故其为分次代数同构. $\square$

Definition 8.3 [张量代数]. 定义 R -模 M 的张量代数为 $T(M) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(M)$, 其中

$$\begin{aligned}
 T^n(M) &:= \underbrace{M \otimes \cdots \otimes M}_n, \quad n \geq 1, \\
 T^0(M) &:= R.
 \end{aligned}$$

乘法和幺元分别由诸 $\mu_{i,j}$ 和 $R = T^0(M) \hookrightarrow T(M)$ 给出. 它带有自然的 R -模单同态 $M = T^1(M) \hookrightarrow T(M)$. 同时 $T(M)$ 也是分次代数, 其 k 次齐次部分无非是 $T^k(M)$.

乘法的定义如在元素层面展开, 无非是张量积

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \cdot (y_1 \otimes \cdots \otimes y_m) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m.$$

下述泛性质表明 $(T(M), M \rightarrow T(M))$ 可谓是模 M 上的「自由代数」.

8.1. 张量代数

Theorem 8.2. 张量代数满足如下泛性质: 对任意 R -代数 A 连同 R -模同态 $f: M \rightarrow A$, 存在唯一的 R -代数同态 $\varphi: T(M) \rightarrow A$ 使下图交换:

$$\begin{array}{ccc} & T(M) & \\ & \downarrow \exists! \varphi & \\ M & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

Proof. 同态 $\varphi: T(M) \rightarrow A$ 由它在每个直和项 $T^n(M)$ 上的限制确定, 根据泛性质, 当 $n \geq 1$ 时后者又由多重线性映射

$$\begin{aligned} M \times \cdots \times M &\rightarrow A \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \end{aligned}$$

所确定. 图表中的代数间同态必须满足 $\varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$, 右边是 $(x_1, \dots, x_n)$ 的多重线性映射; 由泛性质知这唯一确定了 φ . 欲证明存在性, 仅须倒转以上论证以构造模同态 $\varphi: T(M) \rightarrow A$, 并按部就班地验证它的乘性. $\square$

Lemma 8.2. 对称代数 $\text{Sym}(M)$ 是交换分次代数; 外代数 $\wedge(M)$ 是反交换分次代数并满足性质 $[\epsilon(\deg x) = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}] \implies x^2 = 0$.

Example. 设 M 为秩一自由模 $M = Rx$. 则作为分次代数有 $\text{Sym}(M) = R[x] = \bigoplus_{n \geq 0} Rx^n$, 而 $\wedge(M) = R \oplus Rx$.

Lemma 8.3. 对称代数与外代数的构造与基变换交换: 对环同态 $R \rightarrow S$, 有

$$\text{Sym}(\cdot \otimes S) \xrightarrow{\sim} \text{Sym}(\cdot) \otimes S, \quad \wedge(\cdot \otimes S) \xrightarrow{\sim} \wedge(\cdot) \otimes S,$$

而且同构保分次结构.

Proof. $\square$

Corollary 8.1. 对称代数和外代数的构造化直和为张量积: 对于任一族 R -模 $\{M_i\}_{i \in I}$, 置 $M := \bigoplus_{i \in I} M_i$. 存在分次 R -代数的自然同构 $\bigotimes_{i \in I} \text{Sym}(M_i) \xrightarrow{\sim} \text{Sym}(M)$ 和 $\bigotimes_{i \in I} \wedge(M_i) \xrightarrow{\sim}$

Chapter 8. 代数速成课 (a crash course of algebra)

$\wedge(M)$, 其中 $\bigotimes_i \wedge(M_i)$ 按 Koszul 符号律配备分次 R -代数结构. 它们由以下交换图表刻画: 对每个 $j \in I$,

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{i \in I} \text{Sym}(M_i) & \xrightarrow{\sim} & \text{Sym}(M) \\ & \nwarrow \quad \nearrow \text{Sym}(M_j \rightarrow M) & \\ & \text{Sym}(M_j) & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bigotimes_{i \in I} \wedge(M_i) & \xrightarrow{\sim} & \wedge(M) \\ & \nwarrow \quad \nearrow \wedge(M_j \rightarrow M) & \\ & \wedge(M_j) & \end{array}$$

Proof.

□

Corollary 8.2. 设 $M = \bigoplus_{x \in X} Rx$ 是以集合 X 为基的自由 R -模. 则

- $\text{Sym}(M)$ 作为分次 R -代数同构于多项式代数 $R[X]$;
- 赋予 X 任意全序, 则 $\wedge(M)$ 作为 R -模是以

$$\{x_1 \wedge \cdots \wedge x_k : k \geq 0, x_1 < \cdots < x_k \in X\}$$

为基的自由模.

如果 R -模 N 由 n 个元素生成, 那么 $m > n \implies \wedge^m N = \{0\}$.

Proof.

□

Definition 8.4 [对称代数 (symmetric algebra), 外代数 (exterior algebra)]. 以齐次生成元定义 $T(M)$ 的分次双边理想

$$\begin{aligned} I_{\text{Sym}}(M) &:= \langle x \otimes y - y \otimes x : x, y \in M \rangle, \\ I_{\wedge}(M) &:= \langle x \otimes x : x \in M \rangle. \end{aligned}$$

相应的商代数

$$\begin{aligned} \text{Sym}(M) &:= T(M)/I_{\text{Sym}}(M), \\ \bigwedge(M) &:= T(M)/I_{\wedge}(M) \end{aligned}$$

分别称为 M 的对称代数和外代数.

8.2. Clifford 代数

当 $R = \mathbb{C}$ 而 M 是 Hilbert 空间时, $\text{Sym}(M)$ 是量子物理学中常用的 (Bose 子) Fock 空间, 取 $\wedge(M)$ 就得到 (Fermi 子) Fock 空间; 从 M 过渡到其 Fock 空间是所谓二次量子化的一道步骤.

Definition 8.5 [$\mathbb{Z}_2$ -分次扩张]. 设 A 是一个代数, 若其能分解为 $A = A_0 \oplus A_1$, 满足 $A_{\bar{i}}A_{\bar{j}} \subseteq A_{\bar{i}+\bar{j}}$, 其中 $\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{Z}_2$, 那么就称 A 是一个 $\mathbb{Z}_2$ -分次代数或超代数, A_0 称为偶部分, A_1 称为奇部分.

Example 21.

8.2 Clifford 代数

Clifford 代数起源于旋量几何, 在物理上则是拓扑能带分类的重要代数工具.

Definition 8.6 [Clifford 代数 (Clifford algebra)]. 设 K 是特征不为 2 的域, V 是 K 上的线性空间, $Q: V \rightarrow K$ 是其上的二次型. 定义 V 关于 Q 的 Clifford 代数为

$$\text{Cl}(V, Q) := T^\bullet(V) / \langle v \otimes v + Q(v) \mid v \in V \rangle, \quad T^\bullet(V) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n},$$

因此在 $\text{Cl}(V, Q)$ 中有关系 $v^2 = -Q(v)\mathbf{1}$. 设 $\mathbb{R}^{q,p} = \mathbb{R}^{q+p}$ 配备二次型

$$Q_{q,p}(x) = (x^1)^2 + \cdots + (x^q)^2 - (x^{q+1})^2 - \cdots - (x^{q+p})^2.$$

定义 $\text{Cl}^{q,p} := \text{Cl}(\mathbb{R}^{q,p}, Q_{q,p})$.

另一种定义方式是借用极化公式 (polarization formula): 设 Q 是非退化二次型, 定义

$$B(u, v) := \frac{1}{2} (Q(u+v) - Q(u) - Q(v)),$$

那么被商掉的等价关系应为

$$uv + vu = -B(u, v).$$

Example 22. Clifford 代数 $\text{Cl}^{q,p}$ 可以视作如下生成元生成的实代数, $e_1, \dots, e_q$ 以及

Chapter 8. 代数速成课 (a crash course of algebra)

$\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_p$, 生成元之间满足代数关系:

$$\{e_i, e_j\} = -2\delta_{ij}, \quad \{\tilde{e}_i, \tilde{e}_j\} = 2\delta_{ij}, \quad \{e_i, \tilde{e}_j\} = 0.$$

从而 $e_i^2 = -1, \tilde{e}_i^2 = 1$.

Proof. 设 $V = \mathbb{R}^{q,p}$ 配备二次型

$$Q(x) = (x^1)^2 + \dots + (x^q)^2 - (y^1)^2 - \dots - (y^p)^2.$$

取正交基 $e_1, \dots, e_q, \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_p$, 使得 $Q(e_i) = 1, Q(\tilde{e}_a) = -1, B(e_i, \tilde{e}_a) = 0$. 其中 B 是由 Q 极化得到的对称双线性型. 由 Clifford 代数的定义, 在 $\text{Cl}^{q,p}$ 中有 $v^2 = -Q(v)$. 对任意 $u, v \in V$, 将 $u+v$ 代入上式, 得 $(u+v)^2 = -Q(u+v)$. 展开左端并利用 $u^2 = -Q(u), v^2 = -Q(v)$, 得

$$uv + vu = -(Q(u+v) - Q(u) - Q(v)).$$

又由极化公式 $B(u, v) = \frac{1}{2}(Q(u+v) - Q(u) - Q(v))$, 因此 $uv + vu = -2B(u, v)$. 于是 $\{e_i, e_j\} = -2B(e_i, e_j) = -2\delta_{ij}$, $\{\tilde{e}_a, \tilde{e}_b\} = -2B(\tilde{e}_a, \tilde{e}_b) = 2\delta_{ab}$, 以及 $\{e_i, \tilde{e}_a\} = -2B(e_i, \tilde{e}_a) = 0$. 特别地, $e_i^2 = -1, \tilde{e}_a^2 = 1$. $\square$

从上例子可见:

- $\text{Cl}^{1,0} \cong \mathbb{C}$, 只需取 $e_1 = i$;
- $\text{Cl}^{2,0} \cong \mathbb{H}$, 取 $e_1 = i, e_2 = j$, 从而 $k = e_1 e_2$;
- $\text{Cl}^{0,1} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, 其中元素均形如 $a + b\tilde{e}_1$;
- $\text{Cl}^{0,2} \cong M_2(\mathbb{R})$, 只需 $\tilde{e}_1 = \sigma_x, \tilde{e}_2 = \sigma_z$, 从而 $\tilde{e}_2 \tilde{e}_1 = i\sigma_y$, 因此 $M_2(\mathbb{R}) \cong \text{span}_{\mathbb{R}} \{1, \sigma_x, \sigma_z, i\sigma_y\}$;
- $\text{Cl}^{1,1} \cong M_2(\mathbb{R})$, 只需取 $e_1 = i\sigma_y, \tilde{e}_1 = \sigma_x$.

当我们将系数拓展到复数域, 可以重新定义 ie_i 为新的生成元, 从而 $(e_i^2 = -1) \mapsto ((ie_i)^2 = 1)$, 所以复 Clifford 代数不需要区分平方为 $+1$ 和 -1 的生成元. 定义复 Clifford 代数 Cl^p 是如下生成元复数域上生成的代数, $e_1, \dots, e_p$, 满足

$$\{e_i, e_j\} = 2\delta_{ij}.$$

8.2. Clifford 代数

Lemma 8.4 [Clifford 代数的泛性质]. 设 A 是域 K 上含么结合代数, $f: V \rightarrow A$ 是线性映射. 若 $f(v)^2 = -Q(v)1_A, \forall v \in V$, 则存在唯一的代数同态 $\tilde{f}: \text{Cl}(V, Q) \rightarrow A$ 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\iota} & \text{Cl}(V, Q) \\ & \searrow f & \downarrow \tilde{f} \\ & & A \end{array}$$

即 $\tilde{f} \circ \iota = f$, 其中 ι 是自然嵌入.

直观地说, 若在代数 A 中找到了一组元素 $f(v)$, 满足和 Clifford 生成元一样的关系, 那么这个赋值就会自动且唯一地延拓成一个代数同态.

Proof. 设 $\text{Cl}(V, Q) = \mathbf{T}^\bullet(V) / \langle v \otimes v + Q(v) \mid v \in V \rangle$. 记商映射为 $\pi: \mathbf{T}^\bullet(V) \rightarrow \text{Cl}(V, Q)$, 自然嵌入为 $\iota: V \hookrightarrow \mathbf{T}^\bullet(V) \xrightarrow{\pi} \text{Cl}(V, Q)$. 设 A 是含单位结合 K -代数, $f: V \rightarrow A$ 是线性映射, 且满足 $f(v)^2 = -Q(v)1_A, \forall v \in V$. 由张量代数 $\mathbf{T}^\bullet(V)$ 的泛性质 *Thm. 8.2*, f 唯一延拓为代数同态 $\hat{f}: \mathbf{T}^\bullet(V) \rightarrow A$, 满足 $\hat{f}|_V = f$. 又因为

$$\hat{f}(v \otimes v + Q(v)) = f(v)^2 + Q(v)1_A = 0,$$

所以理想 $\langle v \otimes v + Q(v) \mid v \in V \rangle$ 包含在 $\ker \hat{f}$ 中. 因此 $\hat{f}$ 穿过商代数, 得到唯一的代数同态 $\tilde{f}: \text{Cl}(V, Q) \rightarrow A$ 使得 $\tilde{f} \circ \iota = f$. 唯一性来自于 $\text{Cl}(V, Q)$ 由 $\iota(V)$ 作为代数生成: 若两个代数同态在所有 $\iota(v)$ 上相同, 则它们在整个 Clifford 代数上相同. $\square$

Proposition 8.1. $\text{Cl}^{q,p} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \text{Cl}^{p+q}.$

Proof. 记 Cl^{p+q} 生成元为 $\gamma_1, \dots, \gamma_q, \gamma_{q+1}, \dots, \gamma_{q+p}$, 满足 $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$. 在复化代数 $\text{Cl}^{q,p} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 中定义 $\Gamma_i := ie_i \otimes 1, 1 \leq i \leq q$, 以及 $\Gamma_{q+a} := \tilde{e}_a \otimes 1, 1 \leq a \leq p$. 因为 $e_i^2 = -1$ 且 $\tilde{e}_a^2 = 1$, 所以 $\Gamma_i^2 = (ie_i)^2 = 1, \Gamma_{q+a}^2 = \tilde{e}_a^2 = 1$. 又由于原来的生成元两两反对易, 可得 $\{\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$. 因此由复 Clifford 代数的泛性质, 存在唯一的复代数同态

$$\Phi: \text{Cl}^{p+q} \rightarrow \text{Cl}^{q,p} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

使得 $\Phi(\gamma_i) = ie_i \otimes 1, \Phi(\gamma_{q+a}) = \tilde{e}_a \otimes 1$. 反过来, 在 Cl^{p+q} 中定义 $e_i \mapsto i\gamma_i, \tilde{e}_a \mapsto \gamma_{q+a}$. 则 $(i\gamma_i)^2 = -1, \gamma_{q+a}^2 = 1$, 并且相应的反对易关系也与 $\text{Cl}^{q,p}$ 的定义完全一致. 因此由 $\text{Cl}^{q,p}$ 的泛性质, 得到实代数同态 $\text{Cl}^{q,p} \rightarrow \text{Cl}^{p+q}$. 将其复线性延拓, 得到复代数同态 $\Psi: \text{Cl}^{q,p} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow \text{Cl}^{p+q}$. 它在生成元上满足 $\Psi(e_i \otimes 1) = i\gamma_i, \Psi(\tilde{e}_a \otimes 1) = \gamma_{q+a}$. 直接检查生成元可知 $\Psi \circ \Phi = \text{id}_{\text{Cl}^{p+q}}, \Phi \circ \Psi = \text{id}_{\text{Cl}^{q,p} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}}$. 因此 $\text{Cl}^{q,p} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \text{Cl}^{p+q}$. $\square$

Chapter 8. 代数速成课 (a crash course of algebra)

8.3 旋量代数

旋量通常被自然语言解释为「矢量的平方根」. 对第一次接触这个概念的人而言, 这般表述显然省略了诸多内在含义 (矢量怎么能求平方根呢?), 但是假若我们理解了引入旋量的动机方可体会该句的精髓. 让我们先来看一个来自物理学中的动机.

Example. 一束沿着 z -方向传播的单色平面电磁波, 矢量表达式为

$$\mathbf{E}(z, t) = \operatorname{Re} \left[\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \right],$$

Jones 矢量 (Jones vector) $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x e^{i\phi_x} \\ A_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix}$ 记录了该波 x, y -方向的振幅和 (相对) 相位而略去平面波系数. 在偏振问题的研究中, Jones 矢量的射影等价类 $\mathbf{J} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbf{J} \sim \lambda \mathbf{J}$, $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ 正好能完全描述所有的偏振态.

在正式引入旋量的概念之前, 不妨先看看经典意义下的「旋量」.

Definition 8.7. 线矢量 $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^6$ 由主部和副部两部分构成, 分别为轴线 $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3$ 和其矩 $\mathbf{r} \times \mathbf{l}$,

$$\mathbf{L} := \begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{l} \end{pmatrix}.$$

上面的表达式又叫做 **Plücker 坐标 (Plücker coordinates)**.

Note. 主部也叫原部, 副部也叫对偶部.

Remark. 线矢量只有 5 个自由度, 因为存在约束 $\mathbf{l} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{l}) = 0$. 关于这点可以用下面的「力」的例子理解.

Example. Newton 力学中, 完整刻画物理量「力」除了其矢量部分, 还应当考虑其作用直线. 力学中应当区分「自由矢量」和「滑移矢量」的概念, 前者意味线性代数中的矢量——所有矢量 (数的三元组) 被视作可以在 3 维 *Euclid* 中任意放置的具备长度和方向的箭头; 后者却要求矢量位于空间中一条直线之上, 且其仅能在这条直线上自由移动. 物理上的力应当包含作用位点的信息, 当在 Newton 的力学理论中实际上只需要作用位点在力方向上的直线的信息足以.

Definition 8.8. 旋量 (screw) $\mathbf{S}$ 是如下表达式刻画的几何对象:

$$\mathbf{S} := \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{s} + h\mathbf{s} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6,$$

其中 $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3$ 称为旋量轴线, $\mathbf{r} \times \mathbf{s}$ 是其矩, $h \in \mathbb{R}$ 称为旋距.

Example. 刚体绕螺旋轴做螺旋运动时的螺旋量 (twist) $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{s} + h\mathbf{s} \end{pmatrix} = \dot{\theta} \mathbf{S}$, 其中 $\mathbf{S}$ 是单位螺旋轴 (可以想象为一个螺旋状刚体), $\dot{\theta}$ 是沿这条螺旋轴运动的速率 (可以想象为此刚体的沿轴自转的速度), $\mathbf{s}$ 是螺旋轴单位方向向量, h 是旋距, 表示每转过单位弧度, 沿轴向平移多少距离 (可以想象为螺纹的宽度).

Example. 力旋量 (wrench) $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{F} + h\mathbf{F} \end{pmatrix}$, 其中 $\mathbf{F}$ 是合力, 考虑的 $h\mathbf{F}$ 是自由偶矩, 比如螺丝刀

除了沿着自身轴线推拉的作用力 (6 维) 外还可以有沿自身轴线施加的扭矩.

以上是经典力学或者经典几何视角下的「旋量 screw」, 下文谈论的则是「旋量 spinor」, 后者通常是物理上更加关心的.

9

范畴论速成课 (a crash course of category theory)

Contents

9.1	范畴论中的基本概念	185
9.1.1	范畴	186
9.1.2	函子	192
9.1.3	自然变换	194
9.2	可表达性	198
9.2.1	Yoneda 引理	198
9.2.2	泛性质	206
* 9.3	最优构造	207
9.3.1	伴随	208
9.3.2	极限	212
9.3.3	完备	217
9.3.4	Kan 延拓	219

人是一切社会关系的总和.

— Karl Marx

范畴论是数学的数学, 其基本思想, 不再局限于数学对象的内部结构, 而是考究其与其他数学对象的关系.

9.1 范畴论中的基本概念

本节主要内容是范畴, 函子, 自然变换的概念. 在必要的概念均解释清楚后, 我们再回头来讲什么是 2-范畴, 以及相较地, 无穷范畴.

Chapter 9. 范畴论速成课 (a crash course of category theory)

9.1.1 范畴

Definition 9.1 [范畴 (category)]. 一个范畴 $\mathcal{C}$ 是指以下资料:

- 一族对象 (object), 记作 $\text{Ob}(\mathcal{C})$;
- 一族态射 (morphism), 记作 $\text{Mor}(\mathcal{C})$, 其元素或直接称为箭头, 配上一对映射

$$\text{Mor}(\mathcal{C}) \xrightarrow[s]{t} \text{Ob}(\mathcal{C}),$$

其中 s 与 t 分别给出态射的来源 (source) 与目标 (target);

- 对于 $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 记 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) := s^{-1}(X) \cap t^{-1}(Y)$ 为从 X 到 Y 的态射, 不至引起歧义时简记为 $\text{Hom}(X, Y)$, 有时也称 Hom 集为同态集. 态射满足性质:

1. **复合运算律 (composition law):** 任意的 $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 给定态射间的合成映射

$$\begin{aligned} \circ : \text{Hom}(Y, Z) \times \text{Hom}(X, Y) &\rightarrow \text{Hom}(X, Z) \\ (f, g) &\mapsto f \circ g \equiv fg. \end{aligned}$$

2. **结合律 (associativity):** 任意的 $f, g, h \in \text{Mor}(\mathcal{C})$, 如果合成 $f(gh)$ 与 $(fg)h$ 均有定义, 则

$$f(gh) = (fg)h.$$

3. **单位态射 (identity morphism):** 任意的 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 存在一个 $\text{id}_X \in \text{Hom}(X, X)$, 使得任意的 $f \in \text{Hom}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}(Z, X)$, 均有

$$f \text{id}_X = f, \quad \text{id}_X g = g.$$

对于态射别名 — 箭头, 或许令人稍微费解. 这个名称来源于范畴论中广泛使用的交换图. 在范畴论中, 箭头本身的意义是次要的, 关键是这种箭头所满足的性质. 既然箭头本身的内在结构不是终点, 使用看似具有丰富内涵的新名词态射作为概念, 事实上是一种不必要的行为.

有些文献要求 $\text{Ob}(\mathcal{C})$ 或/和 $\text{Mor}(\mathcal{C})$ 是一个集合, 因为某些必要的范畴不满足这个条件, 所以此处给出的定义不要求之. 但是几乎我们常讨论的范畴, 都满足 $\text{Mor}(\mathcal{C})$ 是集合.

Definition 9.2. 一个范畴 $\mathcal{C}$ 称为 $\mathcal{U}$ -范畴, 如果任意的 $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 均有 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 是 $\mathcal{U}$ -小集. 如果 $\text{Mor}(\mathcal{C})$ 也是 $\mathcal{U}$ -小集, 则称之为 $\mathcal{U}$ -小范畴.

9.1. 范畴论中的基本概念

依据 **Hyp. 0.1**, 只要不涉及到真类, 总是可以选用更大的宇宙, 使得范畴是 $\mathcal{U}$ -小的. 在不涉及宇宙这个概念的叙事中, 称态射集非真类的范畴是**局部小范畴**, 对象集和态射集均非真类的范畴是**小范畴**, 大多数情况下我们讨论的都是局部小范畴.

s 和 t , 有时也记作 dom 和 cod ; $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 有时也直接记作 $\mathcal{C}(X, Y)$.

注意 id_X 被其性质唯一确定, 回想群论中单位元的唯一性, 这与那是同理的. 称满足 $\text{Ob}(\mathcal{C}) = \text{Mor}(\mathcal{C}) = \emptyset$ 的范畴 $\mathcal{C}$ 为**空范畴**, 记作 0 . 范畴 1 只有一个对象, 和一个态射 (唯一的对象到自身的恒等态射).

下面给出一些范畴的例子, 只给出对象和态射, 很容易验证满足定义中要求的性质.

Example. 集合范畴 Set, 对象为集合, 态射为集合间的映射, 集合范畴是局部小的.

Example. 群范畴 Grp, 对象为群, 态射为群同态. 类似地有**环范畴 RIng**, **R -模范畴 $\text{Mod-}R$** , **Abel 群范畴 Ab**. 这些都是局部小的.

Example. 拓扑空间范畴 Top, 对象为拓扑空间, 态射为连续映射.

Example. 关系范畴 Rel, 对象是集合, 态射 $f: X \rightarrow Y$ 是指一个二元关系 $f \subseteq X \times Y$. 态射 $f: X \rightarrow Y$ 与态射 $g: Y \rightarrow Z$ 的复合是态射

$$gf = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y, (x, y) \in f, (y, z) \in g\} : X \rightarrow Z.$$

从这个例子可知, 态射不总是映射, 而是一种更广泛的两个对象间的关系.

Example. 如果一个范畴中所有的态射都是单位态射, 则称为离散范畴, 对象集为 S 的离散范畴记作 $\text{Disc}(S)$.

Example. 设范畴 $\mathcal{C}$ 满足对任意两个对象 A 和 B , 态射集 $\text{Hom}(A, B)$ 最多只有一个元素, 则态射箭头在 $\text{Ob}(\mathcal{C})$ 上定义了一个自反的, 传递的二元关系, 即一个预序关系. 反之, 一个集合 X 上的预序关系 $\leq$, 使得 X 可以被看作一个范畴, 使得对任意的 $x, y \in X$, 态射 $x \rightarrow y \iff x \leq y$. 从而每个偏序集可以被看作一个范畴.

Example. 考虑所有自然数为对象, 任意的 $m, n \in \mathbb{N}$, 一个态射 $f: m \rightarrow n$ 是指数域 $\mathbb{F}$ 上的一个 $m \times n$ 阶矩阵, 特别的, 单位态射 id_n 是 n 阶单位对角矩阵, 态射的复合就是矩阵的乘积. 这样的范畴记作 $\text{Mat}_{\mathbb{F}}$.

Example. 对于函子 $\mathcal{A} \xrightarrow{S} \mathcal{C} \xleftarrow{T} \mathcal{B}$, 定义逗号范畴 (S/T) 如下:

- 对象: 形如 (A, B, f) , 其中 $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, $B \in \text{Ob}(\mathcal{B})$, $f: S(A) \rightarrow T(B)$;
- 态射: 从 (A, B, f) 到 (A', B', f') 的态射形如 (g, h) , 其中 $g: A \rightarrow A'$, $h: B \rightarrow B'$ 分别是 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 中的态射, 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} S(A) & \xrightarrow{f} & T(B) \\ S(g) \downarrow & & \downarrow T(h) \\ S(A') & \xrightarrow{f'} & T(B') \end{array}.$$

Chapter 9. 范畴论速成课 (a crash course of category theory)

态射的合成是 $(g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) = (g_1 \circ g_2, h_1 \circ h_2)$, 而 (A, B, f) 到自身的恒等态射是 $(\text{id}_A, \text{id}_B)$.

指定 $\mathcal{C}$ 中的一个对象 X 相当于指定一个函子 $j_X : \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{C}$. 考虑函子 $T : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ 及 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. 对应于 $\mathbf{1} \xrightarrow{j_X} \mathcal{C} \xleftarrow{T} \mathcal{C}'$ 的逗号范畴 $(X/T) := (j_X/T)$ 的对象形如 $(W, X \xrightarrow{i} T(W))_{W \in \text{Ob}(\mathcal{C}')}$, 而 $(W_1, i_1), (W_2, i_2)$ 间的态射是使得下图交换的 $h : W_1 \rightarrow W_2$:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ i_1 \swarrow & & \searrow i_2 \\ T(W_1) & \xrightarrow{T(h)} & T(W_2) \end{array}.$$

合成态射的定义显然故略去.

反过来考虑 $\mathcal{C}' \xrightarrow{T} \mathcal{C} \xleftarrow{j_X} \mathbf{1}$. 逗号范畴 (T/X) 的对象形如 $(W, T(W) \xrightarrow{p} X)_{W \in \text{Ob}(\mathcal{C}')}$, 从 (W_1, p_1) 到 (W_2, p_2) 的态射是使得下图交换的 $f : W_1 \rightarrow W_2$:

$$\begin{array}{ccc} T(W_1) & \xrightarrow{T(f)} & T(W_2) \\ p_1 \searrow & & \swarrow p_2 \\ & X & \end{array}.$$

逗号范畴 $(\text{id}_{\mathcal{C}}/\text{id}_{\mathcal{C}})$ 的对象是 $\mathcal{C}$ 中的所有态射 $f : X \rightarrow Y$, 两个对象 $f : X \rightarrow Y, f' : X' \rightarrow Y'$ 之间的态射是交换图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}.$$

不难理解, $(\text{id}_{\mathcal{C}}/\text{id}_{\mathcal{C}})$ 也叫 $\mathcal{C}$ 的箭头范畴.

范畴论给出同构一词最泛用的定义. 如果对于态射 $f : X \rightarrow Y$, 存在态射 $g : Y \rightarrow X$ 使得 $f \circ g = \text{id}_Y$ 及 $g \circ f = \text{id}_X$, 则称 f 是**同构**, 称 g 是 f 的**逆**. 从恒等态射的性质可知, 逆态射存在则唯一, 回想群元的逆的唯一性, 这与那是同理的. 从 X 到 Y 的同构集记作 $\text{Isom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

显然同构是一个等价关系. 同构 F 在对象上和态射上都是双射. 如果 F 局部单满且在对象上是双射, 则 F 是同构.

Example. 两个半群视作范畴同构当且仅当视作半群同构.

记 $\text{End}_{\mathcal{C}}(X) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(X) := \text{Isom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, 分别称作 X 的**自同态集**和**自同构集**. 注意到 $\text{End}(X)$ 是幺半群, $\text{Aut}(X)$ 是群. 我们已经看到诸多范畴论概念和群论中的概念使用了相同的词汇, 这暗示着范畴在某种程度上是群概念的推广.

9.1. 范畴论中的基本概念

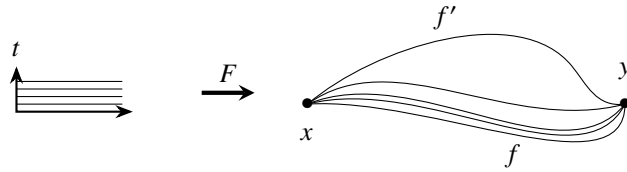
Definition 9.3 [广群]. 范畴 $\mathcal{C}$ 称为广群, 如果所有态射均可逆.

群是只有一个对象的广群. 广群中所有的箭头都是同构.

Example [基本广群]. 本段摘自 [李文威 23]. 首先回顾些基础的拓扑概念, 设 X 是拓扑空间, 两点 x, y 之间的道路意指连续映射 $f: [0, 1] \rightarrow X$ 使得 $f(0) = x, f(1) = y$. 道路的合成无非是头尾相接: 对于 $x, y, z \in X$ 和道路 f (x 到 y), f' (y 到 z), 定义从 x 到 z 的道路 f'' 为

$$f''(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f'(2t-1), & \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

两条 x, y 之间的道路 f, f' 称为 (定端) 同伦的, 如果存在连续映射 $F: [0, 1]^2 \rightarrow X$ 使得对每个 $t \in [0, 1]$, $F(\cdot, t)$ 都是 x, y 间的道路, 而且 $F(\cdot, 0) = f, F(\cdot, 1) = f'$. 同伦构成一个等价关系. 易见道路的合成可以在同伦类的层次定义.



空间 X 的基本广群 $\Pi_1(X)$ 定义为如下范畴, 其对象是 X 中的点, 对任意 $x, y \in X$, 态射集 $\text{Hom}(x, y)$ 定义为所有从 x 到 y 的道路类; 态射的合成定义为道路类的合成, 而恒等态射 id_x 由静止道路 $\forall t, \text{id}_x(t) = x$ 表之. 对于给定的态射 $f: x \rightarrow y$ (视同同伦类中的某个代表元), 其逆可以取为反向道路

$$f^{-1}(t) := f(1-t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

可以验证这些操作都是良定的, 并使得 $\Pi_1(X)$ 成为广群. 注意到 $\text{Aut}(x) = \text{Hom}(x, x)$ 正好是以 x 为基点的基本群 $\pi_1(X, x)$.

基本群是拓扑学中重要的不变量, 它为每个空间 X 指定一个相应的代数结构 (群). 基本广群可以视为再高一阶的不变量: 它为 X 指定一个范畴. 但读者应该留意到还有大量的拓扑信息被 $\Pi_1(X)$ 的范畴结构遗漏了: 除了道路的同伦类, 我们应该计入道路间的所有同伦等价, 还可以设想同伦之间更有同伦, 直至无穷. 凡此种种都必须以更高阶的范畴语言反映.

在范畴论中, 箭头是有方向属性的, 因为一个重要的考虑是反转所有的箭头以构造新的范畴.

Chapter 9. 范畴论速成课 (a crash course of category theory)

Definition 9.4 [反范畴]. 任意范畴 $\mathcal{C}$, 定义其反范畴 $\mathcal{C}^{\text{op}}$:

- $\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) := \text{Ob}(\mathcal{C})$;
- $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, 对任意的 $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}})$;
- $f \circ^{\text{op}} g := g \circ f$, 对任意的 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(Y, Z)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y)$;
- 恒等态射同 $\mathcal{C}$.

Example. 范畴 $\mathcal{C}$ 的 B 上的**切片范畴** $\mathcal{C}/B$, 指的是这样一个范畴: $B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 考虑 $\mathcal{C}$ 中以 B 为值的态射 $f: A \rightarrow B$, 记作 (A, B) , 以所有的 (A, B) 为对象构造新范畴, 使得任意两个以 B 为值的态射 $f: A \rightarrow B$ 和 $g: C \rightarrow B$, 态射 $\bar{h}: (A, f) \rightarrow (C, g)$ 指的是 $\mathcal{C}$ 中的态射 $h: A \rightarrow C$ 使得 $f = gh$, 即下图交换.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & C \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & B & \end{array} \quad \text{with a curved arrow } \bar{h} \text{ from } A \text{ to } C \text{ above the triangle.}$$

对偶地, 我们可以得到所谓的 B 下的**余切片范畴** $B/\mathcal{C}$. 切片范畴和余切片范畴均为逗号范畴的一种, 把 $(\mathcal{C}/B) := (\text{id}_{\mathcal{C}}/B)$ 叫切片范畴, 而 $(B/\mathcal{C}) := (B/\text{id}_{\mathcal{C}})$ 叫余切片范畴.

考虑 P 是一个关于范畴 $\mathcal{A}$ 的命题, 其条件和结论均由范畴 $\mathcal{A}$ 中的对象和态射构成. 如果将命题 P 中所有态射方向, 则得到一个新的命题 P^* , 称为命题 P 的**对偶命题**. P 关于范畴 $\mathcal{A}$ 成立当且仅当 P^* 关于范畴 $\mathcal{A}^{\text{op}}$ 成立. 因为 $(\mathcal{A}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathcal{A}$, 则有如下命题.

Principle 9.1 [对偶原理 (duality principle)]. 设 P 是一个关于所有范畴的真命题, 则将 P 中所有态射反向得到的真命题 P^* 也是一个关于所有范畴的真命题.

这个原理实际上是一个精彩的哲学观察, 能大大减少数学证明的工作量 — 对于那些范畴结构内对偶的概念, 我们只需要证明一边.

Example. 一个对象 T 称为**终对象** (*terminal object*), 如果任何其他对象 X , 集合 $\text{Hom}(X, T)$ 内只有一个元素, 记作 $X \rightarrow T$. 考虑命题 P , 其宣称终对象的至多唯一性: 若在范畴 $\mathcal{C}$ 中存在终对象, 则其同构意义下是唯一的. **始对象** (*initial object*) I 则指的是任意的对象 X 均有 $I \rightarrow X$, 相应的对偶命题 P^* 则宣称始对象的至多唯一性: 若在范畴 $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 中存在始对象, 则其是同构意义下是唯一的. 可以证明 P 对所有范畴均成立, 根据对偶原理, P^* 对所有范畴也都成立了. 对命题 P 的证明留在给出 Def. 9.5 后. 一个对象 O 若同时是终对象和始对象, 就称为**零对象** (*zero object*).

9.1. 范畴论中的基本概念

再来谈谈单射和满射的概念在范畴论中的推广.

Definition 9.5. 设 $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $f \in \text{Hom}(X, Y)$.

- 称 f 是**单态射**, 如果对任意的 $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $g, h \in \text{Hom}(Z, X)$, 均有左消去律: $fg = fh \iff g = h$;
- 称 f 是**满态射**, 如果对任意的 $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $g, h \in \text{Hom}(Y, Z)$, 均有右消去律: $gf = hf \iff g = h$.

一个态射可逆当且仅当左右均可逆.

Example. 现在我们要补充证明终对象的至多唯一性. 考虑 T 和 T' 为两个终对象, 则 $\text{id}_T : T \xrightarrow{!} T$ 和 $\text{id}_{T'} : T' \xrightarrow{!} T'$, 以及 $f : T \xrightarrow{!} T'$ 和 $g : T' \xrightarrow{!} T$. 考虑复合态射 $f \circ g : T' \xrightarrow{!} T$ 和 $g \circ f : T \xrightarrow{!} T'$, 所以只能 $f \circ g = \text{id}_{T'}$ 和 $g \circ f = \text{id}_T$, 从而 T 同构于 T' .

类似于子群的概念, 下面介绍子范畴.

Definition 9.6 [子范畴]. 称 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的**子范畴**, 如果

- $\text{Ob}(\mathcal{D}) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{C})$;
- $\text{Mor}(\mathcal{D}) \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$ 且保持恒等态射;
- 来源/目标映射 $\text{Mor}(\mathcal{D}) \xrightarrow{s} \text{Ob}(\mathcal{D})$ 由 $\mathcal{C}$ 中的限制而来;
- 态射的合成也是由 $\mathcal{C}$ 中的限制而来.

特别的, 如果对任意的 $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$, 均有 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, 称 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的**全子范畴 (full)**, 如果 $\text{Ob}(\mathcal{D}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$, 则称 $\mathcal{D}$ 是**宽范畴 (wide)**.

Example. 任意范畴都有两个平凡子范畴, 即空范畴和自身. 这点和群也很像.

Example. 集合范畴 Set 是关系范畴 Rel 的子范畴, 但不满. 原因是任何函数 $f : X \rightarrow Y$, 都可以看作一个关系 $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$.

Definition 9.7 [乘积范畴]. 范畴 $\mathcal{C}$ 和范畴 $\mathcal{D}$ 的乘积范畴 $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ 的对象是有序对 (A, B) , 其中 $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $B \in \text{Ob}(\mathcal{D})$, 态射是 $(f, g) : (A, B) \rightarrow (A', B')$, 态射的复合按逐点复合.

Chapter 9. 范畴论速成课 (a crash course of category theory)

9.1.2 函子

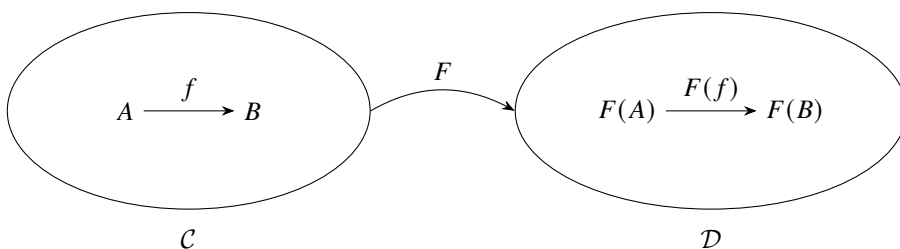
这一节我们介绍范畴之间的「映射」, 即函子.

Definition 9.8 [函子 (functor)]. 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是范畴, 一个函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 指的是两个映射:

- $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D}) : A \mapsto F(A);$
- $\text{Mor}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{D}) : f \mapsto F(f);$

使得

- $sF = Fs;$
- $tF = Ft;$
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f);$
- $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}.$



我们称形如 $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ 的函子为**逆变函子 (contravariant functor)**, 称 $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 的为**协变函子 (covariant functor)**. 从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的函子和从 $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 到 $\mathcal{D}^{\text{op}}$ 的函子是一回事, 但是为了区分, 记反范畴间的函子为 $F^{\text{op}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$.

Example. 对任意范畴 $\mathcal{C}$, 均存在一个到自身的**单位函子** $\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 使得对象和态射的对应都是恒同的.

Example. 对 $\text{Grp}, \text{Ring}, \text{Mod-}R, \text{Top}$ 等范畴, 均存在一个到范畴 Set 的**忘却函子**, 使得把相应范畴对应于所在集合, 而把群同态, 环同态, 模同态, 连续映射好等对应于自己. 通俗地理解就是遗忘相应的数学结构而把群同态等视作普通的集合映射. 类似可定义 $\text{Ring} \rightarrow \text{Grp}, \text{TopGrp} \rightarrow \text{Top}$ 等的忘却函子, 即遗忘部分数学结构.

9.1. 范畴论中的基本概念

Definition 9.9. 对于函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$,

- 如果 F 在任意一对对象上的限制 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$
 - 是单射, 称 F 是**局部单的/忠实的 (faithful functor)**;
 - 是满射, 称 F 是**局部满的/全的 (full functor)**;
- 若 $\mathcal{D}$ 中任意的对象均有某个 $F(A)$ 与之同构, 则称 F 是**本质满的 (essentially surjective)**.

这里的概念略抽象, 此处稍作解释. 以局部满为例子, 通常所说的满, 指的是函子的像包含了所有的对象和态射, 而局部满只要求态射是满的. 本质满是通常的满的稍弱的版本, 只要求在同构意义下是满的. 这里的理念是, 同构的对象视为本质一样的, 而在本质不同的所有类型的对象中, 均在像中, 称之为本质满.

Example. 遗忘函子是局部单的但不是局部满的.

Definition 9.10 [复合]. 设 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ 是函子, 定义

$$\begin{aligned} GF : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{C}, \\ A &\mapsto G(F(A)), \\ (f : A \rightarrow B) &\mapsto (G(F(f)) : G(F(A)) \rightarrow G(F(B))). \end{aligned}$$

称函子 GF 为 F 与 G 的复合.

若 F 在态射上的限制是单的, 则称 F 是一个**嵌入**. 从概念上看, 嵌入就是局部单, 但是使用的语境略有不同.

我们自然地想到可否定义以所有的范畴为对象, 函子为态射的范畴. 但这是不行的, 因为一般地两个范畴之间的函子全体不构成集合. 但是可以局限于小范畴, 以所有小范畴为对象, 小范畴之间的函子为态射构造范畴 Cat .

Definition 9.11 [双函子 (bifunctor)]. 称从两个范畴的乘积范畴到另一个范畴的函子为**双函子**.

一个典型的例子是**射影函子 (projection functor)**:

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{C}, (A, B) \mapsto A, (f, g) \mapsto f, \\ P_{\mathcal{D}} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{D}, (A, B) \mapsto B, (f, g) \mapsto g. \end{aligned}$$

Chapter 9. 范畴论速成课 (a crash course of category theory)

射影函子满足, 对任意的范畴 $\mathcal{E}$ 和函子 $R : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ 和 $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$, 存在唯一函子 $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{D}$, 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \times \mathcal{D} & \xrightarrow{P_{\mathcal{C}}} & \mathcal{C} \\ P_{\mathcal{D}} \downarrow & \swarrow F & \uparrow E \\ \mathcal{D} & \xleftarrow{T} & \mathcal{E} \end{array}.$$

9.1.3 自然变换

函子是范畴之间的对应关系, 自然变换是函子之间的对应关系.

Definition 9.12 [自然变换 (natural transformation)]. 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是范畴, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 与 $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是两个函子. 自然变换 $\theta : F \Rightarrow G$ 是一个映射 $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{D})$,

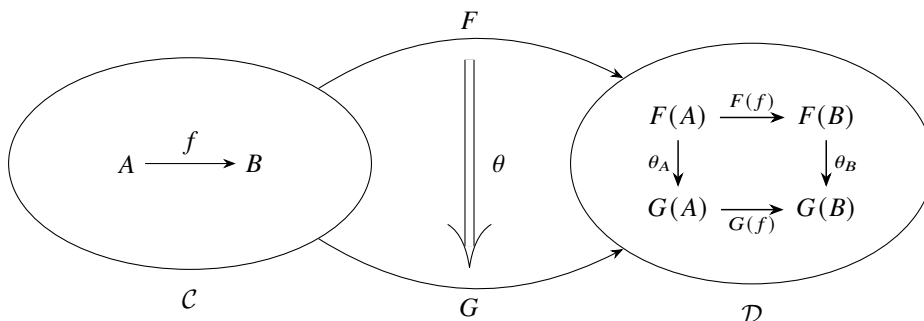
$$A \mapsto (\theta_A : F(A) \rightarrow G(A)),$$

使得对 $\mathcal{C}$ 中任意的态射 $f : A \rightarrow B$, $G(f) \circ \theta_A = \theta_B \circ F(f)$, 即下图交换

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ \theta_A \downarrow & & \downarrow \theta_B \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array}.$$

Remark. 此处定义自然变换是映射 $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{D})$, 并简记 $\theta(A) \equiv \theta_A$. 出于符号习惯的考虑, 不使用 $\theta(A)$ 这样的表达, 尽管这有时会造成一些不自然的费解.

一种图像化理解自然变换的方式是同时结合函子的图示, 见下图.



9.1. 范畴论中的基本概念

常见等价的定义是把自然变换视作一组态射 [李文威 23, Chapter 2, p.43]

$$\theta_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(A), G(A)), \quad A \in \text{Ob}(\mathcal{C}).$$

并以 $\text{Ob}(\mathcal{C})$ 为索引. 我们也把上图简化为更简单常用胞腔图来表示自然变换: $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \theta \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$.

Proposition 9.1. 设 $F, G, H: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 和 $T: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 是函子, $\alpha: F \Rightarrow G$ 和 $\beta: G \Rightarrow H$ 是自然变换, 则

$$\begin{aligned} \beta \circ \alpha: F &\rightarrow H & A &\mapsto \left(F(A) \xrightarrow{\beta_A \alpha_A} H(A) \right), \\ \alpha T: FT &\rightarrow GT & B &\mapsto \left(FT(B) \xrightarrow{\alpha_{T(B)}} GT(B) \right), \\ T\alpha: TF &\rightarrow TG & A &\mapsto \left(TF(A) \xrightarrow{T(\alpha_A)} TG(A) \right), \end{aligned}$$

均是自然变换.

Proof. 下左图展示范畴之间的函子, 以及函子之间的自然变换; 下右图展示的是 $\mathcal{D}$ 范畴内的交换关系.

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \Downarrow \alpha & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{G} & \mathcal{D} \\ & \Downarrow \beta & \\ & H & \end{array}, \quad \begin{array}{ccccc} F(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & G(A) & \xrightarrow{\beta_A} & H(A) \\ F(f) \downarrow & & G(f) \downarrow & & H(f) \downarrow \\ F(B) & \xrightarrow{\alpha_B} & G(B) & \xrightarrow{\beta_B} & H(B) \end{array}.$$

对于 $\beta \circ \alpha$, 其是自然变换, 验证关系即可. 从而自然变换也有所谓的复合运算. 以 αT 为例子证明后两者亦为自然变换. $\square$

对于像是 **Prop. 9.1** 中提到的自然变换的复合方式, 称之为**纵合成**, 上左图形象地阐明之. 与之相应的一个概念称为**横合成**, 考虑下图中的函子和自然变换,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \Downarrow \theta \\ \xrightarrow{F_2} \end{array} & \mathcal{D} \\ & & \begin{array}{c} \xrightarrow{G_1} \\ \Downarrow \psi \\ \xrightarrow{G_2} \end{array} & \mathcal{E} \end{array}$$

Chapter 9. 范畴论速成课 (a crash course of category theory)

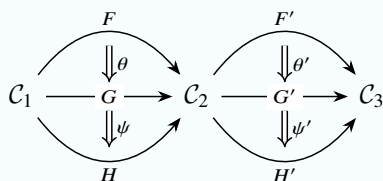
定义 $\psi * \theta : G_1 \circ F_1 \Rightarrow G_2 \circ F_2$ 为两个自然变换的横合成. 注意到, 对所有 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 根据 ψ 的自然性, 下表交换:

$$\begin{array}{ccc} G_1 F_1(X) & \xrightarrow{\psi_{F_1 X}} & G_2 F_1(X) \\ G_1(\theta_X) \downarrow & & \downarrow G_2(\theta_X) \\ G_1 F_2(X) & \xrightarrow{\psi_{F_2 X}} & G_2 F_2(X) \end{array} .$$

即

$$(\psi * \theta)_X = G_2(\theta_X) \circ \psi_{F_1(X)} = \psi_{F_2(X)} \circ G_1(\theta_X) . \quad (9.1)$$

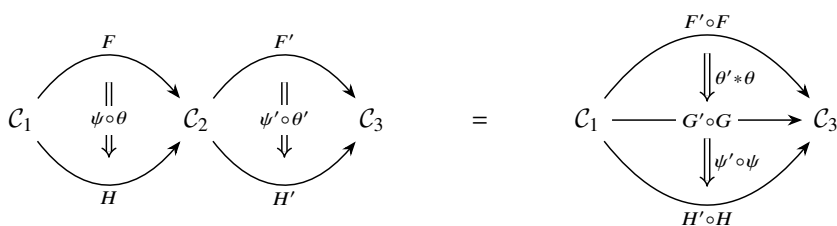
Proposition 9.2. 对图



有互换律

$$(\psi' \circ \theta') * (\psi \circ \theta) = (\psi' * \psi) \circ (\theta' * \theta) .$$

Remark. 意在说明胞腔图形式等价:



Proof. 对上二图分别使用 (9.1).

$$[(\psi' \circ \theta') * (\psi \circ \theta)]_X = (\psi' \circ \theta')_{H(X)} \circ F'((\psi \circ \theta)_X) = \psi'_{H(X)} \circ \theta'_{H(X)} \circ F'(\psi_X) \circ F'(\theta_X) ,$$

$$[(\psi' * \psi) \circ (\theta' * \theta)]_X = (\psi' * \psi)_X \circ (\theta' * \theta)_X = \psi'_{H(X)} \circ G'(\psi_X) \circ \theta'_{G(X)} \circ F'(\theta_X) .$$

再根据自然性, 有 $\theta'_{H(X)} \circ F'(\psi_X) = G'(\psi_X) \circ \theta'_{G(X)}$, 得到等式两边一致. $\square$

9.1. 范畴论中的基本概念

Definition 9.13 [等价]. 设 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为函子, 若存在函子 $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 使得自然同构 $G \circ F \cong \text{id}_{\mathcal{C}}$, $F \circ G \cong \text{id}_{\mathcal{D}}$ 成立, 则称 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是**等价的**, 记作 $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$, 并称 F 和 G 互为对方的??; 若进一步有 $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}}$, $F \circ G = \text{id}_{\mathcal{D}}$ 成立, 则称 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是**同构的**, 记作 $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$.

Remark. 等价比同构 ?? 弱, 同构比相等弱. 在范畴论中, 通常说「相等」是等价意义下的, 这在大多数情况下确实已经足够了.

同一个函子的不同拟逆之间相差函子的同构, 因为: 设 $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[G_1, G_2]{F} \mathcal{D}$, 于是

$$G_1 \xleftarrow{\sim} \underbrace{(G_2 \circ F) \circ G_1}_{\cong \text{id}_{\mathcal{C}}} = G_2 \circ \underbrace{(F \circ G_1)}_{\cong \text{id}_{\mathcal{C}}} \xrightarrow{\sim} G_2.$$

Definition 9.14 [骨架 (skeleton)]. 范畴 $\mathcal{C}$ 的全子范畴 $\mathcal{S}$ 称为其的一副**骨架**, 若对 $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 存在同构 $X \xrightarrow{\sim} Y \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ 且 Y 在 $\mathcal{S}$ 中唯一. 自为骨架的范畴称为**骨架范畴**.

骨架可以理解为对原范畴的一次提炼. 在范畴论中, 我们通常不区分互相同构的对象, 因而可以在每个同构类中选取代表元构造骨架.

Lemma 9.1. 任意范畴 $\mathcal{S}$ 均存在骨架 $\mathcal{S}$, 且嵌入函子 $\iota : \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{C}$ 是范畴等价. 骨架范畴间的全忠实, 本质满函子都是同构.

Proof. 以选择公理 **Ax. 0.9** 在 $\text{Ob}(\mathcal{C})$ 每个同构类中选定代表元, 构成的全子范畴记作 $\mathcal{S}$. 同理, 对每个 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 可以选定同构 $\theta_X : X \xrightarrow{\sim} \kappa(X) \in \text{Ob}(\mathcal{S})$, 不妨对 $X \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ 有 $\theta_X = \text{id}_X$. 现在延拓 κ 为 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ 的函子: 令

$$\kappa(f) := \theta_Y \circ f \circ \theta_X^{-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(\kappa(X), \kappa(Y)), \quad f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y),$$

从而 $\theta : \text{id}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \iota \circ \kappa$. 另一方面, 因为 $\iota \circ \kappa = \text{id}_{\mathcal{S}}$, 因此 κ 和 ι 互为拟逆.

设 F 是骨架范畴 $\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ 之间全忠实且本质满的函子, 对任意的 $Z \in \text{Ob}(\mathcal{S}_2)$, 存在 $X \in \text{Ob}(\mathcal{S}_1)$ 使得 $Z \cong F(X)$. 再由骨架的定义, 同构的对象是严格相等, 有 $Z = F(X)$. 这样的 X 唯一, 因为 $F(X) \cong F(X')$ 和全忠实性说明 $X \cong X'$ 即 $X = X'$. 于是 F 在对象集上是双射, 由此可定义其逆函子 G . $\square$

Theorem 9.1. 函子是范畴等价当且仅当其全忠实且本质满.

Chapter 9. 范畴论速成课 (a crash course of category theory)

Proof. 设 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是范畴等价, 取拟逆 $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 和 $\psi: G \circ F \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{C}}$, $\phi: F \circ G \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{D}}$. 任取 $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 都有 $\phi_Z: F(G(Z)) \xrightarrow{\sim} Z$ 故 F 本质满, 同理 G 亦然. 注意到

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\xrightarrow{F} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \xrightarrow{G} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(F(X)), G(F(Y))) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \\ f &\longmapsto F(f) \longmapsto G(F(f)) \longmapsto \psi_Y G(F(f)) \psi_X^{-1} \end{aligned}$$

合成为恒等映射, 即 $f = \psi_Y \circ G(F(f)) \circ \psi_X^{-1}$, 从而 F 左可逆 (单), G 右可逆 (满), 调换 F 和 G 的角色得 F 右可逆 (满), F 左可逆 (单), 从而 F, G 均全忠实.

再以 **Lem. 9.1** 构造骨架 $\iota: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$, $\varsigma: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$, 以及相应的拟逆 κ 和 τ . $F' := \tau \circ F \circ \iota: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ 仍是全忠实本质满函子, 因而 F' 是骨架范畴的同构. 设 $G := \iota \circ F'^{-1} \circ \tau$, 则

$$\begin{aligned} G \circ F &= \iota \circ F'^{-1} \circ \tau \circ F \cong \iota \circ F'^{-1} \circ \underbrace{\tau \circ F \circ \iota}_{=F'} \circ \kappa = \iota \circ \kappa \cong \text{id}_{\mathcal{C}}, \\ F \circ G &= F \circ \iota \circ F'^{-1} \circ \tau \cong \varsigma \circ \underbrace{\tau \circ F \circ \iota}_{=F'} \circ F'^{-1} \circ \tau = \varsigma \circ \tau \cong \text{id}_{\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

□

该定理给出范畴等价更加直观的刻画, 即在至多相差同构的意义下「没有对象的遗漏」(本质满) 以及「关系的双射」(全忠实).

9.2 可表达性

我们希望研究一类取值在集合的一类函子: 感觉上, 它们的信息完全由对象以及其间的关系编码. 这类函子称为「可以被表达的」.

9.2.1 Yoneda 引理

我们先介绍 Yoneda 引理, 其正式揭示了范畴论的灵魂: 对象完全由其他对象到其的态射决定. 试着回看本章卷首给出的 Marx 的碑文, 不失为一种奇妙的实例.

Definition 9.15 [Hom-函子 (Hom-functor)]. 设 $\mathcal{C}$ 是局部小范畴, 对任意的 $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 定义

函子

$$h_A : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set},$$

$$\left(X \xrightarrow{f} Y \right) \mapsto \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \xrightarrow{h_A(f)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y) \right),$$

使得对于任意的 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ 均有 $h_A(f)(g) = f \circ g$, 称这样的 h_A 为 $\mathrm{Hom}(A, -)$ 函子, h_A 将 g **推前 (pushforward)**. 对偶地, 定义函子

$$h^A : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathrm{op}},$$

$$\left(X \xrightarrow{f} Y \right) \mapsto \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, A) \xrightarrow{h^A(f)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \right),$$

使得对于任意的 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, A)$ 均有 $h^A(f)(g) = g \circ f$, 称这样的 h^A 为 $\mathrm{Hom}(-, A)$ 函子, h^A 把 g **拉回 (pullback)**. 对比地, 前者称为**(协变) Hom-函子**, 后者称为**逆变 Hom 函子**. 推前与拉回常分别用符号 $f_*g = f \circ g$ 和 $f^*g = g \circ f$ 在交换图中表示.

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ g \swarrow & & \searrow h_A(f)(g) \\ X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow h_A \downarrow f_* & \\ h_A(X) & \xrightarrow{\quad} & h_A(Y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & A & \\ h^A(f)(g) \swarrow & & \nwarrow g \\ X & \xleftarrow{f} & Y \\ & \searrow f^* \downarrow h^A & \\ h^A(Y) & \xrightarrow{\quad} & h^A(X) \end{array}$$

定义 ?? h : 对任意的 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 均有 $h(X) = h^X$; 对任意的 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, 均有 $h(f) : h^X \Rightarrow h^Y$ 为自然变换, 且 $h(f)_A = h_A(f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y)$, $g \mapsto f \circ g$.

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ g \swarrow & & \searrow h(f)_A(g) \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Note. 此处 h_A 和 h^A 的定义与某些参考文献恰好相反! 目前无权威的统一符号规定, 故可能引起混乱, 请尤其注意.

Remark. 这里对术语做一些说明. 推前和拉回是具有画面感的名词, 所谓推前, 就是把 $g : A \rightarrow X$ 的终点从 X 后推到 Y , 而拉回, 就是把 $g : X \rightarrow A$ 的起点前拉到 Y , 参见上图理解. 形容词逆变, 意在说明从 $\mathcal{C}$ 中的一组 $X \xrightarrow{f} Y$ 会在终点范畴中将箭头反向 $F(X) \xleftarrow{F(f)} F(Y)$.

Chapter 9. 范畴论速成课 (a crash course of category theory)

Remark. 顺带一提预层的概念, 定义

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^\wedge &:= \text{Fct}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Set}), \\ \mathcal{C}^\vee &:= \text{Fct}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Set}^{\text{op}}) = \text{Fct}(\mathcal{C}, \text{Set})^{\text{op}}.\end{aligned}$$

在层论中, $\mathcal{C}^\wedge$ 被称为 $\mathcal{C}$ 上的预层, 显然诸 h^A 为预层中的元素.

Remark. 关于协变和逆变, 参考张量分析与微分几何中的记号, 诸满足 $V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu$ 的记号称逆变, 诸满足 $\omega'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \omega_\nu$ 的记号称协变.

Remark. 这里谈谈加 $*$ 这个操作, 这很像 C 语言中的指针操作, 考虑到 *Yoneda* 本人也是理论计算机学家, 不失为一种巧合. 注意符号 $h_A(f) = f_*$ 是一种简写, 省略去了 A 的定位信息.

Remark. h 更本质的理解是基于 Hom -双函子

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}.$$

固定第一个变量时, 称协变; 固定第二个变量时, 称逆变. 所以定义 h 的另一种常见的方式为 $h(X) = h_X$, $h(f) = f^* : h_X \leftarrow h_Y$. 这里自然变换反向, 因为我们固定了第二个变量, 此时函子为逆变的.

Example 23. 设 $F : N \rightarrow M$ 是微分流形 N 与 M 间的光滑映射, 通常逐点定义其微分映射 $F_* : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$, $\forall p \in N$, 其具体实现如下:

$$[F_*(X_p)] f = X_p(f \circ F), \quad \forall f \in C_{F(p)}^\infty(M).$$

效果是把 N 上的切矢量 X_p 「推前」到了 M 上去. 可以证明链式法则 $(F \circ G)_* = F_* \circ G_*$, 从而切丛构造

$$T : \left(N \xrightarrow{F} M \right) \rightarrow \left(TN \xrightarrow{F_* \equiv TF} TM \right)$$

实则给出一个沟通微分流形范畴和微分矢量丛范畴的协变函子. 同理考察拉回映射 $F^* : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(N)$, $F^*(h) = h \circ F$, 可以证明 $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$, 拉回构造

$$(\cdot)^* : \left(N \xrightarrow{F} M \right) \rightarrow \left(C^\infty(M) \xrightarrow{F^*} C^\infty(N) \right)$$

实则给出一个沟通解析流形范畴和解析函数范畴的逆变函子.

Hom -函子的概念建立了对象和「其对其他对象的作用」的一一对应关系, 将对象本身的信息转移到了函子中去. 为了扣住 *Yoneda* 引理的核心思想, 我们要考究 h_A 的性质.

9.2. 可表达性

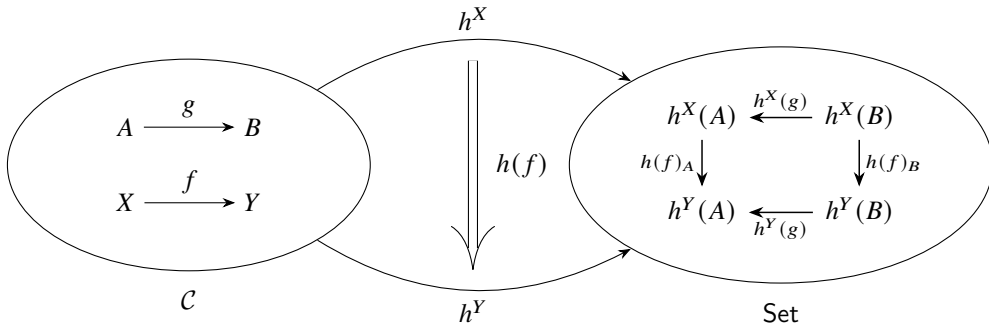
Definition 9.16 [函子范畴 (functor category)]. 设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 是局部小范畴, 把全体从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的函子记作 $\text{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, 其间的态射式自然变换, 态射的合成是自然变换的纵合成. 对于 $F, G \in \text{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, 把全体从 F 到 G 的自然变换记作 $\text{Nat}(F, G)$.

函子范畴的概念是使得我们可以把「结构保持映射」当作对象再研究. 下面引入的 Yoneda 引理, 我们将转换研究的视角从范畴到 Set-值函子, Hom-值函子的概念是我们可以把对象的信息带到 Set-值函子中去. 作为类比, 回想我们利用坐标 — 一种实值函数 — 去研究几何对象.

Proposition 9.3. Yoneda 函子 h 对范畴 $\mathcal{C}$ 有

$$h \in \text{Fct}(\mathcal{C}, \text{Fct}(\mathcal{C}, \text{Set}^{\text{op}})).$$

Proof. 先证明 $h(f) : h^A \Rightarrow h^B, \forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 确实为自然变换. 也就是下图右侧的表图是交换的.



我们证明之

$$h(f)_A \circ h^X(g) = f_* g^*, \quad h^Y(g) \circ h(f)_B = g^* f_*,$$

再任取 $j \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$, 得到

$$(f_* g^*) j = f_* (g^* j) = f_* (j \circ g) = f \circ j \circ g, \quad (g^* f_*) j = g^* (f_* j) = g^* (f \circ j) = f \circ j \circ g,$$

这就证明了表交换. 再证明 h 的函子性:

- 考虑 $\text{id}_A : A \rightarrow A$, $h(\text{id}_A)_Z(j) = \text{id}_A \circ j = j$, 这里 $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 与 $j \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, A)$ 均任取, 所以 $h(\text{id}_A) = \text{id}_{h(A)}$;

Chapter 9. 范畴论速成课 (a crash course of category theory)

- 考虑 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, 分别计算

$$\begin{aligned} h(g \circ f)_X(k) &= (g \circ f) \circ k, \\ (h(g) \circ h(f))_X(k) &= (h(g)_X \circ h(f)_X)(k) = g \circ (f \circ k), \end{aligned}$$

这里 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 与 $k \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$ 均任取, 所以 h 保持复合.

这样命题就得证了. □

Theorem 9.2 [Yoneda 引理 (Yoneda lemma)]. 设 $\mathcal{C}$ 是局部小范畴, h 是 Yoneda 函子, $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ 是函子, 则存在同构

$$\text{Nat}(h_A, F) \cong F(A).$$

对 A 与 F 皆自然.

Proof. 定义求值函子

$$\begin{aligned} \text{ev}_A : \text{Nat}(h_A, F) &\rightarrow F(A), \\ (\eta : h_A \Rightarrow F) &\mapsto \eta_A(\text{id}_A), \end{aligned}$$

以及「反求值」函子

$$\begin{aligned} \text{iev}_A : F(A) &\rightarrow \text{Nat}(h_A, F), \\ a &\mapsto (\eta(a) : h_A \Rightarrow F), \\ \text{Ob}(\mathcal{C}) &\rightarrow \text{Mor}(\text{Set}), \\ B &\mapsto (f_B : h_A(B) \rightarrow F(B)), \\ f &\mapsto F(f)(a). \end{aligned}$$

(1) 任取 $\theta \in \text{Nat}(h_A, F)$, 有

$$\begin{aligned} (\text{iev}_A \circ \text{ev}_A)(\theta) &= \text{iev}_A(\text{ev}_A(\theta)) \\ &= \text{iev}_A(\theta_A(\text{id}_A)) \\ &= \eta(\theta_A(\text{id}_A)) \in \text{Nat}(h_A, F(A)), \end{aligned}$$

任取 $B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 有

$$\eta(\theta_A(\text{id}_A))(B) = f_B \in \text{Hom}_{\text{Set}}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), F(B)),$$

9.2. 可表达性

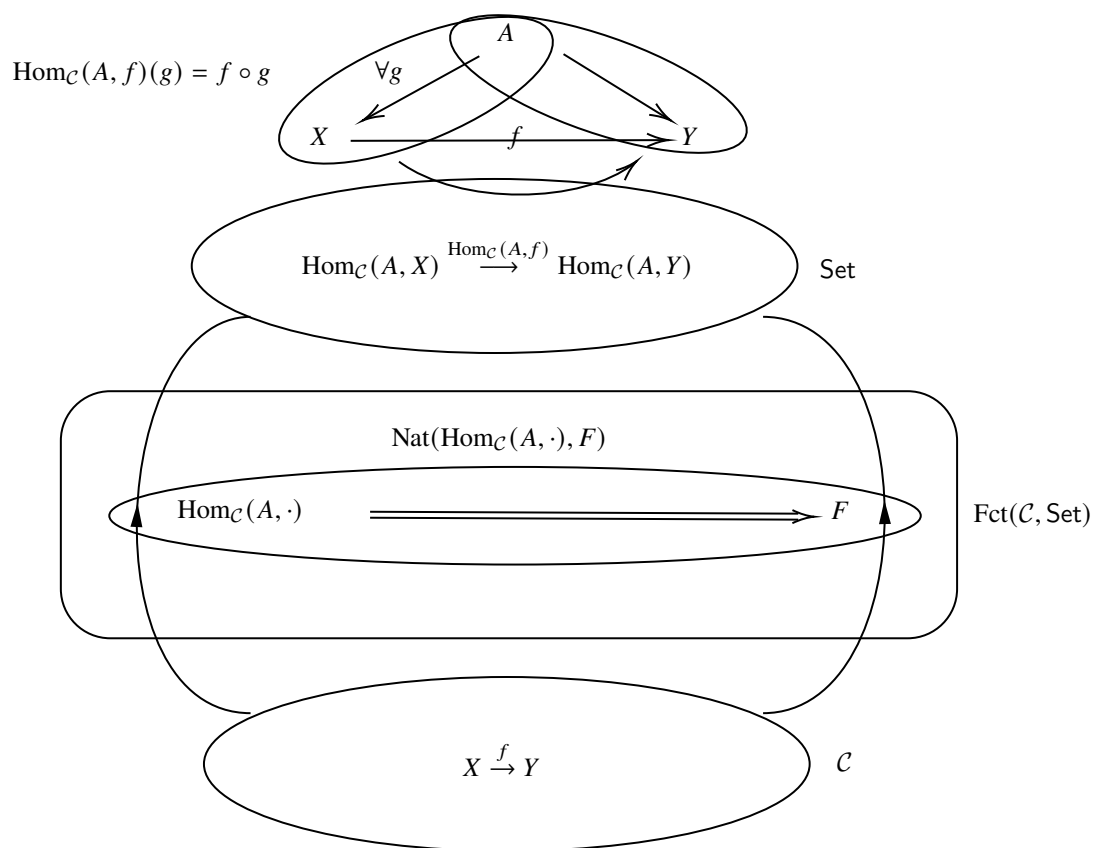


Figure 9.1: Yoneda 引理示意图

Chapter 9. 范畴论速成课 (a crash course of category theory)

任取 $f \in \text{Hom}_C(A, B)$ 有

$$\begin{aligned}
 f_B(f) &= F(f)(\theta_A(\text{id}_A)) = (F(f) \circ \theta_A)(\text{id}_A) \\
 &= (\theta_B \circ h_A(f))(\text{id}_A) = \theta_B(h_A(f)(\text{id}_A)) \\
 &= \theta_B(f_*(\text{id}_A)) = \theta_B(f \circ \text{id}_A) \\
 &= \theta_B(f).
 \end{aligned} \tag{9.2}$$

参见下图理解.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_C(A, A) & \xrightarrow{h_A(f)} & \text{Hom}_C(A, B) \\
 \theta_A \downarrow & & \downarrow \theta_B \\
 F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B)
 \end{array}$$

这样我们就有 $\theta_B = \eta(\theta_A(\text{id}_A))(B)$, 记住 $\theta_B \equiv \theta(B)$, 从而

$$\theta = \eta(\theta_A(\text{id}_A)) = (\text{iev}_A \circ \text{ev}_A)(\theta),$$

最终

$$\text{iev}_A \circ \text{ev}_A = \text{id}_{\text{Nat}(h_A, F)}.$$

(2) 任取 $a \in F(A)$, 有

$$(\text{ev}_A \circ \text{iev}_A)(a) = \text{ev}_A(\text{iev}_A(a)) = \text{ev}_A(\eta(a)) = \eta(a)_A(\text{id}_A) = F(\text{id}_A)(a) = \text{id}_{F(A)}(a) = a,$$

于是

$$\text{ev}_A \circ \text{iev}_A = \text{id}_{F(A)}.$$

综合 (1) 与 (2), 我们已经证明了存在双射 ev_A 使得 $\text{Nat}(h_A, F) \cong F(A)$. 下面证明自然性.

(3) 参考下图, 我们考虑二次拉回 f^* , 并欲证明下图交换, 即只需证明 $(\eta \circ f^*)_B(\text{id}_B) = F(f)(\eta_A(\text{id}_A))$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \eta \vdash & \xrightarrow{\quad} & \eta_A(\text{id}_A) & & \\
 \downarrow \wr & \wr & \downarrow & \wr & \downarrow \\
 & \text{Nat}(h_A, F) \xrightarrow{\text{ev}_A} F(A) & & & \\
 & \downarrow f^{**} \quad \downarrow F(f) & & & \\
 & \text{Nat}(h_B, F) \xrightarrow{\text{ev}_B} F(B) & \wr & & F(f)(\eta_A(\text{id}_A)) \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 \eta \circ f^* \vdash & \xrightarrow{\quad} & (\eta \circ f^*)_B(\text{id}_B) & &
 \end{array}$$

9.2. 可表达性

在 (9.2) 我们已经证明 $F(f)(\eta_A(\text{id}_A)) = \eta_B(f)$, 而

$$(\eta \circ f^*)_B(\text{id}_B) = (\eta_B \circ f^*)(\text{id}_B) = \eta_B(f^*(\text{id}_B)) = \eta_B(\text{id}_B \circ f) = \eta_B(f),$$

等式得证, 从而上图交换, 同构 $\text{Nat}(h_A, F) \cong F(A)$ 对 A 自然.

我们还要说明函子 $\text{Nat}(h, F) \equiv \text{Nat}(h_-, F)$ 是函子, 且 $\text{Nat}(h, F)(f) \equiv \text{Nat}(h(f), F) = \text{Nat}(f^*, F) = f^{**}$. 注意, 碍于符号原因, 这里的 h 和 Def. 9.15 略微不同, 采用逆变定义.

- 保持恒等: $\text{Nat}(h, F)(\text{id}_A) = \text{id}_A^{**}$, 显然有 $\text{id}_A^{**}(\eta) = \eta \circ \text{id}_A^* = \eta$ 即 $\text{id}_A^{**} = \text{id}_{\text{Nat}(h_A, F)}$;
- 保持复合: 考虑 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, 则 $(g \circ f)^{**} = (f^* \circ g^*)^* = g^{**} \circ f^{**}$ 保持复合.

从而 f^{**} 确为函子. 从而命题对 A 自然.

(4) 参考下图, 我们考虑一次推前 θ^* , 并欲证明下图交换.

$$\begin{array}{ccccc}
 \eta \vdash & \xrightarrow{\quad} & \eta_A(\text{id}_A) & & \\
 \downarrow \theta & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
 & \text{Nat}(h_A, F) \xrightarrow{\text{ev}_A} F(A) & & & \\
 & \downarrow \theta_* & \downarrow \theta_A & & \\
 & \text{Nat}(h_A, G) \xrightarrow{\text{ev}'_A} G(B) & & & \\
 \theta \circ \eta \vdash & \xrightarrow{\quad} & (\theta \circ \eta)_A(\text{id}_A) & &
 \end{array}$$

此图显然交换. 我们还要说明 θ_* 为函子. 同 (3) 可知其确为函子. 从而命题对 F 自然.

综合 (1)-(4), 命题得证. □

Corollary 9.1. 设 $\mathcal{C}$ 为范畴, h 是 Yoneda 函子, $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 则 $A \cong B$ 当且仅当 $h_A \cong h_B$. 逆变情形亦然.

Proof. 若 $A \cong B$, 设 $f: A \xrightarrow{\sim} B$ 为同构, 则对任意 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 定义

$$\eta_X: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X), \quad g \mapsto g \circ f^{-1}.$$

则 $\eta: h_A \rightarrow h_B$ 是自然同构. 反之, 若 $h_A \cong h_B$, 则由 Yoneda 引理,

$$\text{Nat}(h_A, h_B) \cong h_B(A) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A).$$

Chapter 9. 范畴论速成课 (a crash course of category theory)

因此存在态射 $u : B \rightarrow A$ 对应于该自然同构. 同理, 逆自然同构 $h_B \rightarrow h_A$ 对应于某个态射 $v : A \rightarrow B$. 由 *Yoneda* 对应的函子性可知, $u \circ v$ 与 $v \circ u$ 分别对应于恒等自然变换, 故

$$u \circ v = \text{id}_A, \quad v \circ u = \text{id}_B.$$

从而 $A \cong B$. 逆变情形完全类似. □

该推论说明, 对象 A 完全由 h_A 精确到同构地唯一刻画, 即完全由其与其他对象的关系所精确到同构地唯一确定.

9.2.2 泛性质

Yoneda 引理以为我们提供必要的理论基础, 我们希望进一步阐明如下哲学: 对象通过其与其他对象的映射关系被唯一刻画. 为此引入**泛性质**的概念, 以期描述描述某种对象或构造的「唯一性」. 通俗地概括, 所谓泛性质, 指的是存在唯一的态射使得某图交换.

正式地, 以逆变为例, 设 $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ 为函子, $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. 若存在元素 $u \in F(A)$ 使得对任意 $B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 与任意 $x \in F(B)$, 均存在唯一态射 $f : B \rightarrow A$ 满足 $F(f)(u) = x$, 则称 (A, u) 满足函子 F 的**泛性质 (universality)**, 称 u 为**泛元素 (universal element)**, A 为**泛对象 (universal element)**. 我们要证明, F 存在泛性质, 当且仅当 F 可表.

Definition 9.17 [可表函子 (representable functor)]. 设 h 是 *Yoneda* 函子, 称函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}^{\text{op}}$ 是**可表函子**, 如果存在 $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 以及同构 $\phi : h^A \xrightarrow{\sim} F$.

Remark. 同理, 若 h 采用协变的定义, 可以给出形如 $B : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ 的可表函子.

我们把这样的对象 A 和同构 ϕ 组成的二元对 (A, ϕ) 称作可表函子 F 的**代表元**. *Yoneda* 引理 **Thm. 9.2** 告诉我们, 给定资料 (A, ϕ) 等同于给定资料 (A, u) , 其中 $u = \phi_A(\text{id}_A) \in F(A)$.

Proposition 9.4. 设 h 是 *Yoneda* 函子, 若函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}^{\text{op}}$ 可表, 则其代表元 $(A, \phi : h^A \xrightarrow{\sim} F)$ 在至多差一个唯一同构的意义下是唯一的.

Proof. 对于任意 $B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 与 $\psi : h(B) \rightarrow F$, 根据 *Yoneda* 引理 **Thm. 9.2** 可知的 h 的全忠实性, 即 $\text{Nat}(h(B), h(A)) \cong h(A)(B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$, 存在唯一的 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ 使下图交换.

$$\begin{array}{ccc} h(B) & \xrightarrow{h(f)} & h(A) \\ & \searrow \psi & \swarrow \phi \\ & F & \end{array}$$

9.3. 最优构造

根据结构 $\mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}) \xleftarrow{j_F} 1$, 逗号范畴 (h/F) 之定义可知 (A, ϕ) 是其终对象, 遂有唯一性. $\square$

至此, 我们证明了若 F 可表, 则其有同构意义下唯一的泛性质. 我们再证明逆命题

Proof. 设 (A, u) 为 F 的泛元素, 即对任意 $B \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ 与 $x \in F(B)$, 存在唯一 $f : B \rightarrow A$ 使 $F(f)(u) = x$.

定义自然变换

$$\phi : h(A) \Rightarrow F$$

如下: 对任意 $B \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, 定义

$$\phi_B : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A) \rightarrow F(B), \quad f \mapsto F(f)(u).$$

- (1) ϕ_B 为双射: 由泛元素定义, 任意 $x \in F(B)$ 存在唯一 $f : B \rightarrow A$ 使 $F(f)(u) = x$, 故 ϕ_B 双射.
- (2) 自然性: 对任意 $g : C \rightarrow B$, 有

$$F(g)(\phi_B(f)) = F(g)(F(f)(u)) = F(f \circ g)(u) = \phi_C(f \circ g) = \phi_C(h(A)(g)(f)).$$

故 ϕ 为自然同构.

因此 $F \simeq h(A)$, 即 F 可表. $\square$

回顾张量积性质 **Cor. 7.1**, 则其中暗含泛性质思想, 再看 **Prop. 7.6**, 泛对象 $M \otimes_R N$ 确实在同构意义下唯一. 具体说明之: 此处为 $R\text{-Mod}$ 范畴, 函子 $F(P) = \mathbf{Bil}_R(M, N; P)$ 意在给出所有从 $M \times N \rightarrow P$ 的平衡双线性映射集合. 泛对象 $A = M \otimes_R N$, 泛元素 $(u = \otimes : M \times N \rightarrow M \otimes_R N) \in F(A) = \mathbf{Bil}_R(M, N; M \otimes_R N)$, 使得任意其他的 $x \in F(B)$, 对应 $x = \beta : M \times N \rightarrow B$.

至此我们知道了, 泛性质和可表性是等价的, 且与范畴中的对象一一对应, 于是考虑把对象嵌入函子范畴, 自然应该全忠实.

Theorem 9.3 [Yoneda 嵌入 (Yoneda embedding)]. *Yoneda* 函子 h 全忠实.

Remark. 根据 *Yoneda* 引理 **Thm. 9.2** 立刻可知, 实际上在 **Prop. 9.4** 中我们已经使用了该结论.

Yoneda 嵌入揭示如下重要哲理: 对象可以嵌入到它们的关系间去.

* 9.3 最优构造

我们希望继续推广泛性质的思想, 可鉴于以下动机: 对于某种数学构造, 我们想判断其是否「最优」, 即是否有相应的泛性质. 这引发了对伴随和极限两个概念的讨论.

Chapter 9. 范畴论速成课 (a crash course of category theory)

9.3.1 伴随

自由与遗忘相伴.

复查下例:

- 自由群, 给集合 X , 构造自由群 $F(X)$ 具有群结构, 且这个构造直观上是最简单和直接的, 并未引入额外特别的群性质;
- 张量积, 把双线性映射变成线性映射, 在 Sec. 7.6 中我们已经知道了其满足泛性质;
- 商空间, 强制某关系成立的最小对象;

这些数学实践其实都在表达: 一个构造是另一个构造的「最佳近似」. 最初 Eilenberg 和 Mac Lane 观察到, 很多构造都满足有形式

$$\mathrm{Hom}(F(A), B) \cong \mathrm{Hom}(A, G(B))$$

且自然, 据此抽象出伴随的定义.

Definition 9.18 [伴随 (adjoint)]. 伴随对意指下述资料 (F, G, φ) , 其中 $C_1 \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{matrix} C_2$ 是一对函子, 而 φ 是函子的同构

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{C_2}(F(\cdot), \cdot) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{C_1}(\cdot, G(\cdot)).$$

一般称 G 是 F 的右伴随, F 是 G 的左伴随, 或说 (F, G, φ) 是伴随对; 资料中的 φ 经常省略不记; 符号记作 $F \dashv G$.

Example. 设自由函子 $F : \mathrm{Set} \rightarrow \mathrm{Grp}$ 与遗忘函子 $U : \mathrm{Grp} \rightarrow \mathrm{Set}$, 则 $F \dashv U$.

Proof. 我们首先证明确有同构 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(F(S), G) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(S, U(G))$ 对 $\forall S \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Set}), G \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Grp})$ 均成立. 定义

$$\alpha : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(F(S), G) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(S, U(G)), \quad f \mapsto \alpha(f) = f|_S,$$

$$\beta : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(S, U(G)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(F(S), G), \quad \psi \mapsto \beta(\psi),$$

其中 $\beta(\psi) : F(S) \rightarrow G$ 的作用是, 把 $F(S)$ 中的单词, 逐字母按照 ψ 替换为 G 中的元素, 再按照 G 中的乘法既约.

9.3. 最优构造

我们验证 $\alpha \circ \beta = \text{id}_{\text{Hom}_{\text{Set}}(S, U(G))}$ 以及 $\beta \circ \alpha = \text{id}_{\text{Hom}_{\text{Grp}}(F(S), G)}$. 任取 $f \in \text{Hom}_{\text{Set}}(S, U(G))$, $s \in S$, 有

$$(\alpha \circ \beta)(f)(s) = \alpha(\beta(f))(s) = \beta(f)|_S(s) = \beta(f)(s) = f(s),$$

于是 $(\alpha \circ \beta)(f)(s) = f(s)$, 从而得到 $\alpha \circ \beta = \text{id}_{\text{Hom}_{\text{Set}}(S, U(G))}$. 任取 $g \in \text{Hom}_{\text{Grp}}(F(S), G)$, $w \in F(S)$, 首先 w 必能如此表达, $w = \prod_{i=1}^n s_i$, 其中 $s_i \in S$, 有

$$(\beta \circ \alpha)(g)(w) = \beta(g|_S)\left(\prod_{i=1}^n s_i\right) = \prod_{i=1}^n g|_S(s_i) = \prod_{i=1}^n g(s_i) = g\left(\prod_{i=1}^n s_i\right) = g(w),$$

所以 $\beta \circ \alpha = \text{id}_{\text{Hom}_{\text{Grp}}(F(S), G)}$.

然后验证自然性, 也就是下两图交换. 这里设 $f: S \rightarrow T$, $\theta: G \rightarrow H$.

$$\begin{array}{ccccc}
 f \circ g & \xleftarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & f \\
 \downarrow & \in & \text{Hom}_{\text{Grp}}(F(S), G) & \xleftarrow{g^*} & \text{Hom}_{\text{Grp}}(F(T), G) \\
 & & \downarrow \alpha_S & & \downarrow \alpha_T \\
 (f \circ g)|_S & \in & \text{Hom}_{\text{Set}}(S, U(G)) & \xleftarrow{g^*} & \text{Hom}_{\text{Set}}(T, U(G)) \\
 & & \downarrow \psi & & \downarrow \vartheta \\
 f|_T \circ g & \xleftarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & f|_T
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 k & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \theta \circ k \\
 \downarrow & \in & \text{Hom}_{\text{Grp}}(F(S), G) & \xrightarrow{\theta_*} & \text{Hom}_{\text{Grp}}(F(S), H) \\
 & & \downarrow \alpha_S & & \downarrow \alpha'_S \\
 k|_S & \in & \text{Hom}_{\text{Set}}(S, U(G)) & \xrightarrow{\theta_*} & \text{Hom}_{\text{Set}}(S, U(H)) \\
 & & \downarrow \psi & & \downarrow \vartheta \\
 k|_S & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \theta \circ k|_S
 \end{array}$$

这里做一些必要的说明:

Chapter 9. 范畴论速成课 (a crash course of category theory)

- 符号 g^* 表示 g 被函子 $\text{Hom}_{\text{Grp}}(F(\cdot), G)$ 和 $\text{Hom}_{\text{Grp}}(\cdot, U(G))$ 拉回, 注意两个都是反变的, 且两个 g^* 在定义域上有所差别; θ_* 是 θ 的推前, 同理两个 θ_* 在定义域上有差别;
- 第一个图的符号 α_S 和 α_T 是自然变换 α 的分量, 注意这里的 α 和证明的前一半的 α 含义不同, 这里的 α_S 对应之前的 α ;
- 第二个图的符号 α_S 和 α'_S 均表示把群同态限制在字母表上, 但因为群同态的陪域不同, 分别为 G 和 H , 所以两者的定义域有差别, 用一撇以区分之;
- 符号的混淆在所难免, 务必事先说清符号所蕴, 以避免危险.

显然, $(f \circ g)|_S = f|_T \circ g$, $(\theta \circ k)|_S = \theta \circ k|_S$, 从而上两图均交换, 自然性得证. $\square$

Example. 设函子 $D : \text{Set} \rightarrow \text{Top}$ 使得每个集合 X , $D(X)$ 是以 X 为底集的离散拓扑空间, $U : \text{Top} \rightarrow \text{Set}$ 是遗忘函子, 则 $D \dashv U$. 设函子 $T : \text{Set} \rightarrow \text{Top}$ 使得每个集合 X , $T(X)$ 为以 X 为底集的平庸拓扑空间, 则 $U \dashv T$.

Proof. 同群的情形类似, 此处证明省略. 且, 通观二例发觉, 「最一般的构造」是遗忘的左伴随, 这是代数学中的一般规律. $\square$

Definition 9.19 [单位, 余单位]. 设 (F, G, φ) 为伴随对, 定义态射

$$\eta = (\eta_X)_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1)} : \text{id}_{\mathcal{C}_1} \longrightarrow G \circ F$$

如下

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(X), F(X)) &\xrightarrow{\varphi} \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X, G(F(X))) \\ \text{id}_{F(X)} &\longmapsto \eta_X. \end{aligned}$$

同理, 反转箭头即可定义态射 $\varepsilon = (\varepsilon_Y)_Y : F \circ G \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}_2}$. 我们称 η 是 (F, G, φ) 的**单位**, 而 ε 是**余单位**.

Proposition 9.5. 单位和余单位都是自然变换.

9.3. 最优构造

Proof. 验证 η 确为自然变换. 诚然, 对于 $\mathcal{C}_1$ 中的态射 $h: X' \rightarrow X$, 由 φ 的自然性知

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{id}_{F(X)} & \in & \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(X), F(X)) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X, G(F(X))) & \ni & \eta_X \\
 \downarrow & & (F(h))^* \downarrow & & \downarrow h^* & & \downarrow \\
 F(h) & \in & \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(X'), F(X)) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X', G(F(X))) & \ni & \varphi(F(h)) \\
 \uparrow & & (F(h))_* \uparrow & & \uparrow (G(F(h)))_* & & \uparrow \\
 \text{id}_{F(X')} & \in & \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(X'), F(X')) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X', G(F(X'))) & \ni & \eta_{X'}
 \end{array}$$

的上, 下两子图皆交换; 按图索驷知 $\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\eta_{X'}} & G(F(X')) \\ h \downarrow & \searrow \varphi(F(h)) & \downarrow G(F(h)) \\ X & \xrightarrow{\eta_X} & G(F(X)) \end{array}$ 也交换. 同理可证 ε 是自然变换. $\square$

此外, 单位和余单位各自按下式确定了 φ

$$\begin{aligned}
 \varphi(f) &= G(f) \circ \eta_X : X \rightarrow G(Y), \quad \forall f : F(X) \rightarrow Y; \\
 \varphi^{-1}(g) &= \varepsilon_Y \circ F(g) : F(X) \rightarrow Y, \quad \forall g : X \rightarrow G(Y).
 \end{aligned} \tag{9.3}$$

同样用交换图表论证之: 对于 $\varphi(f)$, 考虑

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{id}_{F(X)} & \in & \text{Hom}(F(X), F(X)) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Hom}(X, G(F(X))) & \ni & \eta_X \\
 \downarrow & & f_* \downarrow & & \downarrow (G(f))_* & & \downarrow \\
 f & \in & \text{Hom}(F(X), Y) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Hom}(X, G(Y)) & \ni & \varphi(f) = G(f) \circ \eta_X.
 \end{array}$$

反转箭头便得到 $\varphi^{-1}(g)$ 的情形.

并且, 单位和余单位使得 $(G\varepsilon) \circ (\eta G) = \text{id}_G$, $(\varepsilon F) \circ (F\eta) = \text{id}_F$. 亦即下两图交换.

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\eta G} & G \circ F \circ G \\
 & \searrow \text{id}_G & \downarrow G\varepsilon \\
 & & G
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{F\eta} & F \circ G \circ F \\
 & \searrow \text{id}_F & \downarrow \varepsilon F \\
 & & F
 \end{array}$$

这是因为对任意 $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}_2)$, 据 $\varepsilon_Y : F(G(Y)) \rightarrow Y$ 的定义和 (9.3) 可得

$$\text{id}_{G(Y)} = \varphi(\varepsilon_Y) = G(\varepsilon_Y) \circ \eta_{G(Y)} : G(Y) \rightarrow G(Y).$$

此即第一式. 同理, 用 $\text{id}_{FX} = \varphi^{-1}(\eta_X)$ 配合 (9.3) 可证第二式.

Chapter 9. 范畴论速成课 (a crash course of category theory)

9.3.2 极限

Definition 9.20 [对角函子]. 令 $\mathcal{J}, \mathcal{C}$ 为范畴. 定义**对角函子** $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \text{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ 如下: 它将任一 $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 映至常值函子

$$\Delta(A) : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C} \begin{cases} \forall i \in \text{Ob}(\mathcal{J}), & i \longmapsto A, \\ \forall [i \rightarrow j] \in \text{Mor}(\mathcal{J}), & [i \rightarrow j] \longmapsto [\text{id}_A : A \rightarrow A]. \end{cases}$$

给定态射 $f : A \rightarrow B$, 范畴 $\text{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ 中 $\Delta(f) : \Delta(A) \rightarrow \Delta(B)$ 的定义是显然的: 它对每个 $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ 指定 $f : A \rightarrow B$.

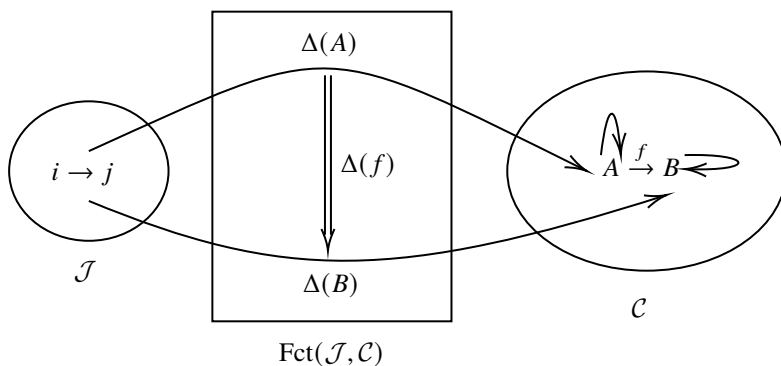


Figure 9.2: 对角函子图释

以 $\mathcal{J}^{\text{op}}$ 代 $\mathcal{J}$, 同样可定义对角函子 $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \text{Fct}(\mathcal{J}^{\text{op}}, \mathcal{C})$. 回忆逗号范畴的定义及其后的讨论: 对于函子 $\mathcal{J} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{C} \xleftarrow{\beta} \mathcal{J}^{\text{op}}$, 可以构造两种逗号范畴

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{C} \xrightarrow{\Delta} \text{Fct}(\mathcal{J}^{\text{op}}, \mathcal{C}) \xleftarrow{j_{\beta}} 1 \right] &\leadsto (\Delta/j_{\beta}) =: (\Delta/\beta), \\ \left[1 \xrightarrow{j_{\alpha}} \text{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{C}) \xleftarrow{\Delta} \mathcal{C} \right] &\leadsto (j_{\alpha}/\Delta) =: (\alpha/\Delta), \end{aligned}$$

Definition 9.21 [极限]. 令 $\mathcal{J}, \mathcal{C}$ 为范畴. 考虑函子 $\alpha : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C} \leftarrow \mathcal{J}^{\text{op}} : \beta$.

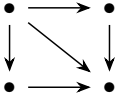
- 逗号范畴 (Δ/β) 中若存在终对象则记作 $\varprojlim \beta$, 称为 β 的**极限 (lim)**.
- 逗号范畴 (α/Δ) 中若存在始对象则记作 $\varinjlim \alpha$, 称为 α 的**余极限 (colim)**;

我们也说它们是以 $\mathcal{J}$ 为指标的极限.

根据始终对象在同构意义下的唯一性, 极限和余极限若存在则在同构意义下亦是唯一的. 然而上述定义依旧十分抽象, 为拆解之, 逐步引入一些有用的概念.

Definition 9.22 [$\mathcal{J}$ 型图]. 设 $\mathcal{J}$ 是小范畴, 称函子 $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ 为范畴 $\mathcal{C}$ 中的 $\mathcal{J}$ 型图. 对任意 $j \in \text{Ob}(\mathcal{J})$, $D(j)$ 被称为该 $\mathcal{J}$ 型图的**顶点**. 对任意 $\alpha \in \text{Mor}(\mathcal{J})$, 称 $D(\alpha)$ 是该 $\mathcal{J}$ 型图的**边**.

如果 $\mathcal{J}$ 是有限范畴即 $|\text{Ob}(\mathcal{J})| < \infty$, 则称 $\mathcal{J}$ 型图有限.

Example. 设 $\mathcal{J}$ 为形如  的有限范畴, 则 $\mathcal{C}$ 中的一个 $\mathcal{J}$ 型图可以看作 $\mathcal{C}$ 中的一个交换方形.

根据图和对角函子的定义, 我们知道, 对任意的 $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 都有 $\Delta(A) : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ 是一个常值图

$$\forall (i \rightarrow j) \mapsto (X \rightrightarrows \text{id}_A).$$

由此, $\text{Nat}(\Delta(A), D)$ 里的自然变换形如 $\{\lambda_j : A \rightarrow D(j)\}_{j \in \mathcal{J}}$, 另还要有自然性, 由此引出下面概念.

Definition 9.23 [锥形, 余锥形]. 设 $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ 是一个锥形图, $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

- 如果态射族 $\{\lambda_i : A \rightarrow D(i) \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{J})\}$ 满足: 对任意 $\alpha : i \rightarrow j$ 均有 $\lambda_j = D(\alpha) \lambda_i$, 则称该族为 D 上的**锥形**, A 称为该锥形的**顶点**.
- 如果态射族 $\{\mu_i : D(i) \rightarrow A \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{J})\}$ 满足: 对任意 $\alpha : i \rightarrow j$ 均有 $\mu_i = \mu_j \circ D(\alpha)$, 则称该族为 D 上的**余锥形**, A 称为该余锥形的**顶点**.

Chapter 9. 范畴论速成课 (a crash course of category theory)



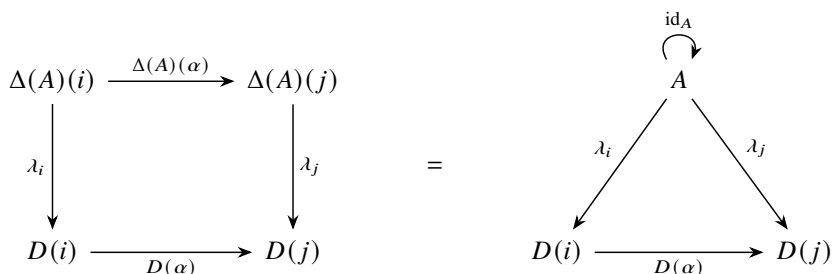
Remark. 这个图和 [Def. 9.15](#) 中的十分类似.

锥形一概念可做更加形象的理解.



如上图, 各类 $D(i)$ 排列在底部的圆周上, 它们之间可以配备态射, 称锥形或者余锥形取决于顶点作为到圆周的态射族是起点还是终点, 上面几何锥形是「交换的」.

接上述关于对角函子的讨论, 考虑到锥形的定义, 所以锥形实则为形如 $\lambda : \Delta(A) \Rightarrow D$ 的自然变换. 下图解之.



Proposition 9.6. 极限有如下等价定义: 其为 $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ 上的锥形

$$\{\lambda_i : A \rightarrow D(i) \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{J})\},$$

且关于其他锥形有泛性质, 即对任意 D 上以 $B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 为顶点的锥形

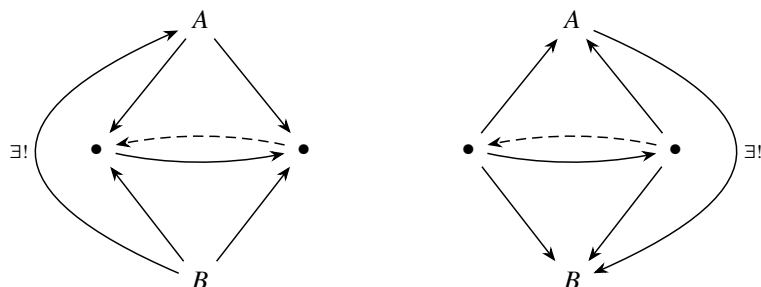
$$\{\nu_i : B \rightarrow D(i) \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{J})\},$$

存在唯一的态射 $f : B \rightarrow A$ 使得 $\nu_i = \lambda_i f$ 对任意的 $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ 均成立. 余极限反转始于 A, B 的箭头可同理定义.

9.3. 最优构造

Proof. 此处实则不需要显式的证明, 按照上述诸辅助概念拆解即可发觉定义之等价. □

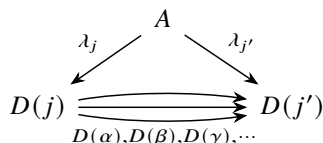
形象图示如下.



上述命题意在说明极限与余极限形如图中的 A .

概念	解读
图 D	就是函子, 但是强调「按形状 $\mathcal{J}$ 放入 $\mathcal{C}$ 的交换图」
对角函子 Δ	一种函子, 把每个 $i \xrightarrow{f} j$ 映射为常值 ($X \rightrightarrows \text{id}_A$)
锥形 λ	一种自然变换, 使得某个锥形图交换
极限 $\varprojlim \beta$	终自然变换, 泛锥形的终顶点

回看 Def. 9.23, 考虑图



所示情形, 也就是 $D(j)$ 与 $D(j')$ 间有若干态射, 而根据锥形的定义, 上图是交换的, 也就是说

$$\lambda_{j'} = D(\alpha) \circ \lambda_j = D(\beta) \circ \lambda_j = \dots,$$

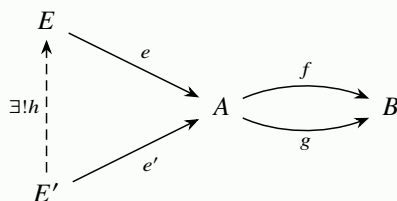
换句话说, $\lambda_{j'}$ 完全可以由 λ_j 决定, 于是我们称 λ_j 是映射族 $\{D(j) \rightarrow D(j')\}$ 的等值子 (equalizer).

Chapter 9. 范畴论速成课 (a crash course of category theory)

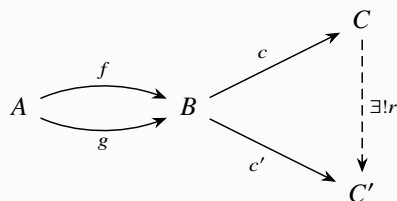
Definition 9.24 [等值子, 余等值子]. 称 $e : E \rightarrow A$ 是平行对 $f, g : A \rightarrow B$ 的等值子, 如果

- $fe = ge$;
- 对任意 $e' : E' \rightarrow A$ 使得 $fe' = ge'$, 存在唯一的态射 $h : E' \rightarrow E$ 使得 $e' = eh$.

等值子的交换图示如下.



同理可定义余等值子, 相关定义不多赘述却涵于下图.



Remark. 关于定义中要求的泛性质, 其动机可参考极限的定义中对泛性质的要求.

Example. 考虑 Set , 设 $f, g : A \rightarrow B$ 是一对平行映射, 令

$$E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\},$$

看作 A 的子集, 则包含函子 $e : E \rightarrow A$ 是 $f, g : A \rightarrow B$ 的等值子.

Definition 9.25 [积 (product), 余积 (coproduct)]. 设 $\mathcal{I}$ 是离散小范畴, 若该 $\mathcal{I}$ 型图的极限 $\{p_i : P \rightarrow A_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{I})\}$ 存在, 则称其为对象族 $\{A_i\}_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$ 的积, 记作 $\prod_i A_i$, 称每个 p_i 为投影. 将极限改为余极限可定义余积 $\coprod_i A_i$ 和余投影.

9.3. 最优构造

Example 24. 考虑 Set , 设 $\{A_i\}_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})}$ 是一族集合, $\prod_i A_i$ 是其 *Descartes* 集, $p_i : \prod_i A_i \rightarrow A_i$ 是投影, $\{p_i | i \in \mathcal{J}\}$ 是 $\{A_i\}$ 的范畴积; $\prod_i A_i := \bigcup_i \{i\} \times A_i$ 是无交并 (集合论习惯用 $\bigsqcup_i A_i$ 表示无交并, $\prod_i A_i$ 则是范畴论习惯, 当 A_i 确实两两无交时, 的确有 $\prod_i A_i \cong \bigsqcup_i A_i$), $q_i : A_i \rightarrow \prod_i A_i$ 为自然的包含映射, 则 $\{q_i | i \in \mathcal{J}\}$ 是 $\{A_i\}$ 的余积, 每个 q_i 为余投影.

Example 25. 一族交换群 $(G_i)_{i \in I}$ 的余积是交换群的直和 $\bigoplus_{i \in I} G_i$, 注意直和要求有限支撑, 连同包含态射 $\iota_j : G_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} G_i$.

Proof. 对任意 $j \in I$, 记 $\iota_j(g)$ 为仅在第 j 个分量取值 g , 其余分量皆为 0 的元素. 设 A 是任意交换群, 且对每个 $i \in I$ 给定群同态 $f_i : G_i \rightarrow A$. 定义 $f : \bigoplus_{i \in I} G_i \rightarrow A$, $f((g_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} f_i(g_i)$. 由于 $(g_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} G_i$ 只有有限多个非零分量, 上式为有限和, 故定义良定. 又因各 f_i 均为群同态, 故 f 也是群同态. 对任意 $j \in I$ 及 $g \in G_j$, 有 $f(\iota_j(g)) = f_j(g)$, 即 $f \circ \iota_j = f_j$. 若 $u : \bigoplus_{i \in I} G_i \rightarrow A$ 也是群同态, 且满足 $u \circ \iota_j = f_j$ 对一切 $j \in I$ 成立, 则对任意 $(g_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} G_i$, $(g_i)_{i \in I} = \sum_{i \in I} \iota_i(g_i)$, 其中右端为有限和, 从而

$$u((g_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} u(\iota_i(g_i)) = \sum_{i \in I} f_i(g_i) = f((g_i)_{i \in I}).$$

故 $u = f$. 因此 $\bigoplus_{i \in I} G_i$ 连同 ι_j 满足余积的泛性质, 故为 $(G_i)_{i \in I}$ 在 Ab 中的余积. $\square$

9.3.3 完备

极限能够统摄数学实践中许多重要的构造, 如拓扑学中的积空间, 商空间等. 在为数学问题制定范畴时, 我们自然也希望其中具有充分多的极限. 这就引向了以下概念.

Definition 9.26 [推前 (pushforward), 拉回 (pullback)]. 设 $\mathcal{J}$ 为图表 $\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet$ 给出的范畴 (略去恒等态射).

1. 函子 $\beta : \mathcal{J}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ 对应到 $\mathcal{C}$ 中箭头 $X \rightarrow Z \leftarrow Y$. 置 $X \times_Z Y := \varprojlim \beta$, 称为 $X \rightarrow Z$ 和 $Y \rightarrow Z$ 的纤维积或拉回.
2. 函子 $\alpha : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ 对应到 $\mathcal{C}$ 中箭头 $X \leftarrow Z \rightarrow Y$. 置 $X \sqcup_Z Y := \varinjlim \alpha$, 称为 $X \leftarrow Z$ 和 $Y \leftarrow Z$ 的纤维余积或推前.

Chapter 9. 范畴论速成课 (a crash course of category theory)

稍作解读, 以拉回为例子, 考虑一个 $\mathcal{I}$ 型图

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Z \end{array}$$

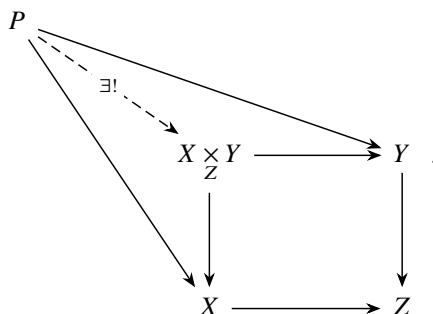
, 如果此 $\mathcal{I}$ 型图的极限 $X \times_Z Y := \varprojlim \beta$ 存在, 其首先满足交换性

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Z \end{array}$$

, 且满足泛性质, 也就是对任意使得有交换图

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Z \end{array}$$

成立的 P , 存在唯一的态射使得下图交换:



此图在范畴论中相当经典, 被称作 **Cartesius 图表 (Cartesius diagram)**.

Definition 9.27 [完备, 余完备]. 若范畴 $\mathcal{C}$ 中任意 $\mathcal{I}$ 型图均有极限, 则称 $\mathcal{C}$ 是一个完备范畴. 余完备同理定义.

Example. 完备范畴很多, 例如 $\mathbf{Set}$, 任意集合的 *Descartes* 积仍是集合. 同理 $\mathbf{Grp}$, $\mathbf{R}\text{-Mod}$, $\mathbf{Top}$, $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})$. 但是有限集合范畴则不完备.

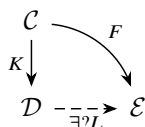
9.3. 最优构造

9.3.4 Kan 延拓

The notion of Kan extensions subsumes all the other fundamental concepts of category theory.

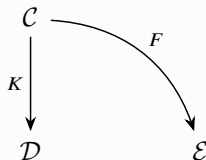
— Saunders MacLane
Categories for the Working Mathematician

Kan 延拓的动机是下面这个问题. 考虑范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ 和函子 K, F 如图



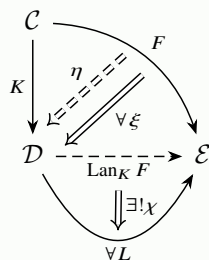
所示, 我们希望找到虚线所示的函子 L 连同同构 $F \simeq L \circ K$. 此问题一般无解, 退而求其次我们至少可以问:: 是否存在一个最佳逼近? 答案由泛性质刻画, 分为左右两种版本.

Definition 9.28 [??]. 考虑图



并定义:

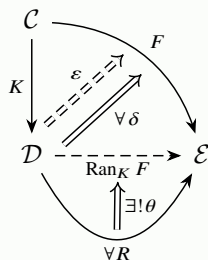
- F 沿着 K 的左 Kan 延拓是图



Chapter 9. 范畴论速成课 (a crash course of category theory)

即函子 $\text{Lan}_K F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ 和自然变换 $\eta : F \Rightarrow \text{Lan}_K F \circ K$, 配以泛性质: 对 $\forall L : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ 和 $\forall \xi : F \Rightarrow L \circ K$, 存在唯一的 $\chi : \text{Lan}_K F \Rightarrow L$ 使得 $\xi = (\chi K) \circ \eta$.

- F 沿着 K 的右 Kan 延拓是图



即函子 $\text{Ran}_K F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ 和自然变换 $\varepsilon : (\text{Ran}_K F) \circ K \rightarrow F$, 配以泛性质: 对 $\forall R : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ 和 $\forall \delta : R \circ K \Rightarrow F$, 存在唯一的 $\theta : R \Rightarrow \text{Ran}_K F$ 使得 $\delta = \varepsilon \circ (\theta K)$.

References of this chapter

[李文威 23] 李文威.《代数学方法: 卷一》. 1st. 北京, China: 高等教育出版社, 2023, 约 450.

Part III

有限群表示理论

10

初见群表示

Contents

10.1 线性表示	223
10.2 表示的约分	226
10.3 若干不可约表示构造方法	230
10.4 有限群不可约表示	234
10.5 群函数	236
10.6 特征标	241
10.7 表示的张量积	247
10.8 直积表示	248
10.9 分导表示	249
10.10 诱导表示	249

10.1 线性表示

群表示主要指的是群的线性表示, 大意是把所研究的群同态到一个线性变换群上, 从而转移到对线性变换的研究. 这样做的一大好处是可以联系我们熟悉的线性代数语言, 在选定基后得到的矩阵群也便于进行具像化的运算. 另外在物理学的实践中, 线性表示被认为是不足够的, 后面还将引入投影表示和共表示等「弱于」线性的表示方案, 各自有用处.

本章主要参考的是丘维声的《群表示论》[[丘维声 11](#)]以及李新征的《群论及其在凝聚态物理中的应用》[[李新征 23](#)].

设 V 是域 K 上的线性空间, 其上所有可逆线性变换组成的乘法群为 $\mathrm{GL}(V)$, 为说明 $\dim_K V = n$ 也可记 $\mathrm{GL}_n(V)$.

Definition 10.1 [线性表示 (linear representation)]. 群 G 到域 K 上的线性空间 $V \neq \{0\}$ 上的可逆线性变换群 $\mathrm{GL}(V)$ 的群同态 ϕ 称为 G 在 V 上的**线性表示**, V 称为**表示空间**, $\deg \phi := \dim_K V$ 称为表示的**次数或维数**.

注意线性表示指的是两个资料 (ϕ, V) . 群 G 的所有线性表示记作 $\mathrm{Rep}(G)$, 又叫做 G 的**表示范畴**, 为明确数域也可写为如 $\mathrm{Rep}_K(G)$ 的形式, 强调有限维时可写 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{fd}}(G)$, 文献中常默认有限维. 为了指明表示空间的域, 有时称 K -表示. 这里允许 $\deg \phi = \infty$, 此时就是无限维表示. 若同态是忠实的, 就说表示是忠实的; 若同态是平凡的, 就说表示是平凡的; 1 次平凡表示称作**主表示**或**单位表**

Chapter 10. 初见群表示

示. 注意到 $\mathrm{GL}_n(V) \cong \mathrm{GL}_n(K)$, 给出如下定义:

Definition 10.2 [矩阵表示 (matrix representation)]. 群 G 到 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的一个群同态 Φ 称为 G 在域 K 上的矩阵表示.

显然在 V 中取定一个基后, V 上的每一个可逆线性变换对应一个 n 阶可逆矩阵. 设已有线性表示 ϕ , 把取定基后 $\phi(g)$ 在这个基下的表示矩阵记作 $\Phi(g)$, 这样就得到了矩阵表示 Φ , 称 Φ 是由 ϕ 提供的. 显然 ϕ 可以提供很多种本质相同的 Φ , 为了确切刻画这种等价性, 定义:

Definition 10.3 [线性表示的等价, 交结映射 (intertwining map)]. 称群 G 的两个线性表示 (ϕ, V) 和 (ψ, W) 是等价的, 记作 $\phi \sim \psi$, 如果存在它们之间以交结映射 $\sigma: V \rightarrow W$ 同构. 交结映射是线性变换, 使得 $\psi(g) \circ \sigma = \sigma \circ \phi(g)$ 对任意的 $g \in G$ 均成立.

交结映射常示以交换图

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\sigma} & W \\ \phi(g) \downarrow & & \downarrow \psi(g) \\ V & \xrightarrow{\sigma} & W \end{array} .$$

注意此图对任意的 $g \in G$ 均成立. 这是某种「自然性」. 同理定义矩阵表示的等价性:

Definition 10.4 [矩阵表示的等价]. 称群 G 的两个矩阵表示 Φ 和 Ψ 是等价的, 记作 $\Phi \sim \Psi$, 如果它们有相同的次数, 且存在一个域 K 上的可逆矩阵 S 使得 $\Psi(g) = S\Phi(g)S^{-1}$ 对任意的 $g \in G$ 均成立.

下面的命题立刻回答之前提到的本质相同的矩阵表示确切刻画问题.

Proposition 10.1. 群 G 的两个有限维线性表示等价当且仅当它们提供的矩阵表示等价.

这个命题也立刻说明了, 一个线性表示提供的多个矩阵表示, 相互之间是自然共轭的, 此处所言自然性意指所有的群元对应的矩阵, 共用一个共轭操纵一同变换至等价矩阵表示.

Proof. (1) 必要性: 设两个线性表示 $(\phi, V) \stackrel{\sigma}{\sim} (\psi, W)$, 由定义 $\psi(g)\sigma = \sigma\phi(g)$. 取定 V 和 W 的各组基 B_V 和 B_W , 设 σ 在这两组基下的表示矩阵为 S , 从而有 $\Psi(g)S = S\Phi(g)$. 由于 σ 是同构, 所以 S 是可逆方阵.

(2) 充分性: 设两个矩阵表示 $\Phi \stackrel{\sigma}{\sim} \Psi$, 由定义 $\Psi(g)S = S\Phi(g)$, 矩阵维度相同. 取线性同构 $\sigma: V \rightarrow W$ 使得在各自的基下其表示矩阵恰好为 S , 因为 S 可逆, 从而 σ 是同构. $\square$

10.1. 线性表示

下面研究表示的约分. 就像群的可解性与群的扩张一样, 我们希望研究表示的分解与合成, 最好能找到「原子」结构, 使得其他更大的表示可以用这些「原子」结构合成出来. 一个自然的想法就是去找表示空间的不变子空间, 直观上如果能找到不变子空间, 那么表示应当能拆解为不变子空间及其补空间的某种合成.

Definition 10.5 [不变子空间 (invariant subspace)]. 设 (ϕ, V) 是群 G 的 K -表示, U 是 V 的线性子空间, 称 U 是表示 ϕ 的不变子空间或 G -不变子空间, 如果对任意的 $g \in G$, U 均是 $\varphi(g)$ 的不变子空间, 并称 $(\phi_U \equiv \phi|_U, U)$ 是 ϕ 的子表示.

根据线性代数的基本知识, 我们指导在选定一组基后, 子表示看上去像是

$$\Phi(g) = \begin{pmatrix} \Phi_U(g) & C(g) \\ & B(g) \end{pmatrix} \quad (10.1)$$

中的 $\Phi_U(g)$. 显然 $\{0\}$ 和 V 都是 V 的平凡子空间, 所以单位表示和自身均是平凡子表示. 注意, 这里的不变子空间比线性代数中的同名概念要求更强, 这里是对任意的 $\varphi(g)$ 均要求不变.

我们找到不变子空间后, 尝试据此分解表示. 当然我们希望能考察分解得「干不干净」, 就像是群的扩张中涉及的直积, 半直积和非分裂扩张一样. 一个最直接的考察就是问不变子空间的补空间是否亦是不变的.

Definition 10.6 [不变补空间 (invariant complementary space)]. 设 (ϕ, V) 是群 G 的线性表示, U 是 V 的不变子空间, 如果存在 V 的不变子空间 W , 使得 $V = U \oplus W$, 则称 W 是 U 在 V 中的不变补空间.

考虑 V 的不变子空间分解, $V = U \oplus W$, 我们自然想知道 ϕ 能否也直和分解为相应的子表示.

Proposition 10.2. 设 (ϕ, V) 是群 G 的线性表示, 如果与不变子空间分解 $V = U \oplus W$, 则 $\phi = \phi_U \oplus \phi_W$.

这个命题的重要意义在于说明, 如果能 V 能进行不变分解, 那么就能找到一组基, 使得 ϕ 提供的矩阵表示是分块对角的,

$$\Phi(g) = \begin{pmatrix} \Phi_U(g) & \\ & \Phi_W(g) \end{pmatrix}. \quad (10.2)$$

另外注意, 矩阵的相似变换一般不保持分块对角.

Chapter 10. 初见群表示

Proof. 设 $V = U \oplus W$ 为不变子空间分解, ϕ_U 和 ϕ_W 为 ϕ 的子表示. 于是 V 中任意的矢量 v 均可以唯一表示为 $v = u + w$, 其中 $u \in U, w \in W$, 且

$$\phi(g)v = \phi(g)u + \phi(g)w = \phi_U(g)u + \phi_W(g)w.$$

我们称 $\phi = \phi_U \oplus \phi_W$. □

我们还可以从小的线性表示通过线性空间的直和构造大的线性表示. 这里引入**外直和**的概念: 考虑 V_1 和 V_2 是两个线性空间, 它们的外直和 $V_1 \oplus V_2 := V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$, 并装备自然的加法与数乘

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) + (v'_1, v'_2) &:= (v_1 + v'_1, v_2 + v'_2), \\ k(v_1, v_2) &:= (kv_1, kv_2), \quad k \in K, \end{aligned}$$

从而 $V_1 \oplus V_2$ 易验证为线性空间. 注意, **外直和**与**内直和**(线性空间的直和分解)本质上属同一个概念, 在丘维声的《群表示论》[丘维声 11]中作者在符号上区分了两者, 本笔记不做区分.

设 (ϕ_1, V_1) 和 (ϕ_2, V_2) 均为群 G 的线性表示, 显然 $(\phi_1 \oplus \phi_2, V_1 \oplus V_2)$ 也是线性表示. 考虑 $\phi_1 \oplus \phi_2$ 提供的矩阵表示, 显然有

$$(\Phi_1 \oplus \Phi_2)(g) = \begin{pmatrix} \Phi_1(g) & \\ & \Phi_2(g) \end{pmatrix},$$

其为同态, 从而 $\phi_1 \oplus \phi_2$ 为同态, 验证了外直和表示确为线性表示.

10.2 表示的约分

本节正式介绍约分群表示的理论. 首当其冲就要定义什么叫做「可约分」.

Definition 10.7 [可约表示 (reducible representation), 不可约表示 (irreducible representation)]. 设 (ϕ, V) 是群 G 的线性表示, 如果 V 没有非平凡的不变子空间, 就称该表示**不可约**, 否则称**可约**.

显然 1 次表示均不可约. 可约表示提供的矩阵表示形如 (10.1).

Definition 10.8 [完全可约表示 (completely reducible representation)]. 设 (V, ϕ) 是群 G 的线性表示, 如果对 V 的每一个不变子空间, 都有其对应的不变补空间, 则称该表示**完全可约**.

10.2. 表示的约分

Remark. 完全可约不是比可约更强的概念, 因为完全可约允许考虑平凡不变子空间.

完全可约表示提供的矩阵表示形如 (10.2), 是分块对角的. 考虑取这个分块对角矩阵的一个子空间矩阵, 也就是主对角线上的小矩阵, 这个小矩阵依旧是分块对角的, 也就是说其也是完全可约的.

Proposition 10.3. 群 G 的完全可约表示的子表示完全可约.

Proof. 设 (ϕ, V) 是群 G 的完全可约表示, (ϕ_U, U) 其子表示, 取 U 的不变子空间 U_1 , 显然 U_1 也是 V 的不变子空间, 从而有其不变补空间 W . 根据线性代数知识, $U = U_1 \oplus (W \cap U)$, 而不变子空间的交仍然是不变子空间, 所以 $W \cap U$ 是 V 的不变子空间, 进而为 U 的不变子空间, 其正是 U_1 在 U 中的不变补空间. $\square$

这个命题使得我们一旦确定了一个完全可约表示, 就可以一直将其拆分下去. 当完全可约表示为有限维时, 这个过程必在有限步内终止, 此时拆出来的所有子表示均不可约且完全可约¹. 这是有限维情形, 我们猜测无限维时亦成立.

Theorem 10.1. 群 G 的完全可约表示可以分解为不可约子表示的直和.

Proof. 给定的完全可约表示有限维时我们已经说明定理的正确性了, 此处给出无限维时的证明. 相比于有限维, 无限维的分解可能不会在有限步骤内终止, 例如目前看仍可能出现这么一种情况, 无限维完全可约表示分解出两个无限维完全可约子表示, 并且这个过程可以反复下去. 不严谨地寻直观而言, 无限维完全可约表示提供的矩阵表示是一个无限大的矩阵, 我们应当可以取出一个子矩阵, 从而这个矩阵是「有限长度」的分块对角矩阵, 这里「有限长度」指的是内部诸 $\Phi_i(g)$ 有限, 从而对这个子表示回到类似有限维分解情形, 最终拆解得到一个不可约子表示. 为此有以下引理:

Lemma 10.1. 群 G 的完全可约表示有不可约子表示.

Proof. 有限维显然, 此处只证无限维. 设所讨论的完全可约表示为 (ϕ, V) , 如果其不可约, 命题得证. 下面讨论其可约情形, 任取 $v \in V$, 注意因为此时有非平凡的直和分解, 所有存在不含 v 的非零不变子空间. 令 S 是不变子空间组成的集合, 满足对任意的 $V_i \in S$, 均有 $v \notin V_i$, 这里 S 非空. S 对子集的包含关系成为偏序集, 任取 S 的链 $T \subseteq S$, 满足对任意的 $U_j \in T$, 均有 $v \notin U_j$. 构造 $U := \bigcup_j U_j$, U 是 V 的不变子空间且不含 v , 从而 $U \in T$ 成为链的上界. 根据 Zorn 引理 **Thm. 0.3**, S 存在极大元素 W . 又根据 V 完全可约, 存在 W 的不变补空间 W' , 断言 W' 是不可

¹ 这个表述有点怪怪的, 但确实是对的. 注意不可约和完全可约是两个不一样的概念, 相互不存在包含关系.

Chapter 10. 初见群表示

约. 假如 W' 可约, 根据 [Prop. 10.3](#), W' 的非平凡不变子空间 W'_1 也是完全可约的, 从而有非平凡的不变子空间直和分解 $W' = W'_1 \oplus W'_2$. 考虑恒等式 $W = W + W'_1 \cap W'_2$, 根据线性代数知识, $W + W'_1 \cap W'_2 \subseteq (W + W'_1) \cap (W + W'_2)$, 这里又有 $(W + W'_1) \cap (W + W'_2) = (W \oplus W'_1) \cap (W \oplus W'_2)$, 同时直接验算又有 $W \supseteq (W \oplus W'_1) \cap (W \oplus W'_2)$, 最终

$$W = (W \oplus W'_1) \cap (W \oplus W'_2).$$

因为 $v \notin W$, 所以 $v \notin W \oplus W'_1$ 或 $v \notin W \oplus W'_2$. 不妨第一种情况, 则 $W \oplus W'_1 \in S$ 满足 $W \oplus W'_1 \supsetneq W$, 与 W 极大矛盾. 所以假设不成立, W' 不可约, 这就是要找的不可约子空间. $\square$

回到主定理的证明, 依旧考虑完全可约表示 (ϕ, V) , 由引理, 存在不可约子表示. 令

$$S := \{ \{V \text{ 的不可约不变子空间} \} \mid \text{它们的和是直和} \},$$

对于集合的包含关系成为一个偏序集. 任取 S 的链 $T \subseteq S$, 把 T 中所有元素 (它们都是集合) 并起来, 记作 Ω , 显然 Ω 中任意元素均是某些 V 的不可约不变子空间, 且 Ω 中所有元素的和是直和. 和是直和不是十分显然, 稍加说明. 考虑任意和线性空间中的矢量, 其是有限多个不可约不变子空间内矢量的和, 这些元素一定同时处于 T 中某个集合内, 从而表示方法唯一, 因而原来的和是直和. 于是 $\Omega \in T$ 成为链的上界. 根据 Zorn 引理 [Thm. 0.3](#), S 存在极大元素

$$\{U_i \mid \text{诸 } U_i \text{ 是不变子空间, 且和为直和}\}.$$

由于 (ϕ, V) 是完全可约的, 所以令 $U := \bigoplus_i U_i$, 存在不变补空间 U' 使得 $V = U \oplus U'$. 假如 $U' \neq \{0\}$, 因为 $\phi_{U'}$ 也是完全可约的, 因此根据 [Lem. 10.1](#) 其有不可约子表示 $\phi_{U'_1}$, 从而

$$U + U'_1 = \left(\bigoplus_i U_i \right) \oplus U'_1.$$

从而 $\{U_i\} \cup \{U'_1\} \in S$, 与 $\{U_i\}$ 在 S 中极大矛盾. 因此 $U' = \{0\}$, 从而 $V = U = \bigoplus_i U_i$ 为不可约不变子空间直和分解. $\square$

Notation. 以上证明过程部分截取自丘维声的《群表示论》[[丘维声 11](#), 第一章 §3.3, 第六章 §1].

于是, 我们的问题转换为了, 什么判据能给出线性表示是完全可约的. Maschke 于 1899 年左右给出了下面的定理:

Theorem 10.2 [Maschke 定理 (Maschke's theorem)]. 有限群 G 在特征不能整除 $|G|$ 的域 K 上的任意线性表示均完全可约.

物理学中几乎只使用 $\mathbb{C}$, 偶尔使用 $\mathbb{R}$, 它们都是特征 0 的数域, 从而自动满足 Maschke 定理. 下面的证明兼容其他数域.

10.2. 表示的约分

Proof. 设 (ϕ, V) 是群 G 的线性表示, 如果其不可约, 则其完全可约. 下面设 ϕ 是可约的, 任取非平凡不变子空间 U , 考虑投影算子 P_U , 我们有 $U = \text{Ker } P_U$, $U = \text{Im } P_U$. 考虑构造线性算子 B 使得 $\phi(g)B = B\phi(g)$, $\forall g \in G$, 这样对每一个 g , $\text{Im } B$ 均是 $\phi(g)$ 的不变子空间, 从而是 G 的不变子空间.

当 G 是有限群时, $|G| < \infty$, 当 K 特征不能整除 $|G|$ 时, 有 $|G| \neq 0$, 于是可以定义

$$B = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) P_U \phi(g)^{-1}, \quad (10.3)$$

我们有

$$\begin{aligned} B\phi(h) &= \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) P_U \phi(g)^{-1} \right) \phi(h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) P_U \phi(g^{-1}h) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(hg) P_U \phi(g^{-1}) = \phi(h) \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) P_U \phi(g^{-1}) \right) = \phi(h) B, \end{aligned}$$

以上用到了重排定理 *Thm. 1.1*. 于是如上定义的 B 使得 $\text{Im } B$ 是不变子空间.

然后证明 $B^2 = B$. 对任意 $u \in U$, 由于 U 是不变子空间, 对任意 $g \in G$ 都有 $\phi(g)^{-1}u \in U$. 又因为 P_U 在 U 上为恒等映射, 故 $P_U \phi(g)^{-1}u = \phi(g)^{-1}u$. 于是

$$B(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) P_U \phi(g)^{-1}u = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) \phi(g)^{-1}u = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} u = u.$$

因此 B 在 U 上恒等. 另一方面, 对任意 $v \in V$, 由于 $\text{Im } P_U = U$, 且 U 对 G 的作用不变, 所以对任意 $g \in G$, $\phi(g) P_U \phi(g)^{-1}v \in U$. 从而 $B(v) \in U$. 因此 $\text{Im } B \subseteq U$. 结合上面 B 在 U 上恒等, 对任意 $v \in V$ 有 $B^2(v) = B(B(v)) = B(v)$. 故 $B^2 = B$. 所以 B 是投影算子, 且 $\text{Im } B = U$. 于是根据线性代数中投影算子的性质有

$$V = \text{Im } B \oplus \text{Ker } B = U \oplus \text{Ker } B.$$

又因为 B 与每个 $\phi(g)$ 可交换, 故根据线性代数可知 $\text{Ker } B$ 也是不变子空间. 这说明 U 存在不变补空间, 从而表示完全可约. $\square$

这个证明强烈依赖于一个「求平均」的操作, 在无限群表示理论中, 我们可以证明紧群因其有 Haar 测度, 可以推广这个证明到积分 (和分析学中的紧性非常类似). 但是在一般的无限群中, 目前没有一个统一的判据判断可约性.

Chapter 10. 初见群表示

10.3 若干不可约表示构造方法

通常来说, 研究不可约表示的合成与分解主要采用更加现代化的特征标理论, 这将在后文介绍. 本文则介绍一些比较「群论」的获取不可约表示的方法.

首先是一种重要且特殊的群 — Abel 群. 假若 Abel 群存在二维及以上表示, 则其提供的矩阵表示对应于矩阵乘法, 而我们知道矩阵乘法一般不交换, 所以我们猜测这些矩阵应当可约. 引入下面的定理:

Proposition 10.4. 有限群 G 是 Abel 群当且仅当其有限维不可约复表示均为 1-次的.

Note. G Abel 蕴含有限维不可约复表示均 1-次, 反之不能推广到无穷维.

Proof. 令 $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ 是一个有限维不可约复表示. 因为 G 是 Abel 群, $\rho(g)\rho(h) = \rho(h)\rho(g)$, $\forall g, h$. 换言之, 所有算子 $\rho(g)$ 两两可交换. 由于 G 是有限群, 每个 $\rho(g)$ 都满足 $\rho(g)^{|g|} = 1_V$, 因而 $\rho(g)$ 的最小多项式整除 $x^{|g|} - 1$. 在 $\mathbb{C}$ 上, $x^{|g|} - 1$ 没有重根, 所以 $\rho(g)$ 可对角化. 因为所有 $\rho(g)$ 两两可交换且都可对角化, 它们可以同时对角化. 因此存在一个非零向量 $v \in V$, 使得对任意 $g \in G$, 都有 $\rho(g)v = \chi(g)v$ 对某个 $\chi(g) \in \mathbb{C}^\times$ 成立. 于是 $\mathbb{C}v$ 是 G -不变子空间. 由于 ρ 不可约, 只能有 $V = \mathbb{C}v$. 因此 $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$. 所以 Abel 群的有限维不可约复表示均为 1 次.

反过来, 设 G 的所有不可约复表示均为 1 次. 记这些不可约表示为 $\rho_1, \dots, \rho_r$, 且 $d_i := \dim \rho_i$. 由 Burnside 公式 **Cor. 10.1** (见后文) $|G| = \sum_{i=1}^r d_i^2$. 由假设, 每个 $d_i = 1$, 因此 $|G| = \sum_{i=1}^r 1 = r$. 这里 r 是 G 的不可约复表示同构类个数, 也等于 G 的共轭类个数. 所以 $|G| = |\text{Cl}(G)|$. 但共轭类把 G 分解为若干非空子集. 若共轭类个数等于元素个数, 则每个共轭类都只能含一个元素. 因此对任意 $g \in G$, 其共轭类为 $\{g\}$. 也就是说, 对任意 $x, g \in G$, 有 $xgx^{-1} = g$. 于是 $xg = gx$. 因此任意两个元素都可交换, 所以 G 是 Abel 群. $\square$

Example 26. 求有限 Abel 群的所有 1-次复表示.

Solution. 设 $\chi: A \rightarrow \mathbb{C}^\times$ 是 1-次复表示. 因为 $a_i^{n_i} = 1$, 故 $\chi(a_i)^{n_i} = \chi(a_i^{n_i}) = 1$. 因此 $\chi(a_i)$ 必为 n_i 次单位根, 从而存在唯一的 $k_i \in \{0, 1, \dots, n_i - 1\}$ 使得

$$\chi(a_i) = \exp\left(\frac{2\pi i k_i}{n_i}\right).$$

又因为根据 **Thm. 3.5**, A 中任意元素唯一写作 $a_1^{m_1} \cdots a_r^{m_r}$, $0 \leq m_i < n_i$, 所以

$$\chi(a_1^{m_1} \cdots a_r^{m_r}) = \prod_{i=1}^r \chi(a_i)^{m_i} = \prod_{i=1}^r \exp\left(\frac{2\pi i k_i m_i}{n_i}\right).$$

10.3. 若干不可约表示构造方法

这说明任意 1 次复表示必为上述形式.

反过来, 对任意 $0 \leq k_i < n_i$, 上式定义的 $\chi_{k_1, \dots, k_r}$ 显然是群同态 $A \rightarrow \mathbb{C}^\times$, 因而给出 A 的一个 1 次复表示. 故这些表示正好给出 A 的全部 1 次复表示. $\square$

Proposition 10.5. 设有限 *Abel* 群 G 的所有 1-次复表示组成的集合为 $\widehat{G}$, 其在函数乘法下构成群, 且 $G \cong \widehat{\widehat{G}}$.

Proof. 首先证明 $\widehat{G}$ 是群. 若 $\chi, \psi \in \widehat{G}$, 则对任意 $g, h \in G$,

$$(\chi\psi)(gh) = \chi(gh)\psi(gh) = \chi(g)\chi(h)\psi(g)\psi(h) = \chi(g)\psi(g)\chi(h)\psi(h) = (\chi\psi)(g)(\chi\psi)(h),$$

故 $\chi\psi \in \widehat{G}$. 单位元为平凡表示 $1_G(g) := 1$, 而 χ 的逆元为 $\chi^{-1}(g) := \chi(g)^{-1}$. 因此 $\widehat{G}$ 在逐点乘法下构成群. 由于 $\mathbb{C}^\times$ 是 *Abel* 群, $\widehat{G}$ 也是 *Abel* 群.

下面证明 $G \cong \widehat{\widehat{G}}$. 根据有限 *Abel* 群结构定理 *Thm. 3.5*, 可取同构 $G \cong C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_r}$. 设 a_i 是 C_{n_i} 的生成元. 由前述构造 *Ex. 26*, $\widehat{G}$ 的所有元素为 $\chi_{k_1, \dots, k_r}$, $0 \leq k_i < n_i$, 其中

$$\chi_{k_1, \dots, k_r}(a_1^{m_1} \cdots a_r^{m_r}) = \prod_{i=1}^r \exp\left(\frac{2\pi i k_i m_i}{n_i}\right).$$

定义映射 $\Theta: C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_r} \longrightarrow \widehat{\widehat{G}}$ 为 $\Theta(a_1^{k_1} \cdots a_r^{k_r}) := \chi_{k_1, \dots, k_r}$. 由指标逐项相加可知

$$\Theta(a_1^{k_1} \cdots a_r^{k_r} a_1^{l_1} \cdots a_r^{l_r}) = \chi_{k_1+l_1, \dots, k_r+l_r} = \chi_{k_1, \dots, k_r} \chi_{l_1, \dots, l_r},$$

其中各指标按模 n_i 理解. 因此 Θ 是群同态.

又由前述分类, 每个 $\widehat{G}$ 中的元素都唯一形如 $\chi_{k_1, \dots, k_r}$, 其中 $0 \leq k_i < n_i$. 因此 Θ 是双射. 故

$$G \cong C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_r} \cong \widehat{\widehat{G}}.$$

$\square$

我们知道群同态是一种转移群结构的手法, 那么群同态应该可以分享群的表示.

Proposition 10.6. 设 (ϕ, V) 是群 G 的表示, $T: H \rightarrow G$ 是群同态, 则 ϕT 是 H 的表示, 且

- 若 ϕT 不可约, 则 ϕ 不可约;
- 若 ϕ 不可约且 T 是满的, 则 ϕT 不可约.

Chapter 10. 初见群表示

Proof.

□

一个重要的同态是商同态 $\pi: G \rightarrow G/N$. 假若 (ϕ, V) 是 G/N 的表示, 定义其**提升**为 $\bar{\phi}: G \rightarrow \text{GL}(V)$, $\bar{\phi}(g) := \phi(gN)$, 也就是同一 N -陪集内所有元素视作等同后再同态. 显然 π 满, 从而 $(\bar{\phi}, V)$ 不可约当且仅当 (ϕ, V) 不可约. 这里显然有 $\bar{\phi}(n) = 1_V, \forall n \in N$, 即 N -作用平凡. 反之, 设 $(\bar{\phi}, V)$ 是 G 的线性表示, $N \trianglelefteq G$ 且 $N \subseteq \ker \bar{\phi}$, 定义其**分解**为 $\phi(gN) := \bar{\phi}(g)$. 现说明良定义, 考虑 $gN = hN$, 从而 $\exists n \in N$ 使得 $h = ng$, 则 $\phi(hN) = \bar{\phi}(h) = \bar{\phi}(ng) = \bar{\phi}(n)\bar{\phi}(g) = \bar{\phi}(g)$. 显然提升分解互为逆映射. 总结为下面的命题:

Proposition 10.7. 考虑商同态 $\pi: G \rightarrow G/N$, 令 $\text{Rep}(G)_{N\text{-tri}}$ 为 G 的使得 N 平凡的表示, 则提升映射 $\bar{\cdot}: \text{Rep}(G/N) \rightarrow \text{Rep}(G)_{N\text{-tri}}$ 是一个保不可约性的双射.

商映射联合 Abel 群的不可约表示构造可以给出一个构造 G 的所有 1-次表示的方案. 考虑导群 $[G, G]$, 自然有 $G/[G, G]$ 是 Abel 群, 我们求出商群的所有 1-次 K -表示, 然后提升回去:

Proposition 10.8. 提升分解映射是群 G 的所有 1-次 K -表示组成的集合与 $G/[G, G]$ 的所有 1-次 K -表示组成的集合上的双射.

Proof. 我们只要说明任意 G 的 1-次 K -表示均 $[G, G]$ -平凡即可. 任给 $g, h \in G$, 有

$$\phi(g^{-1}h^{-1}gh) = \phi(g)^{-1}\phi(h)^{-1}\phi(g)\phi(h) = 1,$$

所以 $[G, G] \subseteq \ker \phi$.

□

如何用已知的表示构造其他表示? 下面介绍**挠表示 (twisted representation)** 和**对偶表示 (dual representation)** (也叫**逆步表示 (contragredient representation)**).

Definition 10.9 [挠表示]. 设 (ϕ, V) 是群 G 的表示, $\sigma \in \text{Aut}(G)$, 称 $\sigma(\phi) := \phi \circ \sigma$ 是 σ 诱导 ϕ 的挠表示.

Note. $\sigma(\phi)$ 也常常记作 $\sigma\phi$ 或 ϕ^σ .

挠表示的确是线性表示, **Prop. 10.6** 保证了这点, 且说明挠表示维持不可约性. 在挠表示中, 内自同构 $\text{Inn}(G)$ 和外自同构 $\text{Out}(G)$ 诱导的挠表示有着本质不同.

Proposition 10.9. 设 (ϕ, V) 是群 G 的线性表示, 则 $\phi \sim \text{Inn}(g)(\phi), \forall g \in G$.

10.3. 若干不可约表示构造方法

Proof. 任给 $h \in G$, 则

$$[\text{Inn}(g)(\phi)](h) = [\phi \circ \text{Inn}(g)](h) = \phi(hg^{-1}) = \phi(g)\phi(h)\phi(g)^{-1},$$

也就是 $[\text{Inn}(g)(\phi)](h) \circ \phi(g) = \phi(g) \circ \phi(h)$, $\phi(g)$ 是 $\text{Inn}(g)(\phi)$ 和 ϕ 之间的交结映射, 从而表示等价. $\square$

上述命题说明内自同构不本质改变表示, 因而可以凭借 $\text{Inn}(G)$ 为商, 考究 $\text{Aut}(G)$ 诱导的挠表示, 也就是考究 $\text{Out}(G)$.

Definition 10.10 [共轭表示 (conjugate representation), 惯性群 (inertia group)]. 设 (ϕ, V) 是群 G 的线性表示, $\sigma \in \text{Aut}(G)$, 称 $\sigma(\phi)$ 是 ϕ 的共轭表示, 并定义 ϕ 的惯性群 $I(\phi) := \{\sigma \in \text{Aut}(G) \mid \sigma(\phi) \sim \phi\}$.

惯性群的确是群, 我们很容易验证两个自同构相继作用仍然是自同构且保持表示等价. 更加流行的定义惯性群的方式是借助母群: 设 $G \trianglelefteq H$, 文献中常定义 $I(\phi) := \{h \in H \mid c_h(\phi) \sim \phi\}$, 并易知此时 $I(\phi) \leq H$. 回到本文的定义, 因为 $\text{Inn}(G)$ 的作用不给出不等价表示, 所以更常考虑 $I(\phi)/\text{Inn}(G)$. 为了尝试得到不等价的表示, 考虑非平凡的外自同构, 并把外自同构的作用视作某个代表元的作用, 但并不是非平凡的外自同构总会给出不等价表示.

所谓逆步表示, 说的是根据 (ϕ, V) 自然地构造在对偶空间 V^* 上的表示, 记作 ϕ^* . 让我们着手进行: 考虑 $g, h \in G, v^* \in V^*$, 假若定义 $\phi^*(g)v^* := v^*\phi(g)$, 则

$$(\phi^*(g)\phi^*(h))v^* = \phi^*(g)(\phi^*(h)v^*) = \phi^*(g)(v^*\phi(h)) = v^*\phi(h)\phi(g) = v^*\phi(hg) = \phi^*(hg)v^*,$$

可见这个定义违反了群同态的定义 (也可理解为不是一个 V^* 上的群作用). 为了抵消「反变性」, 在定义中补充一个反变操作:

Definition 10.11 [对偶表示/逆步表示]. 设 (ϕ, V) 是群 G 的线性表示, 定义 $\phi^*: G \rightarrow V^*$, $\phi^*(g)v^* := v^*\phi(g^{-1}), \forall v^* \in V^*$ 为其对偶表示/逆步表示.

我们说明如上定义确实为线性表示,

$$(\phi^*(g)\phi^*(h))v^* = v^*\phi(h^{-1})\phi(g^{-1}) = v^*\phi((gh)^{-1}) = \phi^*(gh)v^*,$$

也就是 $\phi^*(g)\phi^*(h) = \phi^*(gh)$. 考虑有限维度, 选定 $\{e_i\}$ 为 V_i 的基, Φ 为 ϕ 提供的矩阵表示, 则

$$\Phi(g)_{ij} = e_j^*(\phi(g)e_i) = (e_j^*\phi(g))e_i = e_i^{**}(e_j^*\phi(g)) = e_i^{**}(\phi^*(g^{-1})e_j^*) = \Phi^*(g^{-1})_{ji},$$

说明表示矩阵满足关系

$$\Phi^*(g) = \Phi(g^{-1})^T. \quad (10.4)$$

Chapter 10. 初见群表示

10.4 有限群不可约表示

Maschke 定理 **Thm. 10.2** 指出, 有限群 G 在数域 K 满足 $K \nmid |G|$ 时任意线性表示完全可约, 可以设想若能求出 G 的所有不等价不可约表示, 有限群的任意线性表示都能据此构造出来. 本节正是研究这个课题, 可以设想最可能储存所有不可约表示的特殊的表示就是**正则表示 (regular representation)** ρ , 其表示空间为群代数 $K[G]$, 见 **Ex. 18**, 其上有一个自然的作用, 设 $g \in G$, $\sum_{h \in G} a_h h \in K[G]$, $a_h \in K$, 则

$$g \cdot \sum_{h \in G} a_h h := \sum_{h \in G} a_h (gh).$$

当 $|G| < \infty$ 时, 用重排定理 **Thm. 1.1** 重新表述右边, 收集系数就得到了一个 $|G| \times |G|$ 阶的方阵, 此即 g 在 $K[G]$ 上的正则表示提供的矩阵表示, 并且可以线性扩充地推广 ρ 和其提供的矩阵表示到更一般线性元上, $\rho\left(\sum_{h \in G} a_h h\right) = \sum_{h \in G} a_h \rho(h)$, $a_h \in K$, 并正式定义这个为正则表示和其提供的矩阵表示². 注意到 $K[G]$ 实际上是 $K[G]$ 作为代数的左模, 所以为了研究正则表示, 我们推广表示中的线性空间到模空间, 并利用 **Sec. 7.7** 中的结果, 好处是能直接给出在有限群表示理论中常用的定理. 使用模论语言, 我们说, 根据 Maschke 定理 **Thm. 10.2**, $K[G]$ 在 $K \nmid |G|$ 时是半单的.

Convention 10.1. 定义在群 G 上的任意映射均默认给定域 K 后线性扩充到 $K[G]$ 上.

Lemma 10.2. 设 (V, ϕ) 和 (ψ, W) 是群 G 的两个域 K 上的线性表示, 则交结映射 $\phi \overset{\sigma}{\sim} \psi$ 是 $K[G]$ -模同态.

Proof. 我们需要验证和群作用的相容性: 任取 $K[G]$ 中的线性元和 $v \in V$,

$$\begin{aligned} \sigma\left(\left(\sum_{h \in G} a_h h\right) \cdot v\right) &= \sigma\left(\sum_{h \in G} a_h \phi(h) v\right) = \sum_{h \in G} a_h (\sigma \circ \phi(h))(v) \\ &= \sum_{h \in G} a_h (\psi(h) \circ \sigma)(v) = \sum_{h \in G} a_h \psi(h) \sigma(v) = \left(\sum_{h \in G} a_h h\right) \cdot \sigma(v). \end{aligned}$$

□

Schur 引理 **Thm. 7.6** 更常用的是如下群表示论版本:

²严格地说, 这个叫做左正则表示; 相应的有右正则表示, 当两者地位相同, 后者却不如前者直观与方便, 所以不做考究.

10.4. 有限群不可约表示

Theorem 10.3 [Schur 引理 (Schur's lemma)].

- **第一引理:** 设 $\sigma : V \rightarrow W$ 是群 G 的两个不可约表示 (ϕ, V) 和 (ψ, W) 之间的交结映射, 则 $\phi \stackrel{\sigma}{\sim} \psi$ 为线性同构当且仅当 $\sigma \neq 0$.
- **第二引理:** 设 (ϕ, V) 是群 G 在代数闭域 K 上的有限维不可约表示, 则任意自交结映射 $\phi \stackrel{\sigma}{\sim} \phi$ 均是数乘 $\sigma = k \cdot 1_V, k \in K$.

Proof. (1) 必要性显然, 只证充分性. 设 $\sigma \neq 0$, 根据 **Lem. 10.2**, 以及 **Thm. 7.6** 提供的第一引理, 因为 V 和 W 不可约时为 $K[G]$ -左单模, 从而 σ 是同构.

(2) 因为 V 不可约, 即 V 是有限维 $K[G]$ -左单模, 而 **Lem. 10.2** 指出 $\sigma \in \text{End}_{K[G]}(V)$, 根据 **Thm. 7.6** 提供的第二引理, 得出 $\sigma = k \cdot 1_V$. $\square$

Wedderburn–Artin 定理 **Thm. 7.7** 也有相应的群表示论版本: 设 G 是有限群, K 是域, 且 $\text{char } K \nmid |G|$. 则群代数 $K[G]$ 是有限维半单 K -代数, 从而由 Wedderburn–Artin 定理 **Thm. 7.7**, 存在若干除环 $D_1, \dots, D_r$ 与正整数 $n_1, \dots, n_r$, 使得有到单代数的直和分解

$$K[G] \cong \bigoplus_{i=1}^r M_{n_i}(D_i).$$

若进一步 K 是代数闭域, 则每个 $D_i \cong K$, 因而

$$K[G] \cong \bigoplus_{i=1}^r M_{n_i}(K).$$

上式直观地描绘了满足 Maschke 定理的代数闭域上 $K[G]$ 的结构, 就是若干矩阵的直和, 且每个分量均是单的. 但是 Wedderburn–Artin 定理的群表示论版本不是很常用, 更重要的意义在于给出 Burnside 公式的群表示论版本:

Corollary 10.1 [Burnside 公式 (Burnside's formula)]. 设 G 是有限群, K 是代数闭域, 且 $\text{char } K \nmid |G|$. 设 $V_1, \dots, V_r$ 是群 G 在 K 上两两不同构的全部不可约表示空间的代表元. 则左正则表示有分解

$$K[G] \cong \bigoplus_{i=1}^r V_i^{\oplus \dim_K V_i}.$$

Chapter 10. 初见群表示

换言之, 每个不可约表示 V_i 在左正则表示中的重数恰等于 $\dim_K V_i$. 特别地,

$$|G| = \sum_{i=1}^r (\dim_K V_i)^2.$$

Proof. 在条件 $\text{char } K \nmid |G|$ 下, 由 Maschke 定理, 群代数 $K[G]$ 是有限维半单 K -代数. 又群 G 在 K 上的线性表示与群代数 $K[G]$ 的左模一一对应, 不可约表示恰对应不可约左 $K[G]$ -模, 而左正则表示恰对应左正则 $K[G]$ -模. 因此将 Cor. 7.2 应用于代数 $A = K[G]$, 即得

$$K[G] \cong \bigoplus_{i=1}^r V_i^{\oplus \dim_K V_i},$$

其中 $V_1, \dots, V_r$ 是群 G 在 K 上两两不同构的全部不可约表示的代表元. 于是第 i 个不可约表示 V_i 在左正则表示中的重数恰为 $\dim_K V_i$.

最后对上式取 K -维数, 注意到群代数 $K[G]$ 以群元素为一组基, 从而 $\dim_K K[G] = |G|$, 故有

$$|G| = \dim_K K[G] = \sum_{i=1}^r \dim_K (V_i^{\oplus \dim_K V_i}) = \sum_{i=1}^r (\dim_K V_i)^2.$$

这就得到了 Burnside 公式的群表示论版本. □

至此, 我们说明了, 对有限群 G 和满足 Maschke 定理且代数闭的 K , 群代数 $K[G]$ 作为自己的左正则模, 的确蕴涵了所有的不等价不可约表示, 各自的重数恰好为表示空间的维数.

10.5 群函数

鉴于上一节的论述, 我们将特别关注采用 $\mathbb{C}$ 为底数域, 这是我们最熟悉的满足 Maschke 定理的代数闭域, 而且满足诸多优美的分析学性质. 从而 Burnside 公式指出, 此时所有的不等价不可约表示均以自身维度为重数蕴藏在群代数的正则表示中.

Definition 10.12 [群函数 (group function), 类函数 (class function)]. 群 G 的 K -值函数 $f: G \rightarrow K$ 称为**群函数**, 如果还满足 $f(ghg^{-1}) = f(g)$, 就称为**类函数**. 所有群函数组成的集合记作 K^G , 所有类函数组成的集合记作 $Cf_K(G)$.

这里的「类」指的是共轭类, 所谓类函数, 就是字面上的「取值仅依赖类」的函数. 依据 Conv. 10.1, 群函数和类函数同理扩充到群代数 $K[G]$ 上, 今后将扩充后的作为定义. K^G 是群代数 $K[G]$ 的

10.5. 群函数

对偶空间³, 按照通常的函数乘法与数乘的定义, 也形成群代数, 从而也有正则表示. 按照线性代数中的知识, 当 G 有限时,

$$\left\{ \delta_g \mid \delta_g(h) = \begin{cases} 1, & h = g, \\ 0, & h \neq g \end{cases}, \forall g, h \in G \right\}.$$

构成群函数空间的一组基. 当 G 无限时, 上式只是 $K^{(G)} := \{f : G \rightarrow K \mid \text{supp}(f) \text{ 有限} \}$ 的 Hamel 基, 却不是整个 K^G 的 Hamel 基. 当然根据 Def. 7.8, K^G 是有 Hamel 基的, 但是通常难以显式地写出.

Proposition 10.10. $Cf_K(G)$ 是 K^G 的子代数.

所以也常说 $Cf_K(G)$ 是类函数环, 类函数代数, 类函数子线性空间等.

Proof. 先证 $Cf_K(G)$ 是 K^G 的子线性空间. 设 $f, h \in Cf_K(G)$, $\lambda \in K$. 对任意 $x, g \in G$, 有

$$(f + h)(xgx^{-1}) = f(xgx^{-1}) + h(xgx^{-1}) = f(g) + h(g) = (f + h)(g),$$

以及

$$(\lambda f)(xgx^{-1}) = \lambda f(xgx^{-1}) = \lambda f(g) = (\lambda f)(g).$$

故 $f + h, \lambda f$ 仍为类函数, 从而 $Cf_K(G)$ 是 K^G 的子线性空间. 再证它对乘法封闭. 设 $f, h \in Cf_K(G)$. 则对任意 $x, g \in G$,

$$(fh)(xgx^{-1}) = f(xgx^{-1})h(xgx^{-1}) = f(g)h(g) = (fh)(g).$$

因而 fh 仍为类函数. 最后, 常值函数 $1_G : g \mapsto 1_K$ 显然满足

$$1_G(xgx^{-1}) = 1_K = 1_G(g),$$

故 $1_G \in Cf_K(G)$. 综上, $Cf_K(G)$ 对加法、数乘、乘法封闭, 且含单位元, 因而是 K^G 的子代数. $\square$

Definition 10.13 [内积 (inner product)]. 设群 G 有限阶, 两个 $\mathbb{C}$ -值群函数 f 和 g 的内积定义为

$$\langle f | g \rangle = \sum_{h \in G} f^*(h) g(h).$$

³当 G 有限时显然, 当 G 无限时, 这个论断原来 $K[G]$ 在定义时的有限支撑性 (见 Ex. 18), 且 Riesz 表示定理保证了对偶空间确如预期存在. 但是允许无限支撑时, Riesz 表示定理无法工作, 相应的「对偶空间」是一个十分巨大的, 难以用现有数学概念描述的奇怪结构. 所以定义群代数乃至一般的模时, 有限支撑性都相当重要.

Chapter 10. 初见群表示

这里, 容易看出内积的定义满足对第一个变量 f 满足 Hermite 线性, 对第二个内积满足线性, 也容易验证正定性: 自内积非负, 取零当且仅当自身为零. 所以这里定义的「内积」确实是「内积」. 特别的 $\langle \delta_g | \delta_h \rangle = \delta_{gh}$, 满足正交归一关系.

所谓幺正表示 (unitary representation), 指的是表示矩阵 $\Phi(g)$ 对任意的 $g \in G$, 均是幺正矩阵的矩阵表示.

Lemma 10.3. 群 G 的任意有限维复表示 (ϕ, V) 必能提供幺正表示, 从而任意复矩阵表示有等价幺正表示.

Proof. 在 V 上任取一个 Hermite 正定内积 $(\cdot | \cdot)$. 定义新的内积

$$\langle v | w \rangle := \sum_{g \in G} (\phi(g)v | \phi(g)w).$$

显然它仍是 Hermite 正定内积. 对任意 $h \in G$, 由重排定理 *Thm. 1.1*,

$$\begin{aligned} \langle \phi(h)v | \phi(h)w \rangle &= \sum_{g \in G} (\phi(g)\phi(h)v | \phi(g)\phi(h)w) \\ &= \sum_{g \in G} (\phi(gh)v | \phi(gh)w) = \langle v | w \rangle. \end{aligned}$$

因而 $\phi(h)$ 关于内积 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ 保内积, 即为幺正变换. 取一组关于 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ 的标准正交基, 则 ϕ 提供的矩阵表示满足 $\Phi(h)^H \Phi(h) = I, \forall h \in G$, 故这是一个幺正表示. 由于只是更换了表示空间的基, 它与原表示等价. $\square$

Theorem 10.4 [Schur 正交关系 (Schur orthogonality relations)]. 设 G 是有限群, (ϕ_i, V_i) 是其所有不等价不可约复表示代表元, (Φ_i, V_i) 是其提供的幺正表示, 则

• 第一定理:

$$\left\langle \sqrt{\frac{\dim V_i}{|G|}} (\Phi_i)_{\mu\nu} \middle| \sqrt{\frac{\dim V_j}{|G|}} (\Phi_j)_{\alpha\beta} \right\rangle = \delta_{ij} \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta};$$

• 第二定理:

$$\frac{1}{|G|} \sum_i \dim V_i \operatorname{Tr} \left(\Phi_i^H(g) \Phi_i(h) \right) = \delta_{gh}.$$

10.5. 群函数

Note. 有些文献称为大正交定理 (*the Great Orthogonality Theorem*). 第二定理的分量形式写作

$$\frac{1}{|G|} \sum_{i\mu\nu} \dim V_i \Phi_i^*(g)_{\mu\nu} \Phi_i(h)_{\mu\nu} = \delta_{gh}.$$

Proof. 先证第一定理. 固定 i, j, α, ν , 定义线性映射

$$T: V_i \rightarrow V_j, \quad T = \sum_{g \in G} \Phi_j(g) E_{\alpha\nu} \Phi_i(g)^{-1},$$

其中 $E_{\alpha\nu}: V_i \rightarrow V_j$ 表示矩阵单位. 对任意 $h \in G$, 由重排定理 *Thm. 1.1*,

$$\Phi_j(h)T = \sum_{g \in G} \Phi_j(hg) E_{\alpha\nu} \Phi_i(g)^{-1} = \sum_{g \in G} \Phi_j(g) E_{\alpha\nu} \Phi_i(h^{-1}g)^{-1} = T\Phi_i(h),$$

故 T 是交结映射. 若 $i \neq j$, 由 *Schur* 第一引理 *Thm. 10.3*, $T = 0$; 若 $i = j$, 由 *Schur* 第二引理 *Thm. 10.3*, $T = c1_{V_i}$. 比较矩阵元得

$$\sum_{g \in G} (\Phi_j(g))_{\beta\alpha} \dim V_i (\Phi_i(g)^{-1})_{\nu\mu} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ c\delta_{\beta\mu}, & i = j. \end{cases}$$

因为 Φ_i 是么正表示, $\Phi_i(g)^{-1} = \Phi_i(g)^H$, 即 $(\Phi_i(g)^{-1})_{\nu\mu} = \Phi_i^*(g)_{\mu\nu}$. 所以上式化为

$$\sum_{g \in G} \Phi_i^*(g)_{\mu\nu} \dim V_i \Phi_j(g)_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ c \dim V_i \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta}, & i = j. \end{cases}$$

当 $i = j, \mu = \alpha, \nu = \beta$ 时对 μ, ν 求和, 得

$$\sum_{g \in G} \sum_{\mu\nu} |\Phi_i(g)_{\mu\nu}|^2 = c(\dim V_i)^2.$$

另一方面, 每个 $\Phi_i(g)$ 都是么正矩阵, 故其各列单位化, 从而 $\sum_{\mu\nu} |\Phi_i(g)_{\mu\nu}|^2 = \dim V_i$. 因此左边等于 $|G| \dim V_i$, 所以 $c = \frac{|G|}{\dim V_i}$. 代入即得

$$\langle (\Phi_i)_{\mu\nu} | (\Phi_j)_{\alpha\beta} \rangle = \frac{|G|}{\dim V_i} \delta_{ij} \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta}.$$

第一定理证毕. 第二正交定理在引入 *Schur* 完备关系后再证明. □

Chapter 10. 初见群表示

Theorem 10.5 [Schur 完备关系 (Schur completeness relation)]. 设 G 是有限群, (ϕ_i, V_i) 是其所有不等价不可约复表示代表元, (Φ_i, V_i) 是其提供的矩阵表示, 则 $\{(\Phi_i)_{\mu\nu}\}_{i\mu\nu}$ 在群函数空间 $\mathbb{C}^G$ 完备.

Proof. 由 Thm. 10.4 的第一定理, $\left\{\sqrt{\frac{\dim V_i}{|G|}}(\Phi_i)_{\mu\nu}\right\}_{i\mu\nu}$ 是一组标准正交族, 因而线性无关. 另一方面, 这组函数的总数为 $\sum_i (\dim V_i)^2$. 由 Burnside 公式 Cor. 10.1,

$$\sum_i (\dim V_i)^2 = |G| = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^G.$$

因而这组线性无关函数的个数恰等于整个空间的维数, 故它们构成 $\mathbb{C}^G$ 的一组基. □

根据 Thm. 10.4 提供的第一定理以及 Thm. 10.5, 我们知道了 $\left\{\sqrt{\frac{\dim V_i}{|G|}}(\Phi_i)_{\mu\nu}\right\}_{i\mu\nu}$ 构成了群 G 有限时的群函数空间 $\mathbb{C}^G$ 的一组正交完备基. 并且考虑这组基的元素个数, 就重新得到 Burnside 公式 Cor. 10.1 了. 下面补充证明 Thm. 10.4 中的第二定理.

Proof. $\left\{\sqrt{\frac{\dim V_i}{|G|}}(\Phi_i)_{\mu\nu}\right\}_{i\mu\nu}$ 构成 $\mathbb{C}^G$ 的一组标准正交基, 因而对任意 $g \in G$,

$$\delta_g = \sum_{i\mu\nu} \left\langle \sqrt{\frac{\dim V_i}{|G|}}(\Phi_i)_{\mu\nu} \middle| g \right\rangle \sqrt{\frac{\dim V_i}{|G|}}(\Phi_i)_{\mu\nu}.$$

对任意 $h \in G$ 取值, 得

$$\delta_{gh} = \sum_{i\mu\nu} \left\langle \sqrt{\frac{\dim V_i}{|G|}}(\Phi_i)_{\mu\nu} \middle| g \right\rangle \sqrt{\frac{\dim V_i}{|G|}}(\Phi_i(h))_{\mu\nu}.$$

由内积定义,

$$\left\langle \sqrt{\frac{\dim V_i}{|G|}}(\Phi_i)_{\mu\nu} \middle| g \right\rangle = \sqrt{\frac{\dim V_i}{|G|}} \Phi_i^*(g)_{\mu\nu}.$$

因而

$$\delta_{gh} = \frac{1}{|G|} \sum_{i\mu\nu} \dim V_i \Phi_i(g)^*_{\mu\nu} \Phi_i(h)_{\mu\nu}.$$

10.6. 特征标

这就是第二定理的分量形式. 最后由

$$\mathrm{Tr}(\Phi_i(g)^H \Phi_i(h)) = \sum_{\mu\nu} \Phi_i(g)_{\mu\nu}^* \Phi_i(h)_{\mu\nu},$$

得到迹形式

$$\frac{1}{|G|} \sum_i \dim V_i \mathrm{Tr}(\Phi_i(g)^H \Phi_i(h)) = \delta_{gh}.$$

□

特别的, 完备性定理用 Dirac 符号表示就是 $1 = \sum_{i\mu\nu} \left| \sqrt{\frac{\dim V_i}{|G|}} (\Phi_i)_{\mu\nu} \right\rangle \left\langle \sqrt{\frac{\dim V_i}{|G|}} (\Phi_i)_{\mu\nu} \right|$, 所以实际上 Schur 正交关系第二定理就是 $\langle g|h \rangle = \delta_{gh}$ 在「不可约复表示矩阵元表象」下的形式 $\langle g|h \rangle = \sum_{i\mu\nu} \left\langle g \left| \sqrt{\frac{\dim V_i}{|G|}} (\Phi_i)_{\mu\nu} \right\rangle \left\langle \sqrt{\frac{\dim V_i}{|G|}} (\Phi_i)_{\mu\nu} \right| h \right\rangle$.

10.6 特征标

特征标理论通常被认为最早始于 Georg Frobenius 于 1896 年前后的工作, 其在群表示理论中发挥重要作用. 简单地说, 群的线性表示缺少一些可以定量计算的工具, 与此同时, 如何刻画不同表示之间是否等价, 是否可约, 由哪些不可约表示组成, 各个不可约组分之间是否等价, 等等诸多问题依旧棘手. 而特征标理论指出, 仅依靠表示的秩这一特征, 就可以很大程度上解决这些问题.

Definition 10.14 [特征标 (character)]. 设 (ϕ, V) 是群 G 在域 K 上的有限维线性表示, 定义 K -值函数

$$\chi_\phi(g) := \mathrm{Tr}(\phi(g)), \quad \forall g \in G,$$

称 χ_ϕ 是表示 ϕ 提供的**特征标**.

Proposition 10.11.

- 设 ϕ 是群 G 在域 K 上的有限维线性表示, 则 $\chi_\phi(1) = (\deg \phi)1$.
- 设 ρ 是群 G 在域 K 上的正则表示, 则 $\chi_\rho(g) = 0$, 对任意的 $g \neq 1, g \in G$ 均成立.

Proof.

□

Chapter 10. 初见群表示

Proposition 10.12. 特征标是类函数.

Proof. □

Theorem 10.6. 群 G 的两个有限维半单表示等价当且仅当它们提供的特征标相等.

注意, 再次说明, 对于有限群, Maschke 定理 [Thm. 10.2](#) 提供了一个好用的半单判据, 但是无限群时尚且没有好用的判据.

Proof. □

Proposition 10.13. 设 (ϕ, V) 和 (ψ, W) 是群 G 在域 K 上的两个有限维线性表示, 则 $\chi_{\phi \oplus \psi} = \chi_{\phi} + \chi_{\psi}$.

Proof. □

Proposition 10.14. 设有限群 G 指数为 m , (ϕ, V) 是其复表示, χ_{ϕ} 是 ϕ 提供的特征标, 则对任意的 $g \in G$, 均有:

- $\chi_{\phi}(g)$ 是若干 m 次单位根的和;
- $\chi_{\phi}(g^{-1}) = \chi_{\phi}^*(g)$;
- $|\chi_{\phi}(g)| \leq \chi_{\phi}(1)$, 等号成立当且仅当 $\phi(g) = c1_V$, 其中 c 是某一 m 次单位根;
- $\chi_{\phi}(g) = \chi_{\phi}(1)$ 当且仅当 $\phi(g) = 1_V$.

Proof. □

下面我们研究域 K 上的不可约表示的特征标, 重点介绍特征标正交定理, 这在物理学中非常有用. 以下均设群 G 有限且 $\text{char } K \nmid |G|$.

根据 [Cor. 10.1](#) 以及在 [Sec. 6.7](#) 中的讨论 $K[G]$ 作为自身左正则模的不可约分解, 每一个成分均是极小双边理想, 同构意义下每个成分重数为其维度, 即

$$K[G] = (I_{11} \oplus I_{1, \dim I_1}) \oplus \cdots \oplus (I_{r1} \oplus \cdots \oplus I_{r, \dim I_r}) \cong \bigoplus_{i=1}^r (\dim I_i) I_i,$$

10.6. 特征标

且 $I_{i1} \oplus \cdots \oplus I_{i, \dim I_i} = e_i K[G]$, e_i 为 $I_{i1} \oplus \cdots \oplus I_{i, \dim I_i}$ 的单位元以及 $K[G]$ 的本原中心幂等元, 而且无遗漏, 还满足 $1 = e_1 + \cdots + e_r$. 这部分论证见 [Sec. 6.7](#).

设 $(\phi_1, I_1), \dots, (\phi_r, I_r)$ 是群 G 的 K 上全部不等价不可约表示, 这里 I_i 是 $I_{i1}, \dots, I_{i, \dim I_i}$ 等价类代表元, χ_i 为 ϕ_i 提供的特征标, χ_ρ 为正则表示 ρ 提供的特征标. 此处均已经按照 [Conv. 10.1](#) 线性扩充定义. 因为 ρ 由诸 ϕ_i 直和而来, 从而根据 [Prop. 10.13](#),

$$\chi_\rho = \sum_{i=1}^r (\deg \phi_i) \chi_i. \quad (10.5)$$

类比单位元 1 直和分解到本原中心幂等元, 我们考虑上面的分解式子与本原中心幂等元的联系, 为此先求出本原中心幂等元的表达式, 设

$$e_i = \sum_{g \in G} a_g g,$$

任取 $h \in G$, 左乘上式

$$he_i = \sum_{g \in G} a_g hg = \sum_{g \in G} a_{h^{-1}g} g,$$

此处用到重排定理 [Thm. 1.1](#). 再等式两边同时取正则特征标,

$$\chi_\rho(he_i) = \sum_{g \in G} a_{h^{-1}g} \chi_\rho(g) = a_{h^{-1}} \chi_\rho(1),$$

此处用到 [Prop. 10.11](#). 然后考虑等式左边, 代入 (10.5), 得到

$$\chi_\rho(he_i) = \sum_{j=1}^r (\deg \phi_j) \chi_j(he_i). \quad (10.6)$$

下面去求 $\chi_j(he_i) = \text{Tr } \phi_j(he_i)$. 这里 ϕ_j 是 I_j 上的线性变换, 当 $j \neq i$ 时, $he_i \in I_i$ 所以 $he_i \notin I_j$, 所以此时 $\chi_j(he_i) = 0$. 具体地说, 任给 $x \in I_j$, $\phi_j(he_i) \cdot x = he_i \cdot x = h(e_i x) = 0$. 当 $j = i$ 时, $\phi_i(he_i)x = he_i \cdot x = hx = \phi_i(h)x$, 所以 $\chi_i(he_i) = \chi_i(h)$. 因此 (10.6) 就是

$$\chi_\rho(he_i) = (\deg \phi_i) \chi_i(h).$$

这样我们就求解完了, 最终 $a_{h^{-1}} = \frac{\chi_\rho(he_i)}{\chi_\rho(1)} = \frac{(\deg \phi_i) \chi_i(h)}{\chi_\rho(1)}$, 代回本原中心幂等元展开式得

$$e_i = \sum_{g \in G} \frac{(\deg \phi_i) \chi_i(g^{-1})}{\chi_\rho(1)} g.$$

Chapter 10. 初见群表示

Lemma 10.4. 设 G 是有限群, 域 K 满足 $\text{char } K \nmid |G|$, $e_1, \dots, e_r$ 是群代数 $K[G]$ 全部本原中心幂等元, $\phi_1, \dots, \phi_r$ 是群 G 的 K 上的全部不等价不可约表示, χ_i 为 ϕ_i 提供的特征标, $i = 1, \dots, r$, χ_ρ 为正则表示 ρ 提供的特征标, 则:

- $\chi_j(ge_i) = \delta_{ij}\chi(g), \forall g \in G;$
- $e_i = \frac{\deg \phi_i}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})g.$

Proof. 上面的讨论几乎已经完成了证明, 第一式已经证完, 第二式只需使用 *Prop. 10.11* 即可. $\square$

Theorem 10.7 [Schur 正交关系 (Schur orthogonality relations)]. 设 G 是有限群, (ϕ_i, V_i) 是其所有不等价不可约复表示代表元, χ_i 是 ϕ_i 提供的特征标, $[g] \equiv \text{Cl}(g)$ 表示 g 的共轭等价类, 则

- 第一定理:

$$\left\langle \sqrt{\frac{1}{|G|}} \chi_i \mid \sqrt{\frac{1}{|G|}} \chi_j \right\rangle = \delta_{ij};$$

- 第二定理:

$$\frac{1}{|G|} \sum_i \chi_i^*([g]) \chi_i([h]) = \delta_{[g][h]}.$$

Remark. 特征标是类函数, 符号 $\chi_i([g])$ 表示 $\frac{1}{\sqrt{|[g]|}} \sum_{g \in [g]} \chi_i(g) = \sqrt{|[g]|} \chi_i(g)$, 其中 $g \in [g]$ 是这个等价类中任取的代表元. 实际上, 用 *Dirac* 符号, $\chi_i([g]) \equiv \langle [g] | \chi_i \rangle$, 而符号 $|[g]\rangle$ 的含义见后文 $|[g]\rangle$.

Proof. $\square$

Theorem 10.8 [Schur 完备关系 (Schur completeness relation)]. 设 G 是有限群, (ϕ_i, V_i) 是其所有不等价不可约复表示代表元, χ_i 是 ϕ_i 提供的特征标, 则 $\{\chi_i\}_i$ 在类函数空间 $Cf_{\mathbb{C}}(G)$ 中完备.

Proof. $\square$

10.6. 特征标

类似 $\left\{ \sqrt{\frac{\dim V_i}{|G|}} (\Phi_i)_{\mu\nu} \right\}_{i,\mu\nu}$ 构成 $\mathbb{C}^G$ 的一组正交完备基, 根据特征标第一正交关系和完备性关系, 我们得知了 $\left\{ \sqrt{\frac{1}{|G|}} \chi_i \right\}_i$ 形成了类函数空间的一组标准正交基. 我们考虑定义等价类的标准正交基, 其中内积的定义由 **Ex. 18** 和 **Def. 10.13** 中定义的限制而来, 类似于 $\langle g |$ 功能形如「 g 的示性函数 δ_g 」, 我们希望 $\langle [g] |$ 也形如 $[g]$ 的示性函数

$$\langle [g] | h \rangle = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{|[g]|}}, & h \in [g], \\ 0, & h \notin [g], \end{cases} \quad (10.7)$$

那么自然有 $|[g]\rangle = \sqrt{\frac{1}{|[g]|}} \sum_{g \in [g]} |g\rangle$, 从而

$$\langle [g] | [h] \rangle = \delta_{[g][h]} \quad (10.8)$$

正交且归一. 基于这点, 特征标第二正交定理也可以类似群函数第二正交定理一样用 Dirac 符号表达:

$$\langle [g] | [h] \rangle = \sum_i \left\langle [g] \left| \sqrt{\frac{1}{|G|}} \chi_i \right\rangle \left\langle \sqrt{\frac{1}{|G|}} \chi_i \right| [h] \right\rangle = \frac{1}{|G|} \sum_i \chi_i([g]) \chi_i^*([h]) = \delta_{[g][h]}.$$

Theorem 10.9. ϕ 是有限群 G 的有限维复表示, 则不可约复表示 ϕ_i 在 ϕ 中的重数为 $\left\langle \sqrt{\frac{1}{|G|}} \chi_i \left| \sqrt{\frac{1}{|G|}} \chi_\phi \right\rangle$. 特别的, ϕ 不可约当且仅当 $\left\langle \sqrt{\frac{1}{|G|}} \chi_\phi \left| \sqrt{\frac{1}{|G|}} \chi_\phi \right\rangle = 1$.

Proof. 任意的有限维复表示 ϕ 均可以在此展开 $\phi \cong a_1 \phi_1 \oplus \cdots \oplus a_r \phi_r$, 并给出特征标 $\chi_\phi = a_1 \chi_1 + \cdots + a_r \chi_r$. 我们有一个极其优雅的方式得知某不可约表示 ϕ_i 在 ϕ 中的重数, 只要类似矢量一样进行内积, $\left\langle \sqrt{\frac{1}{|G|}} \chi_i \left| \sqrt{\frac{1}{|G|}} \chi_\phi \right\rangle = a_i$. □

我们记群 G 的所有不等价不可约复表示的代表元所成的集合为 $\text{Irr}(G)$.

Theorem 10.10 [特征标反演公式 (character inversion formula)]. 设 G 是有限群, $A =$

Chapter 10. 初见群表示

$\sum_{g \in G} a_g g \in \mathbb{C}[G]$, 则

$$a_g = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(Ag^{-1}) \chi(1), \quad \forall g \in G.$$

Proof. 我们将使用 *Dirac* 符号并体验这套符号系统的优越性:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(Ag^{-1}) \chi(1) &= \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(Ag^{-1}) \chi^*(1) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \langle Ag^{-1} | \chi \rangle \langle \chi | 1 \rangle = \langle Ag^{-1} | 1 \rangle = a_g. \end{aligned}$$

□

当 G 是有限 Abel 群时, G 的不可约一次复表示均为 1 次的, 从而可以把这些 1 次的不可约表示 ϕ_i 和它提供的特征标 χ_i 等同, 此时记 $\widehat{G} = \text{Irr}(G)$, 称为 G 的复特征标群. 对 $\chi \in \widehat{G}$, 有

$$\chi(Ag^{-1}) = \chi(A) \chi(g^{-1}) = \chi(A) \chi^*(g).$$

从而反演公式可以写为

$$a_g = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(A) \chi^*(g).$$

从而, 如果 $A, B \in \mathbb{C}[G]$ 对一切 $\chi \in \widehat{G}$ 均有 $\chi(A) = \chi(B)$, 那么 $A = B$. 另外, 在有限 Abel 群中, 每个群元自成一类, 因而 $Cf_{\mathbb{C}}(G) = \mathbb{C}^G$. 从而此时 $\left\{ \sqrt{\frac{1}{|G|}} \chi_g \right\}_{g \in G}$ 成为了整个 $Cf_{\mathbb{C}}(G)$ 的标准正交基, 任意 G 上的复值函数 f 均能如下表达,

$$f = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \chi_g | f \rangle \chi_g.$$

这被称为函数 f 的 **Fourier 展开**, 其系数则被称为 **Walsh-Hadamard 变换 (Walsh-Hadamard transformation)** 变换,

$$\widehat{f}(g) := \frac{1}{\sqrt{|G|}} \langle \chi_g | f \rangle.$$

10.7. 表示的张量积

类似刻画微积分中的 Fourier 展开保持能量的 **Parseval 恒等式**, 此处我们也有同名等式

$$\langle \widehat{f} | \widehat{g} \rangle = \langle f | g \rangle.$$

证明只要利用 Dirac 符号就十分优雅清晰:

$$\langle \widehat{f} | \widehat{g} \rangle = \sum_{h \in G} \langle \widehat{f} | h \rangle \langle h | \widehat{g} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \langle f | \chi_h \rangle \langle \chi_h | g \rangle = \langle f | g \rangle.$$

10.7 表示的张量积

物理上我们经常考虑联合系统, 也就是两个量子系统的 Hilbert 空间的张量积. 若一个群同时配备了分别在两个 Hilbert 空间上的对称作用, 问如何考究在联合系统的 Hilbert 空间上的作用? 这个物理问题翻译成数学语言, 就是在问如何构造表示的张量积. 就纯数学角度而言, 我们也希望通过张量积构造新的表示. 总而言之, 表示的张量积是我们关心的问题.

Definition 10.15 [表示的张量积 (tensor product of representations)]. 设 (ϕ, V) 和 (ψ, W) 是群 G 的 K -表示, 定义 $(\phi \otimes \psi, V \otimes W)$ 是 G 的张量积表示, 满足 $(\phi \otimes \psi)(g) := \phi(g) \otimes \psi(g)$.

我们需要说明的是, 根据 $(\phi \otimes \psi)(g) := \phi(g) \otimes \psi(g)$ 定义出的「张量积表示」的确是一个表示. 为此先说明 $\phi \otimes \psi$ 的确是 $V \otimes W$ 所承载的: 因为 $\phi(g)$ 和 $\psi(g)$ 分别是 V 和 W 上的线性变换, 根据 **Prop. 7.7**, 存在唯一的线性变换 $\phi(g) \otimes \psi(g)$ 使得 $(\phi(g) \otimes \psi(g))(v \otimes w) = [\phi(g)](v) \otimes [\psi(g)](w)$. 且根据 **Prop. 7.8**, 有求逆元操作 $[\phi(g) \otimes \psi(g)]^{-1} = [\phi(g)]^{-1} \otimes [\psi(g)]^{-1}$. 考虑 $g, h \in G$,

$$\begin{aligned} (\phi \otimes \psi)(gh) &= \phi(gh) \otimes \psi(gh) = (\phi(g)\phi(h)) \otimes (\psi(g)\psi(h)) \\ &= [\phi(g) \otimes \psi(g)][\phi(h) \otimes \psi(h)] = [(\phi \otimes \psi)(g)][(\phi \otimes \psi)(h)]. \end{aligned}$$

因此 $\phi \otimes \psi$ 是从 G 到 $\text{GL}(V \otimes_K W)$ 的群同态.

Proposition 10.15. 群 G 的两个有限维 K -表示 (ϕ, V) 和 (ψ, W) 的张量积 $(\phi \otimes \psi, V \otimes W)$ 提供的特征标 $\chi_{\phi \otimes \psi}$ 满足 $\chi_{\phi \otimes \psi} = \chi_\phi \chi_\psi$.

Proof. 考虑线性表示提供的矩阵表示 Φ 和 Ψ , 有

$$\chi_{\phi \otimes \psi}(g) := \text{Tr}[(\Phi \otimes \Psi)(g)] = \text{Tr}[\Phi(g) \otimes \Psi(g)] = \text{Tr}[\Phi(g)] \text{Tr}[\Psi(g)] = \chi_\phi(g) \chi_\psi(g).$$

以上对任意的 $g \in G$ 均成立, 约去 g 即可. $\square$

Chapter 10. 初见群表示

10.8 直积表示

依据 Sec. 2.2, 我们可以通过直积构造更大的群. 如果小群还配备了表示, 我们是否可以构造大群的表示? 直积表示正是一个我们需要的构造方案.

Definition 10.16 [群直积的表示 (representations of direct product of groups)]. 设有直积群 $G = G_1 \times G_2$, (V_1, ϕ_1) 和 (V_2, ϕ_2) 分别是 G_1 和 G_2 的表示, 定义 $(\phi_1 \otimes \phi_2, V_1 \otimes V_2)$ 是 G 的直积表示, 满足 $(\phi_1 \otimes \phi_2)(g_1, g_2) := \phi_1(g_1) \otimes \phi_2(g_2)$.

依定义可见, 所谓直积表示, 本质是一种特殊的张量积表示. 我们下面说明所谓「直积表示」确实是一种表示: 类似在 Sec. 10.7 中的讨论, $\{(\phi_1 \otimes \phi_2)(g_1, g_2)\}_{g_1 \in G_1, g_2 \in G_2}$ 的确构成 $\text{GL}(V_1 \otimes V_2)$ 的子群, 并验证同态性

$$\begin{aligned} (\phi_1 \otimes \phi_2)(g_1 g'_1, g_2 g'_2) &= \phi_1(g_1 g'_1) \otimes \phi_2(g_2 g'_2) = [\phi_1(g_1) \phi_1(g'_1)] \otimes [\phi_2(g_2) \phi_2(g'_2)] \\ &= [\phi_1(g_1) \otimes \phi_2(g_2)] [\phi_1(g'_1) \otimes \phi_2(g'_2)] = [(\phi_1 \otimes \phi_2)(g_1, g_2)] [(\phi_1 \otimes \phi_2)(g'_1, g'_2)]. \end{aligned}$$

从而「直积表示」的确是表示.

Proposition 10.16. 设有直积群 $G = G_1 \times G_2$, (ϕ_i, V_i) 和 (ψ_i, W_i) 分别是 G_i 的两个有限维不可约 K -表示, $i = 1, 2$, 则 $\phi_1 \otimes \phi_2 \sim \psi_1 \otimes \psi_2$ 当且仅当 $\phi_1 \sim \psi_1$ 且 $\psi_1 \sim \psi_2$.

Proof.

□

Proposition 10.17. 设有直积群 $G = G_1 \times G_2$, (ϕ, V) 和 (ψ, W) 分别是群 G_1 和 G_2 的 K -表示, 则直积表示 $\phi \otimes \psi$ 是 G 的不可约 K -表示当且仅当 ϕ 与 ψ 均不可约.

Proof.

□

Proposition 10.18. 设有直积群 $G = G_1 \times G_2$, $\text{Irr}(G_1) = \{\phi_i\}_{i=1}^s$ 和 $\text{Irr}(G_2) = \{\psi_j\}_{j=1}^r$ 分别是 G_1 和 G_2 的全部的不等价不可约复表示, 则 $\text{Irr}(G) = \{\phi_i \otimes \psi_j\}_{ij}$ 即 G 的全部不等价不可约复表示.

Proof.

□

10.9. 分导表示

从上面的命题可知, 若 G_1 和 G_2 的复特征标表分别为 T_1 和 T_2 , 则 $G = G_1 \times G_2$ 的复特征标表为 $T = T_1 \otimes T_2$.

Corollary 10.2 [Schur 定理 (Schur's theorem)]. 设 (ϕ, V) 是有限群 G 的不可约复表示, 则 $\deg \phi \mid [G : Z(G)]$.

Proof.

□

10.9 分导表示

10.10 诱导表示

在直积表示 Sec. 10.8 中, 我们学习了一种通过两个因子群的表示构造直积群表示的方法. 然而很多时候, 我们找不到大群的直积分解, 更不用说再找因子群的表示. 但是找到一个子群及其表示却显得容易很多, 现在问, 是否有通过子群及其表示构造大群的表示的方法呢? 本节谈论的诱导表示为我们提供了一个方案.

Definition 10.17 [诱导表示 (induced representation)]. 设群 G 及其子群 H , (ψ, W) 是 H 的 K -表示, 则 $(K[G], K[H])$ -双模 $K[G]$ 与左 $K[H]$ -模 W 的张量积 $K[G] \otimes_{K[H]} W$ 是左 $K[G]$ -模, 称为 W -诱导模, 记作 W^G , 其提供的 G 的 K -表示称为 ψ 的诱导表示, 记作 ψ^G .

References of this chapter

[丘维声 11] 丘维声.《群表示论》. 高等教育出版社, 2011. isbn: 978-7-04-032711-3.

[李新征 23] 李新征.《群论及其在凝聚态物理中的应用》. 北京: 北京大学出版社, 2023. isbn: 978-7-301-34211-4.

11

Contents

11.1 投影表示	251
11.2 共表示	259
11.3 实表示	268

广义表示一瞥

11.1 投影表示

Definition 11.1 [投影表示 (projective representation)]. 设 G 是群, V 是域 K 上的线性空间, $\mathrm{GL}(V)$ 是 V 上的可逆线性变换群, $K^\times I_V = \{\lambda I_V \mid \lambda \in K^\times\}$ 为非零标量变换构成的群, 显然 $K^\times I_V \trianglelefteq \mathrm{GL}(V)$, 定义射影线性群 (projective linear group) $\mathrm{PGL}(V) := \mathrm{GL}(V)/K^\times I_V$, 称群同态 $[\phi] : G \rightarrow \mathrm{PGL}(V)$ 为投影表示.

我们拆解如上定义寻求进一步理解. 对每个 $g \in G$, 选取代表元 $\phi(g)$ 使得 $[\phi(g)] \in \mathrm{PGL}(V)$ 即 $[\phi(g)]$ 为 $\phi(g)$ 所属的等价类. 因为 $[\phi]$ 是群同态, 则

$$[\phi(g)][\phi(h)] = [\phi(gh)].$$

也就是说, 在 $\mathrm{GL}(V)$ 中, 存在非零标量 $\alpha(g, h) \in K^\times$ 使得

$$\phi(g)\phi(h) = \alpha(g, h)\phi(gh).$$

于是就有函数 $\alpha : G \times G \rightarrow K^\times$, 称为该投影表示的因子系 (factor system) 或乘子 (multiplier). 从中我们得出, 投影表示是「只差非零标量就成为同态」的「准同态」. 当然, $\alpha = 1$ 时, 得到的就是普通的线性表示. 实际使用时, 我们时常称呼这个代表元为投影表示, 而不是到 $\mathrm{PGL}(V)$ 的那个等价类.

Chapter 11. 广义表示一瞥

Example 27 [量子力学对称性]. 在量子力学中我们常常如此考虑对称性: 一个对称操作 T 通过映射 U 变为 $Hilbert$ 空间上的算符 $U(T)$. T_2, T_1 相继作用于 $|\psi\rangle$ 有两种识别方式, $U(T_1)U(T_2)|\psi\rangle$ 与 $U(T_1T_2)|\psi\rangle$. 因为相差 $U(1)$ 规范自由度的态无物理本质差别, 所以上面二式至多允许相差一个相位

$$U(T_1)U(T_2)|\psi\rangle = e^{i\alpha_\psi(T_1, T_2)}U(T_1T_2)|\psi\rangle,$$

其中 $\alpha_\psi(T_1, T_2) \in \mathbb{R}$. 证明 $\alpha_\psi(T_1, T_2)$ 与 ψ 无关, 从而得到量子力学中需要的投影表示.

Remark. 这个例子给出了物理学中研究投影表示的必要性.

Proof. 任取 $|\psi\rangle, |\phi\rangle$, 构造 $|\psi + \phi\rangle := |\psi\rangle + |\phi\rangle$, 于是

$$\begin{aligned} e^{i\alpha_{\psi+\phi}(T_1, T_2)}U(T_1T_2)|\psi + \phi\rangle &= U(T_1)U(T_2)|\psi + \phi\rangle = U(T_1)U(T_2)(|\psi\rangle + |\phi\rangle) \\ &= e^{i\alpha_\psi(T_1, T_2)}U(T_1T_2)|\psi\rangle + e^{i\alpha_\phi(T_1, T_2)}U(T_1T_2)|\phi\rangle, \end{aligned}$$

也就是说

$$e^{i\alpha_{\psi+\phi}(T_1, T_2)} = e^{i\alpha_\psi(T_1, T_2)} = e^{i\alpha_\phi(T_1, T_2)}, \quad \forall \psi, \phi, \quad \forall T_1, T_2.$$

因此只能 $\alpha_{\psi+\phi} = \alpha_\psi = \alpha_\phi = \alpha$, 模 2π 意义下相等. □

从上例可知 α 取值在 $U(1)$ 的情况尤为重要, 下面的命题给出一个充分条件:

Proposition 11.1. 考虑 $Abel$ 核上的中心扩张 $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1$, 若 (ϕ, V) 是 G 的一个复表示, 则其给出 N 的一个标量表示.

Note. 所谓标量表示, 指的是 $\phi(n) = \lambda_n I_V, \forall n \in N, \lambda_n \in \mathbb{C}, I_V$ 是 V 上的单位变换.

Proof. □

我们约定规范化, $\phi(e) = I_V$, 从而 $\alpha(e, g) = \alpha(g, e) = 1$, 可知 $\alpha \in C^2(G, K^\times)$. 结合律 $(\phi(g)\phi(h))\phi(k) = \phi(g)(\phi(h)\phi(k))$ 给出 2-上链自洽条件

$$\alpha(g, h)\alpha(gh, k) = \alpha(h, k)\alpha(g, hk), \quad (11.1)$$

我们只考虑自洽的 $\alpha \in Z^2(G, K^\times)$. 下面一个自然的问题是如何研究等价的投影表示, 以及和线性表示等价的条件是什么, 以及此时如何通过调整 ϕ 使其回归普通的线性表示.

「等价」有两层意思: 1. 投影表示不同的代表元给出相同的投影表示等价类; 2. 两个等价类之间存在交结映射. 我们下面谈论的「等价」指的是第一种. 我们考虑 $\phi'(g) = \lambda(g)\phi(g), \lambda(g) \in$

11.1. 投影表示

$K^\times$, 此时 ϕ' 与 ϕ 给出的等价类 $[\phi'] = [\phi]$, 因此相差一个 1-上链 $\lambda \in C^1(G, K^\times)$ 的投影表示是等价的. 进一步, 有

$$\phi'(g)\phi'(h) = \lambda(g)\lambda(h)\phi(g)\phi(h) = \lambda(g)\lambda(h)\alpha(g, h)\phi(gh) = \frac{\lambda(g)\lambda(h)}{\lambda(gh)}\alpha(g, h)\phi'(gh),$$

可见 $\alpha'(g, h) = \frac{\lambda(g)\lambda(h)}{\lambda(gh)}\alpha(g, h)$, 等价投影表示的 2-上闭链之间相差一个 2-上边界 $\frac{\alpha'(g, h)}{\alpha(g, h)} = \frac{\lambda(g)\lambda(h)}{\lambda(gh)} \in B^2(G, K^\times)$, 该式子理解为「作为映射成立」.

Definition 11.2 [投影表示代表元等价]. 设 G 是群, V 是域 K 上的线性空间, $\text{PGL}(V)$ 是其射影线性群, ϕ 和 ψ 是 G 在 V 上的射影表示代表元, 称它们是**等价的**, 如果它们给出同一个射影表示等价类 $[\phi] = [\psi]$; 若 α 与 β 分别是 ϕ 与 ψ 的 2-上闭链系数, 则它们等价的必要条件为 $\alpha/\beta \in B^2(G, K^\times)$.

Example. 条件 $\alpha/\beta \in B^2(G, K^\times)$ 不是投影表示代表元等价的充分条件. 取 $C_2 = \{e, s\}$, $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^2$. 定义

$$\phi(s) = I_2, \quad \psi(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

则 ϕ, ψ 都是普通线性表示, 因而 $\alpha = \beta = 1$. 所以 $\alpha/\beta = 1 \in B^2(G, \mathbb{C}^\times)$. 但若 $[\phi] \sim [\psi]$, 则存在 $\sigma \in \text{GL}(V)$ 与 $\lambda: G \rightarrow \mathbb{C}^\times$, 使得

$$\psi(s) = \lambda(s)\sigma\phi(s)\sigma^{-1} = \lambda(s)I_2,$$

这与 $\psi(s)$ 不是标量矩阵矛盾.

Definition 11.3 [投影表示等价类等价, 投影交结映射 (projective intertwining map)]. 设 (ϕ, V) 和 (ψ, W) 是 G 的投影表示代表元, 称它们给出的投影表示等价类 $[\phi]$ 和 $[\psi]$ 是**等价的**, 记作 $[\phi] \sim [\psi]$, 若它们之间凭**射影交结映射** $\sigma: V \rightarrow W$ 同构. 射影交结映射是线性变换, 使得存在 $\lambda \in C^1(G, K^\times)$ 满足 $\lambda(g)\psi(g) \circ \sigma = \sigma \circ \phi(g)$, $\forall g \in G$. 射影交结映射称为**严格的**, 若 λ 平凡.

考虑 $H^2(G, K^\times) = Z^2(G, K^\times)/B^2(G, K^\times)$. 两个等价的投影表示代表元的差别 $\frac{\alpha'(g, h)}{\alpha(g, h)} = \frac{\lambda(g)\lambda(h)}{\lambda(gh)}$ 处在 $B^2(G, K^\times)$ 中, 假若我们模掉这个差别 $B^2(G, K^\times)$, 那么 $[\alpha'] = [\alpha]$, 换句话说, 2-上调 $H^2(G, K^\times)$ 分类了可能的因子系 (等价意义下). 反过来说, 如果 $[\beta] \neq [\alpha]$, 那么两者对应的

Chapter 11. 广义表示一瞥

投影表示等价类 ψ 和 ϕ 就不等价, 即 $[\psi] \neq [\phi]$, 即不存在 $\lambda \in C^1(G, K^\times)$ 使得 $\psi(g) = \lambda(g)\phi(g)$, $\forall g$.

下面研究如何把可约与完全可约性, Maschke 定理, Schur 第一第二引理, Burnside 公式, 特征标, Schur 正交关系, Schur 完备关系等推广到投影表示之中.

Definition 11.4 [扭曲群代数 (twisted group algebra)]. 设 G 是群, K 是数域, $\alpha \in Z^2(G, K^\times)$, 定义 α -扭曲群代数 $K_\alpha[G]$ 为

$$K_\alpha[G] \left\{ \sum_{g \in G} a_g g \mid a_g \in K, \text{非 } 0 \text{ 的 } a_g \text{ 至多有限} \right\},$$

其上的乘法由

$$g \cdot h = \alpha(g, h)gh, \quad \forall g, h \in G$$

给出, 等式左侧 $g \cdot h$ 表示代数乘法, 等式右侧 gh 表示群乘法. 我们均约定 α 是规范化的.

下面我们称以 $\alpha \in Z^2(G, K^\times)$ 为系数的投影表示代表元为 α -投影表示. 借用扭曲的群代数, 我们把 α -投影表示的表示问题, 完全地转换为 $K_\alpha[G]$ -模的表示问题.

Definition 11.5 [α -投影表示的可约性与完全可约性]. 设 G 是群, V 是域 K 上的线性空间, α -投影表示 $\phi: G \rightarrow \text{GL}(V)$, 若 V 没有非平凡的不变子空间, 就称该表示不可约, 否则称为可约; 若 V 的每个不变子空间, 都有其对应的不变补空间, 则称该表示完全可约.

Theorem 11.1. 群 G 的完全可约 α -投影表示可以分解为不可约子表示的直和.

Proof. *Prop. 10.3, Thm. 10.1, Lem. 10.1* 的证明过程没用到表示的同态性, 这些结论可以直接迁移到 α -投影表示中. $\square$

Theorem 11.2 [Maschke 定理 (Maschke's theorem)]. 有限群 G 在特征不能整除 $|G|$ 的域 K 上的任意 α -投影表示均完全可约.

Proof. 设 (ϕ, V) 是 α -投影表示, 即 $\phi(g)\phi(h) = \alpha(g, h)\phi(gh)$. 令 $U \leq V$ 是不变子空间. 取任意线

11.1. 投影表示

性投影 $P_U: V \rightarrow U$, $\text{Im } P_U = U$. 与普通表示的证明相同, 定义平均化算子

$$B = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) P_U \phi(g)^{-1}.$$

由于 $\text{char } K \nmid |G|$, 上式有意义. 之后仿照 *Thm. 10.2* 的证明过程, 只需注意到所有的共轭操作, 投影因子 α 均会相互抵消, 所以最终可以得到 B 是投影算子, 从而 $V = \text{im } B \oplus \text{ker } B = U \oplus \text{ker } B$. $\square$

Theorem 11.3 [Schur 引理 (Schur's lemma)].

- **第一引理:** 设 $\sigma: V \rightarrow W$ 是群 G 的不可约 α, β -投影表示 (ϕ, V) 和 (ψ, W) 给出的投影表示等价类 $[\phi]$ 和 $[\psi]$ 之间的射影交结映射, 则 $[\phi] \stackrel{\sigma}{\sim} [\psi]$ 为线性同构当且仅当 $\sigma \neq 0$.
- **第二引理:** 设 (ϕ, V) 是代数闭域 K 上的有限维不可约 α -投影表示, 则任意严格自交结映射 $[\phi] \stackrel{\sigma}{\sim} [\phi]$ 均是数乘 $\sigma = k \cdot 1_V$, $k \in K$.

Proof. (1) 由射影交结关系 $\lambda(g)\psi(g) \circ \sigma = \sigma \circ \phi(g)$ 定义新的投影表示代表元 $\psi_\lambda(g) := \lambda(g)\psi(g)$. 则上式化为普通交结关系 $\psi_\lambda(g) \circ \sigma = \sigma \circ \phi(g)$, $\forall g \in G$. 又因为 $\psi_\lambda(g)$ 与 $\psi(g)$ 只相差非零标量, 所以它们有相同的不变子空间. 因此 (ψ_λ, W) 仍不可约. 于是 σ 是不可约投影表示 (ϕ, V) 与 (ψ_λ, W) 之间的普通交结映射. 与普通线性表示的情形完全相同, 有 $\text{Ker } \sigma$ 是 V 的不变子空间, 且 $\text{Im } \sigma$ 是 W 的不变子空间. 由不可约性知, 若 $\sigma \neq 0$, 则 $\text{Ker } \sigma = 0$, $\text{Im } \sigma = W$. 故 σ 是线性同构. 因此 $[\phi] \stackrel{\sigma}{\sim} [\psi]$.

(2) 由于 σ 是严格自交结映射, 有 $\sigma \circ \phi(g) = \phi(g) \circ \sigma$, $\forall g \in G$. 固定 α 后, (ϕ, V) 可视为扭曲群代数 $K_\alpha[G]$ 的左模, 其中 $g \cdot v := \phi(g)v$. 不可约 α -投影表示正是单 $K_\alpha[G]$ -模. 因此 $\sigma \in \text{End}_{K_\alpha[G]}(V)$. 由 *Thm. 7.6*, 因为 K 代数闭且 V 有限维, 得 $\text{End}_{K_\alpha[G]}(V) \cong K$. 因而存在 $k \in K$, 使得 $\sigma = k \cdot 1_V$. $\square$

Corollary 11.1 [Burnside 公式 (Burnside's formula)]. 设 G 是有限群, K 是代数闭域, 且 $\text{char } K \nmid |G|$. $V_1, \dots, V_r$ 是群 G 在 K 上的两两不可凭严格射影交结映射同构的全部不可约 α -投影表示空间的代表元, 则左正则 α -投影表示有分解

$$K_\alpha[G] \cong \bigoplus_{i=1}^r V_i^{\oplus \dim_K V_i}.$$

Chapter 11. 广义表示一瞥

换言之, 每个不可约 α -投影表示 V_i 在左正则投影表示中的重数恰等于 $\dim_K V_i$. 特别地,

$$|G| = \sum_{i=1}^r (\dim_K V_i)^2.$$

Proof. 又 α -投影表示 $\phi(g)\phi(h) = \alpha(g, h)\phi(gh)$ 等价于 $K_\alpha[G]$ 的左模, 其中 g -作用为 $\phi(g)$. 在条件 $\text{char } K \nmid |G|$ 下, 由 Maschke 定理 *Thm. 11.2*, $K_\alpha[G]$ 是有限维半单 K -代数. 因此将 *Cor. 7.2* 应用于 $A = K_\alpha[G]$, 得

$$K_\alpha[G] \cong \bigoplus_{i=1}^r V_i^{\oplus \dim_K V_i},$$

其中 $V_1, \dots, V_r$ 是全部两两不同构不可约 $K_\alpha[G]$ -左模代表元, 也即全部两两不同构不可约 α -投影表示代表元. 最后取 K -维数. 因为 $K_\alpha[G]$ 以 $\{g\}_{g \in G}$ 为一组 K -基, 所以 $\dim_K K_\alpha[G] = |G|$. 于是

$$|G| = \dim_K K_\alpha[G] = \sum_{i=1}^r \dim_K (V_i^{\oplus \dim_K V_i}) = \sum_{i=1}^r (\dim_K V_i)^2.$$

□

Lemma 11.1. 设 G 是有限群, 其有限维复 α -投影表示必有同射影交结映射等价的 α' -投影表示, 即 $[\alpha] = [\alpha']$, 使得其提供的表示矩阵么正.

Proof. 因为 G 有限, 对任意 $g \in G$, 由 $\phi(g)^{o(g)} = c_g 1_V$ 对某个 $c_g \in \mathbb{C}^\times$ 成立. 取 $\lambda(g) \in \mathbb{C}^\times$ 使得 $\lambda(g)^{o(g)} c_g$ 是单位复数. 定义 $\phi'(g) = \lambda(g)\phi(g)$. 则 ϕ' 仍是投影表示, 其乘子为

$$\alpha'(g, h) = \frac{\lambda(g)\lambda(h)}{\lambda(gh)} \alpha(g, h).$$

因此 $\alpha' = (d\lambda)\alpha$, 从而 $[\alpha'] = [\alpha] \in H^2(G, \mathbb{C}^\times)$.

下面说明可取 ϕ' 使得 α' 为 $U(1)$ -值. 对有限群 G , $H^2(G, \mathbb{C}^\times)$ 中的每个上同调类均可由取值为单位根的 2-上链表示. 因此, 对任意 $\alpha \in Z^2(G, \mathbb{C}^\times)$, 存在与其同调的 $\alpha' \in Z^2(G, U(1))$. 所以可在同调类内选取 $\alpha' \in Z^2(G, U(1))$. 于是我们只需证明 $U(1)$ -值乘子情形可么正化.

任取 V 上的 Hermite 内积 $(\cdot | \cdot)$, 定义平均内积

$$\langle v | w \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\phi'(g)v | \phi'(g)w).$$

11.1. 投影表示

对任意 $h \in G$, 有

$$\begin{aligned}\langle \phi'(h)v | \phi'(h)w \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\phi'(g)\phi'(h)v | \phi'(g)\phi'(h)w) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\alpha'(g, h)|^2 (\phi'(gh)v | \phi'(gh)w) .\end{aligned}$$

因为 $\alpha'(g, h) \in U(1)$, 所以 $|\alpha'(g, h)| = 1$. 又由重排定理 *Thm. 1.1*, $\{gh \mid g \in G\} = G$. 因此

$$\langle \phi'(h)v | \phi'(h)w \rangle = \langle v | w \rangle .$$

所以每个 $\phi'(h)$ 都关于该内积么正. 取该 *Hermite* 内积的一组标准正交基, 则所有 $\phi'(h)$ 的矩阵均为么正矩阵. $\square$

Theorem 11.4 [Schur 正交关系 (Schur orthogonality relations)]. 设 G 是有限群, (ϕ_i, V_i) 是其所有不严格等价的不可约复 α -投影表示代表元, $\alpha \in Z^2(G, U(1))$, (Φ_i, V_i) 是其提供的么正矩阵表示, 则

• 第一定理:

$$\left\langle \sqrt{\frac{\dim V_i}{|G|}} (\Phi_i)_{\mu\nu} \left| \sqrt{\frac{\dim V_j}{|G|}} (\Phi_j)_{\alpha\beta} \right. \right\rangle = \delta_{ij} \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta};$$

• 第二定理:

$$\frac{1}{|G|} \sum_i \dim V_i \operatorname{Tr} \left(\Phi_i^H(g) \Phi_i(h) \right) = \delta_{gh}.$$

Remark. 第二定理又叫做大正交定理 (*the Great Orthogonality Theorem*), 也有分量形式

$$\frac{1}{|G|} \sum_{i\mu\nu} \dim V_i \Phi_i^*(g)_{\mu\nu} \Phi_i(h)_{\mu\nu} = \delta_{gh}$$

Proof. $\square$

Theorem 11.5 [Schur 完备关系 (Schur completeness relation)]. 设 G 是有限群, (ϕ_i, V_i) 是其所有不严格等价的不可约复 α -投影表示代表元, $\alpha \in Z^2(G, U(1))$, (Φ_i, V_i) 是其提供的矩阵表示, 则 $\{(\Phi_i)_{\mu\nu}\}_{i\mu\nu}$ 在群函数空间 $\mathbb{C}^G$ 完备.

Chapter 11. 广义表示一瞥

Proof.

□

由此可知, $\left\{ \sqrt{\frac{\dim V_i}{|G|}} (\Phi_i)_{\mu\nu} \right\}_{i\mu\nu}$ 构成有限群 G 的群函数空间 $\mathbb{C}^G$ 的一组正交完备基, 考虑这组基的元素个数, 就重新得到了 Burnside 公式 **Cor. 11.1**. 和普通线性表示的情形完全一致, 不过要取规范化 $\alpha \in Z^2(G, U(1))$, 这在保证等价 (非严格等价) 的条件下是可以做到的.

Definition 11.6 [投影特征标 (projective character)]. 设 (ϕ, V) 是群 G 的有限维复 α -投影表示, 其中规范化 $\alpha \in Z^2(G, U(1))$, 定义其投影特征标为

$$\chi_\phi(g) := \text{Tr}(\phi(g)), \quad \forall g \in G.$$

当然可以定义更一般的特征标, 即面向情形 $\alpha \in Z^2(G, K^\times)$, 但若如此做会导致诸多问题. 因为在复数情形总可以找到非严格等价的 $U(1)$ -规范的 α , 所以干脆就如此定义了, 并没有损失本质一般性.

Definition 11.7 [α -类函数]. 设 G 是群, $f: G \rightarrow K$ 是群函数, K 是域, $\alpha \in Z^2(G, K^\times)$, 称 f 为 α -类函数, 若

$$f(hgh^{-1}) = \frac{\alpha(h, h^{-1})}{\alpha(h, gh^{-1})\alpha(g, h^{-1})} f(g) = \frac{\alpha(h, h^{-1})}{\alpha(h, g)\alpha(hg, h^{-1})} f(g).$$

显然, 当 $\alpha = 1$ 时, 回归普通类函数. 定义中的系数看着很奇怪, 实际上是因为 hgh^{-1} 有两种结合方式, $h(gh^{-1})$ 和 $(hg)h^{-1}$, 两种情况分别给出 $\alpha(h, gh^{-1})\alpha(g, h^{-1})$ 和 $\alpha(h, g)\alpha(hg, h^{-1})$. 定义要求两种系数相等是考虑到 α 是闭链, 服从结合律.

Proposition 11.2. 设 G 是群, 规范化 $\alpha \in Z^2(G, U(1))$, 则:

- 投影特征标是类函数;
- G 的两个有限维半单 α -投影表示严格等价当且仅当它们提供的投影特征标相等;
- 设 χ 是 α -投影特征标, 则 $\chi(g^{-1}) = \chi^*(g)$.

Proof.

□

11.2. 共表示

Theorem 11.6 [Schur 正交关系 (Schur orthogonality relations)]. 设 G 是有限群, (ϕ_i, V_i) 是其所有不严格等价的不可约复 α -投影表示代表元, $\alpha \in Z^2(G, U(1))$, χ_i 是 ϕ_i 提供的投影特征标, $[g] \equiv \text{Cl}(g)$ 表示 g 的共轭等价类, 则

• 第一定理:

$$\left\langle \sqrt{\frac{1}{|G|}} \chi_i \middle| \sqrt{\frac{1}{|G|}} \chi_j \right\rangle = \delta_{ij};$$

• 第二定理:

$$\frac{1}{|G|} \sum_i \chi_i^*([g]) \chi_i([h]) = \delta_{[g][h]}.$$

Proof.

□

Theorem 11.7 [Schur 完备关系 (Schur completeness relation)]. 设 G 是有限群, (ϕ_i, V_i) 是其所有不严格等价的不可约复 α -投影表示代表元, χ_i 是 ϕ_i 提供的投影特征标, 则 $\{\chi_i\}_i$ 在类函数空间 $Cf_{\mathbb{C}}(G)$ 中完备.

Proof.

□

最后看看投影表示的直和与直积.

Proposition 11.3. 设群 G 有的 α -投影表示 ϕ 和 ψ , 则

- $\chi_{\phi \oplus \psi} = \chi_{\phi} + \chi_{\psi};$
- $\chi_{\phi \otimes \psi} = \chi_{\phi} \chi_{\psi}.$

Proof.

□

11.2 共表示

称复线性空间 V 上的算符 A 反线性, 若 $A(\mu|\phi\rangle + \nu|\psi\rangle) = \mu^* A|\phi\rangle + \nu^* A|\psi\rangle$, $\forall \mu, \nu \in \mathbb{C}$, $\forall |\phi\rangle, |\psi\rangle \in V$; 称 A 反幺正, 若其反线性且 $\langle A\psi | A\phi \rangle = \overline{\langle \psi | \phi \rangle} = \langle \phi | \psi \rangle$, 此处 $\overline{\langle \cdot | \cdot \rangle}$ 表示取复共轭; $\text{GL}_{\mathbb{R}}(V) := \{T : V \rightarrow V \mid T \text{ 是 } \mathbb{R}\text{-线性同构}\}.$

Chapter 11. 广义表示一瞥

Definition 11.8 [共表示 (corepresentation)]. 设 G 是群, $H \leq G$ 作为子群指数为 2, 其有陪集 $G - H$, 设 V 是复线性空间, 所谓共表示指的是同态 $\phi : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{R}}(V)$, 满足 $\phi(h)$ 是复线性算子, $\forall h \in H$, $\phi(a)$ 是反线性算子, $\forall a \in G - H$.

V 作为复线性空间, 其 $\mathbb{R}$ -线性同构作何理解? 假若 $V \cong \mathbb{C}^n$, 那么作为复线性空间自然有 $\dim_{\mathbb{C}} V = n$. 但是, 作为实线性空间, $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$, 即 $V \cong \mathbb{R}^{2n}$, 从而 $\text{GL}_{\mathbb{R}}(V) \cong \text{GL}_{2n}(V)$.

Example. 设 $z = x + iy$, 定义复共轭算符 $\mathcal{K}$, 显然其反线性, 因为 $\mathcal{K}z = x - iy$, 因而其表示矩阵为

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}.$$

Example 28 [量子力学对称性]. 时间反演对称性是量子力学中的一种十分特殊的对称性, 其必须表示为反线性操作. 考虑位置表象下的动量算符 $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$, 由时间反演对称性的定义 $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$, $\mathbf{p} \mapsto -\mathbf{p}$, 我们知道必然有 $(\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla) \mapsto (-\hat{\mathbf{p}} = i\hbar\nabla)$, 则将推出

$$i \mapsto -i.$$

这说明时间反演对称性必然反线性. 设系统 Hamilton 量 $\hat{H}$ 不显含时间, 则时间演化算符为 $\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$. 设 $\mathcal{T}$ 是时间反演算符的形式化定义为使得 $\mathcal{T}\hat{U}(t)\mathcal{T}^{-1} = \hat{U}(-t)$ 的反么正算符 (反么正是额外配有保转移概率的物理要求). 时间反演对称性常表达为「反向演化的态依旧是 Schrödinger 方程的解」, 即

$$(\mathcal{T}|\psi(-t)\rangle) = \hat{U}(t)(\mathcal{T}|\psi(0)\rangle),$$

即 $\mathcal{T}|\psi(-t)\rangle$ 亦是解. 试证明上式.

Proof. 不显含时间的 Hamilton 量的 Schrödinger 方程的形式解为

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle.$$

把 $t \mapsto -t$, 然后两边乘以 $\mathcal{T}$, 并在右侧式中间插入 $\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}$, 则

$$(\mathcal{T}|\psi(-t)\rangle) = (\mathcal{T}\hat{U}(-t)\mathcal{T}^{-1})(\mathcal{T}|\psi(0)\rangle) = \hat{U}(t)(\mathcal{T}|\psi(0)\rangle),$$

最后一步用到了 $\mathcal{T}$ 的定义. □

11.2. 共表示

Definition 11.9 [共表示等价]. 设 G 是群, (ϕ, V) 和 (ψ, W) 是 G 的共表示, 称它们是等价的, 如果它们凭交结映射 $\sigma : V \rightarrow W$ 同构, 即 $\psi(g) \circ \sigma = \sigma \circ \phi(g), \forall g \in G$, 此处交结映射为复线性映射.

若在选定基下, 对 $a \in G - H$ 将反线性算子写作 $\phi(a) = A(a)\mathcal{K}$, 这里 $A(a)$ 是 $\mathbb{C}$ -线性同构, $\mathcal{K}$ 为复共轭算子, 则共表示等价的矩阵形式为 $\Psi(h) = \sigma\Phi(h)\sigma^{-1}, h \in H$, 以及 $B(a) = \sigma A(a)\sigma^{*-1}, a \in G - H$. 这里 σ^* 表示逐项复共轭矩阵.

Definition 11.10 [共表示的可约性和完全可约性]. 设 G 是群, 共表示 $\phi : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{R}}(V)$, 若 V 没有非平凡的复不变子空间, 就称该表示不可约, 否则称为可约; 若 V 的每个不变子空间, 都有其对应的不变补空间, 则称该表示完全可约.

Theorem 11.8. 群 G 的完全共表示可以分解为不可约子表示的直和.

Proof. 理由同 *Thm. 11.1* 一致. □

Theorem 11.9 [Maschke 定理 (Maschke's theorem)]. 有限群 G 的任意共表示均完全可约.

Proof. 沿用普通线性表示 *Maschke* 定理 *Thm. 10.2* 的平均化证明. 对不变复子空间 $U \leq V$, 取复线性投影 $P_U : V \rightarrow U$, 并定义

$$B = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g)P_U\phi(g)^{-1}.$$

唯一需要额外说明的是 B 的复线性. 若 $g \in H$, 则 $\phi(g)P_U\phi(g)^{-1}$ 是复线性的; 若 $g \in G - H$, 则 $\phi(g)$ 与 $\phi(g)^{-1}$ 均反线性, 故 $\phi(g)P_U\phi(g)^{-1}$ 仍是复线性的. 因此 B 是复线性算子. 其余步骤与普通表示情形完全一致, 最终有 $V = U \oplus \text{Ker } B$. □

Theorem 11.10 [Schur 引理 (Schur's lemma)].

- **第一引理:** 设 $\sigma : V \rightarrow W$ 是群 G 的不可约共表示 (ϕ, V) 和 (ψ, W) 之间的交结映射, 则 $\phi \stackrel{\sigma}{\sim} \psi$ 为线性同构当且仅当 $\sigma \neq 0$.
- **第二引理:** 设 (ϕ, V) 是群 G 的不可约共表示, 则其自交结代数 $\text{End}_G^{\mathbb{C}}(V)$ 是除环; 若 V 有限, 则 $\text{End}_G^{\mathbb{C}}(V)$ 同构于 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ 其一.

Chapter 11. 广义表示一瞥

Remark. $\text{End}_G(V)$ 在共表示情形下一般不是 $\mathbb{C}$ -代数, 只是 $\mathbb{R}$ -代数. 原因在于代数上的模兼容线性结构, 即代数对模的作用是线性的, 不可以是反线性的, 而共表示若视作 $\mathbb{C}$ -代数则无法做到这点, 只得以视作 $\mathbb{R}$ -代数. 所以共表示 Schur 第二引理不与模论 Schur 第二引理 [Thm. 7.6](#) 冲突.

Proof.

□

Definition 11.11 [交叉积代数 (crossed product algebra)]. 设 G 是有限群, $H \leq G$ 作为子群指数为 2, 定义交叉积代数为实代数 $\mathcal{A}(G, H) := \mathbb{C} \rtimes_c G$ 如下: 作为实向量空间

$$\mathcal{A}(G, H) = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{C} |g\rangle,$$

配以乘法

$$(z |g_1\rangle) \cdot (w |g_2\rangle) = z c_{g_1}(w) |g_1 g_2\rangle,$$

其中

$$c_{g_1}(w) = \begin{cases} w, & g_1 \in H, \\ w^*, & g_1 \in G - H, \end{cases}$$

则 $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{A}(G, H) = 2|G|$.

Corollary 11.2 [Burnside 公式 (Burnside's formula)]. 设 G 是有限群, 设 $V_1, \dots, V_r$ 是群 G 的两两不同构的全部不可约共表示空间的代表元, $\phi_1, \dots, \phi_i$ 各自为其上不等价的共表示, 则交叉积代数有分解

$$\mathcal{A}(G, H) \cong \bigoplus_{i=1}^r V_i^{\oplus (\dim_{\mathbb{R}} V_i / \dim_{\mathbb{R}} \text{End}_G^{\mathbb{R}}(V_i))},$$

这里 $\text{End}_G^{\mathbb{R}}(V_i) := \{\sigma \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V_i) \mid \phi_i \stackrel{\sigma}{\sim} \phi_i\}$. 两边同时取 $\dim_{\mathbb{R}}$ 得到

$$2|G| = \sum_{i=1}^r \frac{(\dim_{\mathbb{R}} V_i)^2}{\dim_{\mathbb{R}} \text{End}_G^{\mathbb{R}}(V_i)},$$

并有

$$|G| = \sum_{\text{End}_{\mathbb{R}}(V_i) \cong \mathbb{R}} 2(\dim_{\mathbb{C}} V_i)^2 + \sum_{\text{End}_{\mathbb{R}}(V_i) \cong \mathbb{C}} (\dim_{\mathbb{C}} V_i)^2 + \sum_{\text{End}_{\mathbb{R}}(V_i) \cong \mathbb{H}} \frac{1}{2} (\dim_{\mathbb{C}} V_i)^2.$$

11.2. 共表示

Proof.

□

反么正算符 A 的「矩阵表示」通常不是单独的一个复矩阵, 因为只有一个复矩阵是复线性的. 故常实现为 $A = UK$, 其中 U 是一个复矩阵, K 是共轭算符. 在选定 V 的一组复的正交归一基后, 可以写 $\Phi(h) = D(h), \forall h \in H$, 其中 $D(h)$ 是复矩阵; 对于反线性元素 $a \in G-H$, 则 $\Phi(a) = D(a)K$, 其中 $D(a)$ 也是复矩阵. 我们使用

$$s(g) = \begin{cases} 0, & g \in H, \\ 1, & g \in G-H, \end{cases}$$

来统一表达 $\Phi(g) = D(g)K^{s(g)}$. 于是 Φ 的同态性给出矩阵部分满足

$$D(gh) = D(g)c_g(D(h)).$$

其中

$$c_g(D(h)) = \begin{cases} D(h), & g \in H, \\ D(h)^*, & g \in G-H. \end{cases}$$

证明如下: $\Phi(g)\Phi(h) = D(g)K^{s(g)}D(h)K^{s(h)} = D(g)c_g(D(h))K^{s(g)+s(h)}$, 而 $\Phi(g)\Phi(h) = \Phi(gh) = D(gh)K^{s(gh)}$, 并且 $s(g) + s(h) = s(gh)$. 我们称这样的表示为**矩阵共表示**, 其不是矩阵表示, 搭配着 K 却很像矩阵表示.

Lemma 11.2. 设 G 是有限群, $H \leq G$ 作为子群指数为 2, G 的有限维共表示必能提供矩阵么正-反么正共表示.

Remark. 矩阵么正-反么正共表示指的是作为矩阵共表示, 其矩阵部分是么正的.

Proof.

□

Theorem 11.11 [Schur 正交关系 (Schur orthogonality relations)]. 设 G 是有限群, $H \leq G$ 作为子群指数为 2, (ϕ_i, V_i) 是其所有不等价不可约共表示代表元, (Φ_i, V_i) 是其提供的矩阵么正-反么正共表示, D_i 是其的矩阵部分, 定义 $\left((D_i)_{\mu\nu} \middle| (D_j)_{\alpha\beta}\right) := \sum_{h \in H} D_i^*(h)_{\mu\nu} D_j(h)_{\alpha\beta} +$

$\sum_{a \in G-H} D_i^*(a)_{\mu\beta} D_j(a)_{\alpha\nu}$, 则

• **第一定理:** 当 $i \neq j$, 有

$$\sum_{h \in H} D_i^*(h)_{\mu\nu} D_j(h)_{\alpha\beta} = \sum_{a \in G-H} D_i^*(a)_{\mu\beta} D_j(a)_{\alpha\nu} = 0;$$

Chapter 11. 广义表示一瞥

且

$$\left(\sqrt{\frac{\dim_{\mathbb{C}} V_i}{|G|}} (D_i)_{\mu\nu} \middle| \sqrt{\frac{\dim_{\mathbb{C}} V_j}{|G|}} (D_j)_{\alpha\beta} \right) = \delta_{ij} \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta};$$

• 第二定理:

$$\frac{1}{|G|} \sum_i \frac{2 \dim_{\mathbb{C}} V_i}{\dim_{\mathbb{R}} \text{End}_G^{\mathbb{R}}(V_i)} \delta_{s(g)s(h)} \text{Tr} \left(D_i(g)^H D_i(h) \right) = \delta_{gh}.$$

Remark. 第二定理的分量形式即大正交定理 (*the Great Orthogonality Theorem*),

$$\frac{1}{|G|} \sum_{i\mu\nu} \frac{2 \dim_{\mathbb{C}} V_i}{\dim_{\mathbb{R}} \text{End}_G^{\mathbb{R}}(V_i)} \delta_{s(g)s(h)} D_i^*(g)_{\mu\nu} D_i(h)_{\mu\nu} = \delta_{gh}.$$

Proof.

□

Theorem 11.12 [Schur 完备关系 (Schur completeness relation)]. 设 G 是有限群, (ϕ_i, V_i) 是其所有不等价不可约共表示代表元, (Φ_i, V_i) 是其提供的矩阵么正-反么正共表示, D_i 是其矩阵部分,

Definition 11.12 [共表示特征标 (corepresentation character)]. 设 G 是群, $H \leq G$ 作为子群指数为 2, (ϕ, V) 是共表示, 其共表示特征标是定义在 H 上的函数

$$\chi_{\phi}(h) := \text{Tr}(\phi(h)), \quad \forall h \in H.$$

可见 χ_{ϕ} 是 H -类函数, 不是 G -类函数

共表示的特征标「仅在」么正元素上定义, 非么正的元素无法良定义迹, 因为其「表示矩阵」在基底变换下不再是通常的么正变换:

$$\Phi(a) \mathcal{K} \mapsto U \Phi(a) U^{*-1} \mathcal{K} = U \Phi(a) U^T \mathcal{K}.$$

Proposition 11.4. 设 G 是群, $H \leq G$ 作为子群指数为 2, (ϕ, V) 是共表示, χ_{ϕ} 是其共表示特

11.2. 共表示

征标, 则 $\chi_\phi(ghg^{-1}) = c_g(\chi_\phi(h))$, 其中

$$c_g(\chi_\phi(h)) = \begin{cases} \chi_\phi(h), & g \in H, \\ \chi_\phi^*(h), & g \in G - H. \end{cases}$$

Proof.

□

Definition 11.13 [C-类 (C-class)]. 设 G 是群, $H \leq G$ 作为子群指数为 2. 对 $h_1, h_2 \in H$, 称 $h_1 \sim_C h_2$, 若存在 $x \in H$ 使 $h_1 = xh_2x^{-1}$, 或存在 $a \in G - H$ 使 $h_1 = ah_2^{-1}a^{-1}$. 定义 C -类函数空间

$$\text{Class}_C(H) = \{f : H \rightarrow \mathbb{C} \mid h_1 \sim_C h_2 \Rightarrow f(h_1) = f(h_2)\}.$$

记 h 的 C -等价类为 $[h]_C$.

Proposition 11.5. 设 G 是群, $H \leq G$ 作为子群指数为 2, (ϕ, V) 是共表示, χ_ϕ 是其共表示特征标, 则 $\chi_\phi \in \text{Class}_C(H)$ 即其为 C -类函数.

Proposition 11.6. 群 G 的两个有限维共表示等价, 当且仅当它们提供的共表示特征标相等.

Theorem 11.13 [Schur 正交关系 (Schur orthogonality relations)]. 设 G 是有限群, $H \leq G$ 作为子群指数为 2, (ϕ_i, V_i) 是其所有不等价不可约共表示代表元, χ_i 是 ϕ_i 提供的共表示特征标, 约定 $\chi_i^*(a)\chi_j(a) = \chi_i(a^2)\delta_{ij}$, $\forall a \in G - H$, 定义 $(\chi_i|\chi_j) := \sum_{h \in H} \chi_i^*(h)\chi_j(h)$, 则

• 第一定理:

$$\left\langle \sqrt{\frac{1}{|G|}}\chi_i \middle| \sqrt{\frac{1}{|G|}}\chi_j \right\rangle = \delta_{ij}, \quad \left(\sqrt{\frac{1}{|H| \dim_{\mathbb{R}} \text{End}_G^{\mathbb{R}}(V_i)}}\chi_i \middle| \sqrt{\frac{1}{|H| \dim_{\mathbb{R}} \text{End}_G^{\mathbb{R}}(V_j)}}\chi_j \right) = \delta_{ij};$$

• 第二定理:

$$\frac{1}{|H|} \sum_i \frac{1}{\dim_{\mathbb{R}} \text{End}_G^{\mathbb{R}}(V_i)} \chi_i^*([g]_C) \chi_i([h]_C) = \delta_{[g][h]}, \quad \forall g, h \in H.$$

Chapter 11. 广义表示一瞥

Note. $\chi_i([h]_C) = \frac{1}{\sqrt{|[h]_C|}} \sum_{h \in [h]_C} \chi_i(h) = \sqrt{|[h]_C|} \chi_i(h).$

Corollary 11.3. 设 G 是群, $H \leq G$ 作为子群指数为 2, χ 是共表示 (ϕ, V) 的特征标, 则

- 若 $\text{End}_G^{\mathbb{R}}(V) \cong \mathbb{R}$, 则

$$\sum_{h \in H} |\chi(h)|^2 = \sum_{a \in G-H} \chi(a^2) = \frac{1}{2} |G|;$$

- 若 $\text{End}_G^{\mathbb{R}}(V) \cong \mathbb{H}$, 则

$$\sum_{h \in H} |\chi(h)|^2 = 2|G|, \quad \sum_{a \in G-H} \chi(a^2) = -|G|;$$

- 若 $\text{End}_G^{\mathbb{R}}(V) \cong \mathbb{C}$, 则

$$\sum_{h \in H} |\chi(h)|^2 = |G|, \quad \sum_{a \in G-H} \chi(a^2) = 0.$$

Proof.

□

Theorem 11.14 [Schur 完备关系 (Schur completeness relation)]. 设 G 是群, $H \leq G$ 作为子群指数为 2, (ϕ_i, V_i) 是其所有不等价不可约共表示, χ_i 为其提供的特征标, 则 $\{\chi_i\}_i$ 在 G 的 C -类函数空间完备.

可见 $\left\{ \sqrt{\frac{1}{|H| \dim_{\mathbb{R}} \text{End}_G^{\mathbb{R}}(V_i)}} \chi_i \right\}_i$ 构成 C -函数空间的完备正交基.

Proposition 11.7. 设 G 是群, $H \leq Q$ 作为子群指数为 2, ϕ 和 ψ 是其共表示, Φ 和 Ψ 是它们提供的矩阵表示, D 和 E 是它们的矩阵部分, 则

- $\chi_{\phi \oplus \psi} = \chi_{\phi} + \chi_{\psi};$
- $\chi_{\phi \otimes \psi} = \chi_{\phi} \chi_{\psi}.$

11.2. 共表示

Example 29. 设 G 是一个含非幺正元素的群, 且 $K \in G$, 幺正子群为 H , 非幺正陪集为 $A = G - H$, 那么任意的 $a \in A$, 总能有唯一的 $h \in H$, 使得 $a = hK$. 定义扭曲的交叉群代数 $\mathbb{C}_s^\omega[G]$, 满足

$$(z|g_1\rangle) \cdot (w|g_2\rangle) = z c_{g_1}(w) \omega(g_1, g_2) |g_1 g_2\rangle, \quad |g\rangle z = c_g(z) |g\rangle,$$

其中 $\omega \in H^2(G, U(1)_s)$, s 是 $Z(2)$ -分级, $s(g) = 1$, 若 $g \in A$, 0 , 若 $g \in H$, $U(1)_s$ 表示「 G 通过 s 作用于 $U(1)$ 」, 而不是原先的平凡作用——最终结果导致 2-上闭链条件和 2-上边界均不同:

$$\omega(g, h) \omega(gh, k) = \omega(g, hk) c_g(\omega(h, k)), \quad (d_s \lambda)(g, h) = c_g(\lambda(h)) \lambda(gh)^{-1} \lambda(g),$$

证明上两式.

Remark. 该代数可用于表达存在时间反演对称性的 *Fermi* 子系统.

Proof. 先证明 2-上闭链条件. 由定义, $(z|g\rangle)(w|h\rangle) = z c_g(w) \omega(g, h) |gh\rangle$. 其中这个 c_g 正是 G 在 $U(1)_s$ 上的作用. 特别地, 若 g 是非幺正元素, 则它对复相位取共轭. 这种带反幺正元素的投影表示正对应带扭曲系数的 2-上闭链条件. $|g\rangle|h\rangle = \omega(g, h) |gh\rangle$. 由结合律 $(|g\rangle|h\rangle)|k\rangle = |g\rangle(|h\rangle|k\rangle)$ 得到左边

$$(|g\rangle|h\rangle)|k\rangle = (\omega(g, h) |gh\rangle)|k\rangle = \omega(g, h) \omega(gh, k) |ghk\rangle.$$

而右边为

$$|g\rangle(|h\rangle|k\rangle) = |g\rangle(\omega(h, k) |hk\rangle) = c_g(\omega(h, k)) \omega(g, hk) |ghk\rangle.$$

比较两边系数, 得

$$\omega(g, h) \omega(gh, k) = \omega(g, hk) c_g(\omega(h, k)).$$

这就是 $U(1)_s$ -值的 2-上闭链条件. 再证明 2-上边界公式. 设 $\lambda: G \rightarrow U(1)$ 是一个 1-上链. 对基元作规范变换 $|g\rangle' = \lambda(g) |g\rangle$. 则

$$|g\rangle' |h\rangle' = (\lambda(g) |g\rangle)(\lambda(h) |h\rangle) = \lambda(g) c_g(\lambda(h)) \omega(g, h) |gh\rangle.$$

又因为 $|gh\rangle' = \lambda(gh) |gh\rangle$, 即 $|gh\rangle = \lambda(gh)^{-1} |gh\rangle'$. 所以

$$|g\rangle' |h\rangle' = \lambda(g) c_g(\lambda(h)) \lambda(gh)^{-1} \omega(g, h) |gh\rangle'.$$

因此新因子系为 $\omega'(g, h) = (d_s \lambda)(g, h) \omega(g, h)$, 其中

$$(d_s \lambda)(g, h) = c_g(\lambda(h)) \lambda(gh)^{-1} \lambda(g).$$

这就是 s -扭曲的 2-上边界公式. □

11.3 实表示

实表示专指 $\mathbb{R}$ 为域的表示, 严格说来是线性表示. 本节研究其与复表示、共表示之间的关系.

我们说, 一个表示 (ϕ, V) 的对偶表示 (ϕ^*, V^*) 同构于自己, 称为**自对偶表示**. 我们定义 (ϕ, V) 上的双线性函数 $B(\cdot, \cdot)$, 若对任意的 $x, y \in V$, 均有 $B(\phi(g)x, \phi(g)y) = B(x, y), \forall g \in G$.

Proposition 11.8. 群 G 线性表示 (ϕ, V) 自对偶当且仅当存在其的非退化不变双线性函数.

Proof. 记对偶表示为 (ϕ^*, V^*) , 其中 $(\phi^*(g)f)(v) = f(\phi(g^{-1})v), f \in V^*, v \in V$. 先设 (ϕ, V) 自对偶. 则存在 G -模同构 $T: V \rightarrow V^*$, 即 $T \circ \phi(g) = \phi^*(g) \circ T, \forall g \in G$. 定义双线性函数 $B: V \times V \rightarrow k, B(v, w) := T(v)(w)$. 因为 T 是线性映射, 故 B 是双线性的. 又因为 T 是同构, 所以 B 非退化. 事实上, 若 $B(v, w) = 0, \forall w \in V$, 则 $T(v) = 0$, 从而 $v = 0$; 由于 V 有限维, 这等价于 B 非退化. 下面证明 B 是 G -不变的. 对任意 $g \in G$ 与 $v, w \in V$, 有

$$\begin{aligned} B(\phi(g)v, \phi(g)w) &= T(\phi(g)v)(\phi(g)w) = (\phi^*(g)T(v))(\phi(g)w) \\ &= T(v)(\phi(g^{-1})\phi(g)w) = T(v)(w) = B(v, w). \end{aligned}$$

因此 B 是非退化的 G -不变双线性函数. 反过来, 设 V 上存在非退化的 G -不变双线性函数 $B: V \times V \rightarrow k$. 由 B 定义线性映射 $T_B: V \rightarrow V^*, T_B(v)(w) := B(v, w)$. 因为 B 非退化, 所以 T_B 是同构. 只需证明 T_B 是 G -等变的. 对任意 $g \in G$ 与 $v, w \in V$, 一方面 $(T_B(\phi(g)v))(w) = B(\phi(g)v, w)$. 另一方面

$$((\phi^*(g)T_B(v))(w)) = T_B(v)(\phi(g^{-1})w) = B(v, \phi(g^{-1})w).$$

由 G -不变性, 对 $w = \phi(g)u$ 有 $B(\phi(g)v, \phi(g)u) = B(v, u)$. 令 $u = \phi(g^{-1})w$, 得 $B(\phi(g)v, w) = B(v, \phi(g^{-1})w)$. 因此 $T_B(\phi(g)v) = \phi^*(g)T_B(v), \forall g \in G, v \in V$. 即 $T_B \circ \phi(g) = \phi^*(g) \circ T_B$. 所以 $T_B: V \rightarrow V^*$ 是 G -模同构, 从而 (ϕ, V) 自对偶. $\square$

Proposition 11.9. 若群 G 的复线性表示 (ϕ, V) 不可约. 则其任意非退化不变双线性函数至多相差非零的常的复系数.

Proof. 设 $B_1, B_2: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ 是两个非退化的 G -不变双线性函数. 由 B_i 定义线性同构 $T_i: V \rightarrow V^*, T_i(v)(w) := B_i(v, w)$. 由 G -不变性可知 T_i 是 G -模同态, 即 $T_i \circ \phi(g) = \phi^*(g) \circ T_i, \forall g \in G$. 因此 $A := T_1^{-1}T_2: V \rightarrow V$ 是 G -模自同态. 由于 V 是复不可约表示, 由 Schur 引理 Thm. 10.3, $A = \lambda \text{id}_V$ 对某个 $\lambda \in \mathbb{C}$. 又因为 T_2 是同构, 故 $\lambda \neq 0$. 于是 $T_2 = T_1 A = \lambda T_1$. 对任意 $v, w \in V$, 有

$$B_2(v, w) = T_2(v)(w) = \lambda T_1(v)(w) = \lambda B_1(v, w).$$

故 $B_2 = \lambda B_1$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. $\square$

11.3. 实表示

Corollary 11.4. 群 G 的不可约复线性表示 (ϕ, V) 的非退化不变双线性函数要么对称, 要么反对称.

Proof. 设 $B: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ 是一个非退化的 G -不变双线性函数. 定义 $B^T(v, w) := B(w, v)$. 由于 B 是 G -不变的, 对任意 $g \in G$ 有

$$B^T(\phi(g)v, \phi(g)w) = B(\phi(g)w, \phi(g)v) = B(w, v) = B^T(v, w),$$

故 B^T 也是 G -不变双线性函数. 又因为 B 非退化, B^T 也非退化. 由前一命题, 任意两个非退化不变双线性函数至多相差非零复常数倍, 故存在 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ 使得 $B^T = \lambda B$. 再转置一次, 得

$$B = (B^T)^T = \lambda B^T = \lambda^2 B.$$

因为 $B \neq 0$, 所以 $\lambda^2 = 1$. 因此 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$. 若 $\lambda = 1$, 则 $B(w, v) = B(v, w)$, 即 B 对称. 若 $\lambda = -1$, 则 $B(w, v) = -B(v, w)$, 即 B 反对称. $\square$

我们凭借不变双线性函数做如下分类: 考虑 G 的复线性自对偶表示 (ϕ, V) , 其给出一列至多相差非零常数的复系数的非退化不变双线性函数, 它们

- 若对称, 称该表示为**实类型 (real type)**;
- 若反对称, 称该表示为**赝实类型 (pseudoreal type)**.

另外, 若 (ϕ, V) 不是自对偶的, 即没有不变双线性函数, 称其为**复类型 (complex type)**.

定义复不可约表示 (ϕ, V) 的共轭表示 $(\bar{\phi}, \bar{V})$, 其中 $\bar{V}$ 表示**共轭线性空间**, 意思是对原线性空间 V 逐项取系数的复共轭. 在选定基底后, $\bar{\phi}$ 给出的矩阵表示是 ϕ 给出的矩阵表示的共轭.

Proposition 11.10. 设 (ϕ, V) 是有限群 G 的复不可约表示, 则

- 若 ϕ 是实类型, 则 V 有 $\mathbb{R}$ 上的实现, 即存在基底使得 ϕ 给出的矩阵表示均为实矩阵, $\dim_{\mathbb{R}} U = \dim_{\mathbb{C}} V$;
- 若 ϕ 是复类型, 则存在实不可约表示 (ψ, U) 使得 $U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong V \oplus \bar{V}$, $\dim_{\mathbb{R}} U = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$;
- 若 ϕ 是赝实类型, 则存在实不可约表示 (ψ, U) 使得 $U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong V \oplus V$, $\dim_{\mathbb{R}} U = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$.

Proof. 因为 G 是有限群, 故可在 V 上取 G -不变 *Hermitian* 内积. 因此对偶表示与共轭表示同构: $V^* \cong \bar{V}$. 于是自对偶性 $V \cong V^*$ 等价于自共轭性 $V \cong \bar{V}$. 我们使用如下等价刻画: 若 V 是复不可约表示, 则

$$V \text{ 为实类型} \iff \text{存在反线性 } G\text{-等变映射 } J: V \rightarrow V, J^2 = 1;$$

Chapter 11. 广义表示一瞥

V 为赓实类型 $\iff$ 存在反线性 G -等变映射 $J: V \rightarrow V$, $J^2 = -1$;

而复类型等价于 $V \not\cong \bar{V}$. 若 V 是实类型, 取反线性 G -等变映射 $J: V \rightarrow V$, $J^2 = 1$. 令 $U := V^J = \{v \in V: Jv = v\}$. 则 U 是实向量空间. 因为 J 与 G 的作用可交换, U 是 G -不变的, 从而得到实表示 $\psi: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{R}}(U)$. 由实结构的一般性质, 有自然的复线性同构 $U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong V$. 因为 V 是复不可约的, U 必为实不可约. 否则若存在非零真 G -不变实子空间 $0 \neq W \subseteq U$, 则 $W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \subseteq U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong V$ 是非零真复 G -不变子空间, 矛盾. 因此 $\dim_{\mathbb{R}} U = \dim_{\mathbb{C}} V$. 若 V 是复类型, 即 $V \not\cong \bar{V}$, 取 $U := V_{\mathbb{R}}$, 即将 V 忘掉复数乘法, 只看成实向量空间. 这给出实表示 (ψ, U) . 对任意复线性空间 V , 有标准同构 $V_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong V \oplus \bar{V}$. 因此 $U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong V \oplus \bar{V}$. 下面证明 U 实不可约. 若 $0 \neq W \subseteq U$ 是实 G -不变子空间, 则其复线性张成 $W + iW \subseteq V$ 是非零复 G -不变子空间. 由于 V 复不可约, 必有 $W + iW = V$. 若 $W \neq U$, 则必须有 $W \cap iW = 0$, 从而 $V = W \oplus iW$. 这给出一个反线性 G -等变映射 $J(w + iw') = w - iw'$, $w, w' \in W$, 且 $J^2 = 1$. 于是 $V \cong \bar{V}$, 与复类型矛盾. 故只能有 $W = U$. 因此 U 是实不可约表示. 于是 $\dim_{\mathbb{R}} U = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$. 若 V 是赓实类型, 仍取 $U := V_{\mathbb{R}}$. 因为赓实类型满足 $V \cong \bar{V}$, 所以

$$U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong V \oplus \bar{V} \cong V \oplus V.$$

下面证明 U 实不可约. 若 $0 \neq W \subseteq U$ 是实 G -不变子空间, 则同样有 $W + iW = V$. 若 $W \neq U$, 则 $V = W \oplus iW$, 从而得到一个反线性 G -等变映射 $J_0(w + iw') = w - iw'$, $J_0^2 = 1$. 这说明 V 有实结构, 即 V 为实类型. 但赓实类型的反线性 G -等变结构满足平方为 -1 , 不可能同时存在平方为 1 的实结构. 事实上, 若二者同时存在, 由 *Schur* 引理可推出相应不变双线性型既为对称又为反对称, 矛盾. 因此 $W = U$, U 实不可约. 故在赓实类型下, $U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong V \oplus V$, $\dim_{\mathbb{R}} U = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$. $\square$

现在, 我们考虑如何区分实表示和赓实表示.

Definition 11.14 [Schur–Frobenius 指标 (Schur–Frobenius indicator)]. 设 (ϕ, V) 是有限群 G 的不可约复表示, 定义

$$S(\phi) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\phi}(g^2),$$

称为该表示的 **Schur–Frobenius 指标**.

Theorem 11.15. 设 (ϕ, V) 是有限群 G 的不可约复表示, $S(\phi)$ 是其 *Schur–Frobenius* 指标, 则

- $S(\phi) = 0$, 当且仅当 ϕ 无非退化双线性函数, 即 ϕ 是复类型;
- $S(\phi) = 1$, 当且仅当 ϕ 有对称非退化不变双线性, 即 ϕ 是实类型;
- $S(\phi) = -1$, 当且仅当 ϕ 有反对称非退化不变双线性, 即 ϕ 是赓实类型.

11.3. 实表示

Proof. 记 $\chi = \chi_\phi$. 首先, V 上的双线性函数可看作 $V \otimes_{\mathbb{C}} V \longrightarrow \mathbb{C}$, 即 $(V^* \otimes V^*)^G$. 因此不变双线性函数空间为 $(V^* \otimes V^*)^G \cong \text{Hom}_G(V, V^*)$. 由 Schur 引理 *Thm. 10.3*, 因为 V 不可约, 所以

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(V, V^*) = \begin{cases} 1, & V \cong V^*, \\ 0, & V \not\cong V^*. \end{cases}$$

所以若 $V \not\cong V^*$, 则不存在非零不变双线性函数. 此时 ϕ 为复类型.

下面考虑 $V \cong V^*$ 的情形. 设 $a := \dim_{\mathbb{C}} ((\text{Sym}^2 V^*)^G)$, $b := \dim_{\mathbb{C}} ((\wedge^2 V^*)^G)$. 这里 a 是不变对称双线性函数空间的维数, b 是不变反对称双线性函数空间的维数. 因为

$$V^* \otimes_{\mathbb{C}} V^* = \text{Sym}^2 V^* \oplus \wedge^2 V^*,$$

所以

$$a + b = \dim_{\mathbb{C}} (V^* \otimes V^*)^G = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(V, V^*) = 1.$$

因此 a, b 中恰有一个为 1, 另一个为 0.

又, 对任意表示 V , 有恒等式 $\chi_{\text{Sym}^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi(g)^2 + \chi(g^2))$, $\chi_{\wedge^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi(g)^2 - \chi(g^2))$. 取 G -不变量维数, 得 $a = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\text{Sym}^2 V^*}(g)$, $b = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\wedge^2 V^*}(g)$. 两式相减, 注意取对偶不改变上述求和结果, 得

$$a - b = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^2) = S(\phi).$$

因此 $\nu(\phi) = a - b$.

由前面已经知道 $a + b$ 只能为 0 或 1. 若 $V \not\cong V^*$, 则 $a = b = 0$, 从而 $\nu(\phi) = 0$. 这正是复类型.

若 $V \cong V^*$, 则 $a + b = 1$. 若不变双线性函数对称, 则 $a = 1, b = 0$, 因而 $\nu(\phi) = a - b = 1$. 此时 ϕ 为实类型.

若不变双线性函数反对称, 则 $a = 0, b = 1$, 因而 $\nu(\phi) = a - b = -1$. 此时 ϕ 为实类型. $\square$

Example 30. 求循环群 $C_3 = \langle a | a^3 = e \rangle$ 的全部不可约实表示.

Solution. 令 $\omega = e^{2\pi i/3}$. C_3 的复不可约表示为 $\chi_0(a) = 1, \chi_1(a) = \omega, \chi_2(a) = \omega^2$. 计算 Schur-Frobenius 指标 $S(\chi) = \frac{1}{|C_3|} \sum_{g \in C_3} \chi(g^2)$. 对平凡表示, $S(\chi_0) = 1$, 故 χ_0 为实类型, 对应一个一维实

不可约表示 $\psi_0(a) = 1$.

对 χ_1 , 有

$$S(\chi_1) = \frac{1}{3} (\chi_1(e) + \chi_1(a^2) + \chi_1(a)) = \frac{1}{3} (1 + \omega^2 + \omega) = 0.$$

Chapter 11. 广义表示一瞥

同理 $S(\chi_2) = 0$. 因此 χ_1, χ_2 为复类型, 且 $\overline{\chi_1} = \chi_2$. 它们合并给出一个二维实不可约表示 U , 满足

$$U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \chi_1 \oplus \chi_2.$$

具体可取

$$\psi_1(a) = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

于是 C_3 的全部不可约实表示为 $\psi_0(a) = 1$ 和

$$\psi_1(a) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

□

Example 31. 四元数群 Q_8 唯一的二维复不可约表示为

$$\phi(i) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_x, \quad \phi(j) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_y, \quad \phi(k) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_z.$$

判断其类型, 以及其给出的不可约实表示.

Solution. 该表示的特征标为 $\chi(1) = 2, \chi(-1) = -2, \chi(\pm i) = \chi(\pm j) = \chi(\pm k) = 0$. 由于 $1^2 = (-1)^2 = 1, (\pm i)^2 = (\pm j)^2 = (\pm k)^2 = -1$, 故 *Schur–Frobenius* 指标为

$$S(\phi) = \frac{1}{8} \sum_{g \in Q_8} \chi(g^2) = \frac{1}{8} (2\chi(1) + 6\chi(-1)) = \frac{1}{8} (4 - 12) = -1.$$

因此 ϕ 是赝实类型.

由赝实类型的一般结论, 其对应的实不可约表示为 $U = V_{\mathbb{R}}$, 即将 $V = \mathbb{C}^2$ 看作四维实向量空间. 并且 $U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong V \oplus V$.

具体地, 取 $(z_1, z_2) = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)$, 则在实基 (x_1, y_1, x_2, y_2) 下, 对应的四维实表示为

$$\psi(i) = \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \quad \psi(j) = \begin{pmatrix} & -1 & & \\ & & -1 & \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix}, \quad \psi(k) = \begin{pmatrix} & -1 & & \\ & & & \\ 1 & & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

References of this chapter

故 ϕ 给出的不可约实表示是四维的, 且复化后分解为 $\psi_{\mathbb{C}} \cong \phi \oplus \phi$. □

References of this chapter

[戚陶 26] 戚扬 and 陶瑞宝. 《固体物理中的对称性和拓扑》. Lecture notes. Version dated 2026-03-02. 2026.

12

Contents

12.1 Grothendieck 群	275
12.2 Clifford 代数的半单性	277

Clifford 代数的表示

12.1 Grothendieck 群

Wedderburn–Artin 定理 **Thm. 7.7** 向我们展示了有限维半单代数的结构,

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^r n_i V_i,$$

其中 $n_i \in \mathbb{N}_+$, V_i 是单模. 上式右侧可以视为某个加法式, 那么 $\{V_i\}_{i=1}^r$ 实际上可以视作某种「加法半群」, 并可以把空模当作么元纳入而成为么半群. 类似于 $\mathbb{N}$ 拓展为 $\mathbb{Z}$, 不妨形式上允许出现减法, 即便「负数个单模成分」不具备良好的意义, 这样构造出来的「加法群」被称为 Grothendieck 群, 其严谨形式定义如下:

Definition 12.1 [??]. 设 $(M, +, 0)$ 是 Abel 么半群. 定义 $K(M) := (M \times M)/\sim$, 其中等价关系 $\sim$ 定义为 $(a, b) \sim (c, d)$ 当且仅当存在 $e \in M$ 使得 $a + d + e = b + c + e$. 记 (a, b) 的等价类为 $[a, b]$. 在 $K(M)$ 上定义加法 $[a, b] + [c, d] := [a + c, b + d]$. 则 $K(M)$ 是一个阿贝尔群, 其零元为 $[0, 0]$, 而 $[a, b]$ 的逆元为 $-[a, b] = [b, a]$. 称 $K(M)$ 为交换么半群 M 的 **Grothendieck 群**.

Remark. 注意一般的 Abel 么半群不一定有消去律, 即 $(a + d + e = b + c + e) \not\Rightarrow (a + d = b + c)$, 例如 $\{0, a\}$, 定义 0 为零元, $a + a = a$, 那么 $(a + a = a) \not\Rightarrow (a = 0)$.

Chapter 12. Clifford 代数的表示

看个例子, 由 $\mathbb{N}$ 构造 $\mathbb{Z}$. 考虑交换幺半群 $(\mathbb{N}, +, 0)$. 其 Grothendieck 群定义为 $K(\mathbb{N}) := (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$, 其中 $(a, b) \sim (c, d)$ 当且仅当存在 $e \in \mathbb{N}$ 使得 $a + d + e = b + c + e$. 由于 $\mathbb{N}$ 满足消去律 $x + z = y + z \implies x = y$, 故等价关系可化简为 $(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$. 记 (a, b) 的等价类为 $[a, b]$. 形式上可理解为 $[a, b] = a - b$. 加法定义为 $[a, b] + [c, d] := [a + c, b + d]$. 零元为 $[0, 0]$, 因为 $[a, b] + [0, 0] = [a, b]$. 逆元为 $-[a, b] = [b, a]$, 因为 $[a, b] + [b, a] = [a + b, a + b] = [0, 0]$. 定义映射 $\Phi: K(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ 为 $\Phi([a, b]) = a - b$. 下面验证其良定义. 若 $[a, b] = [c, d]$, 则 $a + d = b + c$, 因此 $a - b = c - d$. 故 $\Phi([a, b]) = \Phi([c, d])$. 又

$$\Phi([a, b] + [c, d]) = \Phi([a + c, b + d]) = (a + c) - (b + d),$$

即 $\Phi([a, b] + [c, d]) = (a - b) + (c - d) = \Phi([a, b]) + \Phi([c, d])$. 故 Φ 为群同态. 下面证明其为双射.

- 满射: 任取 $n \in \mathbb{Z}$. 若 $n \geq 0$, 取 $[n, 0]$, 则 $\Phi([n, 0]) = n$. 若 $n < 0$, 取 $[0, -n]$, 则 $\Phi([0, -n]) = n$. 故 Φ 为满射.
- 单射: 若 $\Phi([a, b]) = \Phi([c, d])$, 则 $a - b = c - d$, 即 $a + d = b + c$. 因此 $(a, b) \sim (c, d)$, 故 $[a, b] = [c, d]$. 所以 Φ 为单射.

综上, $K(\mathbb{N}) \cong \mathbb{Z}$. 因此整数环可以看作自然数加法幺半群的 Grothendieck 群.

Proposition 12.1 [Grothendieck 群的泛性质]. 设 $K(M)$ 是 M 的 Grothendieck 群, 且 $\iota: M \rightarrow K(M)$ 由 $\iota(n) = [n, 0]$ 给出. 则对任意 Abel 群 A 和任意幺半群同态 $f: M \rightarrow A$, 存在唯一群同态 $\tilde{f}: K(M) \rightarrow A$, 使得 $f = \tilde{f} \circ \iota$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\iota} & K(M) \\ & \searrow f & \swarrow \tilde{f} \\ & A & \end{array}$$

Proof. 定义 $\tilde{f}([a, b]) = f(a) - f(b)$. 若 $[a, b] = [c, d]$, 则 $a + d = b + c$, 故 $f(a) + f(d) = f(b) + f(c)$, 从而 $f(a) - f(b) = f(c) - f(d)$. 因此 $\tilde{f}$ 良定义. 又有 $\tilde{f}([a, b] + [c, d]) = \tilde{f}([a + c, b + d]) = f(a + c) - f(b + d) = (f(a) - f(b)) + (f(c) - f(d))$, 故 $\tilde{f}$ 是群同态. 并且 $\tilde{f}(\iota(n)) = \tilde{f}([n, 0]) = f(n) - f(0) = f(n)$, 所以 $f = \tilde{f} \circ \iota$. 最后若 $g: K(M) \rightarrow A$ 也是群同态且 $g \circ \iota = f$, 则 $g([a, b]) = g([a, 0] - [b, 0]) = g(\iota(a)) - g(\iota(b)) = f(a) - f(b)$. 故 $g = \tilde{f}$. 唯一性得证. $\square$

该泛性质说明, Grothendieck 群是把 Abel 幺半群自由地变成 Abel 群的最自然方法. 当 M 满足消去律, 我们可以直接把 $K(M)$ 识别为「纳入负元」后得到的 Abel 群. 在大多数情况下, 消去律

12.2. Clifford 代数的半单性

总是满足的, 所以我们不妨就如此识别 Grothendieck 群. 只要我们铭记, 若 M 不满足消去律, 则存在如下情况:

$$\exists z : (x + z = y + z, x \neq y) \implies (\iota(x) = \iota(y)).$$

Definition 12.2. 如果 B 是 A 的子代数, $i : B \hookrightarrow A$ 为嵌入, 定义 Abel 群

$$A(i : B \hookrightarrow A) := K(B) / i^* K(A).$$

特别地, 对于实 Clifford 代数, 记 $A^{q,p} \equiv A(i : \mathbb{C}l^{q,p} \hookrightarrow \mathbb{C}l^{q+1,p})$; 对于复 Clifford 代数, 记 $\mathbb{A}^q \equiv A(i : \mathbb{C}l^q \hookrightarrow \mathbb{C}l^{q+1})$.

12.2 Clifford 代数的半单性

Part IV

连续群

13

拓扑群

Contents

13.1 拓扑群及其性质	282
13.2 局部紧 Tychonoff 拓扑群上的积分	
287	

何为「连续」？欲谈论「连续群」，无非是见文说意地附加群以连续结构，终归须落实在探讨连续性及其与群结构的兼容。为定义「连续」，数学上不可避免地要谈论拓扑，相关内容详见[拓扑学笔记](#)，本章则谈论结合群与拓扑的原始型——拓扑群。

我们采用如下**分离公理**之设定：设 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间，称子集 A, B **分离**，若 $\overline{A} \cap B = \emptyset$ 且 $A \cap \overline{B} = \emptyset$ ，称集合 C 是 G_δ 集，若存在一列可数开集 $\{U_i\}$ 使得 $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ 。

- **T_0 公理**：对 X 中不同的两点 x, y ，要么存在开集 U 使得 $x \in U, y \notin U$ ，要么存在开集 V 使得 $x \notin V, y \in V$ 。满足 T_0 公理时称为 **T_0 空间**或 **Kolmogorov 空间 (Kolmogorov space)**。
- **T_1 公理**：对 X 中不同的两点 x, y ，分别存在开集 U, V 使得 $x \in U, y \notin U$ 且 $x \notin V, y \in V$ 。满足 T_1 公理时称 **T_1 空间**或 **Fréchet 空间 (Fréchet space)**。
- **T_2 公理**：对 X 中不同的两点 x, y ，分别存在开集 U, V 使得 $x \in U, y \in V$ 且 $U \cap V = \emptyset$ 。满足 T_2 公理时称 **T_2 空间**或 **Hausdorff 空间 (Hausdorff space)**。
- **T_3 公理**：满足 T_1 公理且满足**正则公理 (regular axiom)**——对 X 的闭子集 A 及 $x \notin A$ 分别存在开集 U, V 使得 $x \in U, A \subset V$ 且 $U \cap V = \emptyset$ 。满足 T_3 公理时称 **T_3 空间**或**正则空间**。
- **$T_{3.5}$ 公理**：满足 T_1 公理且满足**完全正则公理 (completely regular axiom)**——对 X 的闭子集 A 及 $x \notin A$ ，存在连续函数 $f : X \rightarrow [0, 1]$ ，使得 $f(x) = 1, f|_A = 0$ 。满足 $T_{3.5}$ 公理时称 **$T_{3.5}$ 空间**或**完全正则空间**或 **Tychonoff 空间 (Tychonoff space)**。

* Chapter 13. 拓扑群

- T_4 公理: 满足 T_1 公理且满足正规公理 (normal axiom) — 对 X 的不交闭子集 A, B , 分别存在开集 U, V 使得 $A \subset U, B \subset V$ 且 $U \cap V = \emptyset$. 满足 T_4 公理时称 T_4 空间或正规空间.
- T_5 公理: 满足 T_1 公理且满足完全正规公理 (completely normal axiom) — 对 X 的任意分离子集 A, B , 分别存在不交开集 U, V 使得 $A \subset U, B \subset V$ 且 $U \cap V = \emptyset$. 满足 T_5 公理时称 T_5 空间或完全正规空间.
- T_6 公理: 满足 T_1 公理且满足完美正规公理 (perfectly normal axiom) — 满足正规公理且任意闭集均是 G_δ 集. 满足 T_6 公理时称 T_6 空间或完美正规空间.

我们采用如下测度的定义: 设 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间. 由拓扑 $\mathcal{T}$ 生成的 σ -代数称为 X 上的 **Borel σ -代数**, 记作 $\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{T})$. 其中的元素称为 **Borel 集**. 设 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间, $\mathcal{B}(X)$ 为其 Borel σ -代数. 定义在可测空间 $(X, \mathcal{B}(X))$ 上的测度 $\mu : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, \infty]$ 称为 X 上的 **Borel 测度 (Borel measure)**. 设 X 是局部紧 Hausdorff 空间. X 上的 Borel 测度 μ 称为 **Radon 测度 (Radon measure)**, 若 μ 在紧集上有限, 且对任意 Borel 集 $E \in \mathcal{B}(X)$ 有 $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subseteq U, U \text{ 开}\}$, 并且对任意开集 $U \subseteq X$ 有 $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq U, K \text{ 紧}\}$.

13.1 拓扑群及其性质

Definition 13.1 [拓扑群 (topological group)]. 群 G 称为**拓扑群**, 若其配备了拓扑 $\mathcal{T}$, 且映射 $f : G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh^{-1}$ 连续.

Definition 13.2 [拓扑群同态 (homomorphism of topological groups), 拓扑群同构 (isomorphism of topological groups)]. 设 G, H 是拓扑群. 群同态 $\varphi : G \rightarrow H$ 称为**拓扑群同态**, 若 φ 作为拓扑空间之间的映射是连续映射. 若 φ 还是同胚, 则称为**拓扑群同构**.

拓扑群同构是群同构, 即同胚能反推出同构, 下面说明这一点. 因为 φ 是同胚, 所以 φ 是双射. 又因为 φ 是群同态, 因此 φ 是双射群同态, 从而是群同构.

Proposition 13.1. 设 G 是拓扑群, 则:

- 求逆映射 $\iota : G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$ 是同胚;
- 群乘法映射 $m : G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh$ 连续.
- 任取 $g \in G$, 定义**左平移映射** $L_g : G \rightarrow G, h \mapsto gh$, 以及**右平移映射** $R_g : G \rightarrow G, h \mapsto hg$, 则它们是同胚, 且 $L_g \circ L_h = L_{gh}, R_g \circ R_h = R_{hg}$.

13.1. 拓扑群及其性质

Proof. 由拓扑群定义, 映射 $f: G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh^{-1}$ 连续. 首先, 记常值映射 $c_e: G \rightarrow G, g \mapsto e$. 其连续. 因而映射 $G \rightarrow G \times G, g \mapsto (e, g)$ 连续. 于是复合映射 $g \mapsto f(e, g) = eg^{-1} = g^{-1}$ 连续. 因此求逆映射 $\iota: G \rightarrow G$ 连续. 又因为 $\iota^{-1} = \iota$, 故 ι 是同胚. 其次, 映射 $\text{id}_G \times \iota: G \times G \rightarrow G \times G, (g, h) \mapsto (g, h^{-1})$ 连续. 因而 $m = f \circ (\text{id}_G \times \iota)$ 连续, 即

$$m(g, h) = f(g, h^{-1}) = g(h^{-1})^{-1} = gh$$

连续. 最后, 任取 $g \in G$. 左平移映射可写为 $L_g(h) = gh = m(g, h)$, 是连续映射 $h \mapsto (g, h)$ 与 m 的复合, 故连续. 同理 $R_g(h) = hg = m(h, g)$ 连续. 又 $L_g^{-1} = L_{g^{-1}}, R_g^{-1} = R_{g^{-1}}$, 而 $L_{g^{-1}}$ 与 $R_{g^{-1}}$ 也连续, 故 L_g, R_g 均为同胚. 此外, 对任意 $g, h \in G$ 和任意 $x \in G$, 有

$$(L_g \circ L_h)(x) = L_g(hx) = g(hx) = (gh)x = L_{gh}(x).$$

因此 $L_g \circ L_h = L_{gh}$. 同理,

$$(R_g \circ R_h)(x) = R_g(xh) = (xh)g = x(hg) = R_{hg}(x).$$

因此 $R_g \circ R_h = R_{hg}$. □

Definition 13.3 [齐性空间 (homogeneous space)]. 拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 称为齐性空间, 若任意的 $a, b \in X$ 均存在同胚使得 $a \mapsto b$.

Proposition 13.2. 拓扑群齐性.

Proof. 任取 $a, b \in G$. 定义左平移 $L_{ba^{-1}}: G \rightarrow G, x \mapsto ba^{-1}x$. 因为拓扑群中左平移是同胚, 其逆映射为 $L_{ab^{-1}}: G \rightarrow G, x \mapsto ab^{-1}x$. 并且 $L_{ba^{-1}}(a) = ba^{-1}a = b$. 因此对任意 $a, b \in G$, 都存在同胚将 a 映到 b , 故 G 是齐性空间. □

Lemma 13.1. 设 G 是拓扑群, H 是其子群, 则闭包 $\overline{H}$ 也是子群.

Proof. 由 **Prop. 1.2**, 只需证明 $\overline{H}$ 对映射 $f: G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto xy^{-1}$ 封闭. 任取 $x, y \in \overline{H}$. 由于 f 连续, 有

$$xy^{-1} = f(x, y) \in f(\overline{H} \times \overline{H}) \subseteq \overline{f(H \times H)}.$$

又因为 H 是子群, 所以 $f(H \times H) \subseteq H$. 因此 $xy^{-1} \in \overline{H}$. 故 $\overline{H}$ 是子群. □

以上对拓扑群的定义是常用的等价定义中最弱的, 其他参考文献的定义常要求额外的分离性, 兹归纳为如下命题:

* Chapter 13. 拓扑群

Proposition 13.3 [拓扑群的分离性]. 设 G 是拓扑群, 则下面条件等价:

- 单位元独点集 $\{e\}$ 是闭的;
- 对任意 $g \in G$, 单点集 $\{g\}$ 是闭集;
- G 是 Kolmogorov 空间;
- G 是 Fréchet 空间;
- G 是 Hausdorff 空间;
- G 是正则空间;
- G 是 Tychonoff 空间.

Remark. 更高的分离性无法推出, 也就是说如上条件不能推导出 G 是正规空间、完全正规空间、完美正规空间.

Proof. 首先, 由于任意左平移 $L_g : G \rightarrow G$ 是同胚, 有 $L_g(\{e\}) = \{g\}$. 因此 $\{e\}$ 闭 $\iff \{g\}$ 对任意 $g \in G$ 闭. 所以第一条与第二条等价. 第二条正是 T_1 公理, 即 Fréchet 性. 因此第二条与第四条等价. 又 $T_1 \implies T_0$, 所以第四条推出第三条. 下面证明第三条推出第一条. 令 $H = \overline{\{e\}}$. 因为 $\{e\}$ 是子群, 而拓扑群中子群的闭包仍是子群, 故 H 是子群. 任取 $h \in H$, 由左平移同胚性, $\{h\} = h\{e\} = hH = H$. 特别地, $\{h\} = \overline{\{e\}}$. 若 G 是 T_0 空间, 则不同点的闭包不同, 故只能有 $h = e$. 因此 $H = \{e\}$, 即 $\{e\}$ 是闭集. 于是第一、二、三、四条等价. 现在证明它们与 Hausdorff 性等价. 显然 $T_2 \implies T_1$. 反过来, 若 $\{e\}$ 是闭的, 任取 $g \neq h$. 则 $g^{-1}h \neq e$. 因为 $\{e\}$ 闭, 所以 $G \setminus \{e\}$ 是开集, 且 $g^{-1}h \in G \setminus \{e\}$. 由映射 $G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto x^{-1}y$ 的连续性, 存在 g 的邻域 U 与 h 的邻域 V , 使得 $x^{-1}y \in G \setminus \{e\}, \forall x \in U, y \in V$. 因此不可能有 $x = y \in U \cap V$, 所以 $U \cap V = \emptyset$. 故 G 是 Hausdorff 空间. 因此第五条也与前四条等价. 下面证明每个 Hausdorff 拓扑群都是 Tychonoff 空间. 按定义, 只需证明 G 是完全正则 Hausdorff 空间. Hausdorff 性已经由假设给出, 因此只需证明完全正则性. 设 G 是一个 Hausdorff 拓扑群. 对任意单位元邻域 U , 定义 $E_U = \{(x, y) \in G \times G : x^{-1}y \in U\}$. 当 U 遍历所有单位元邻域时, 这些集合构成 G 的左一致结构的一组基. 该一致结构诱导的拓扑正是 G 的原拓扑. 由于 G 是 Hausdorff 的, 有 $\bigcap_{U \in \mathcal{N}(e)} U = \{e\}$, 其中 $\mathcal{N}(e)$ 表示 e 的邻域系. 因此

$\bigcap_{U \in \mathcal{N}(e)} E_U = \Delta_G$, 其中 $\Delta_G = \{(x, x) : x \in G\}$ 为对角线. 所以 G 的左一致结构是 Hausdorff 的. 又

因为任意 Hausdorff 一致空间都是完全正则的, 故 G 是完全正则空间. 再由 G 本身是 Hausdorff 空间可知, G 是 Tychonoff 空间. 综上, 七个条件两两等价. $\square$

若 $U, V \subseteq G$ 是拓扑群 G 的两个开子集, 记 $UV := \{uv \in G \mid u \in U, v \in V\}, U^{-1} := \{u^{-1} \mid u \in U\}$. $f(g, h) = gh^{-1}$ 连续意味着对于任意的 $W \ni gh^{-1}, W \in \mathcal{T}$, 均存在 $U, V \in \mathcal{T}, U \ni g, V \ni h$ 使得对

13.1. 拓扑群及其性质

$\forall u \in U, \forall v \in V$, 均有 $uv^{-1} \in W$, 也就是说 $UV^{-1} \subseteq W$. 我们称包含了单位元的开集为**开核** (open kernel).

Proposition 13.4 [拓扑群的连通性]. 对拓扑群 G ,

- 其任意开核 W , 必有另一开核 V 使得 $VV^{-1} \subseteq W$, 且 $\bar{V} \subseteq W$;
- 若 G 连通, 则其可由任意开核 U 生成, 即 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$, 这里 $U^{n+1} = U^n U$;
- G 的含单位元 e 的连通分支 K 是 G 的闭正规子群;
- 对任意 $g \in G$, G 的含 g 的连通分支是陪集 gK .

Proof. (1) 由映射 $f: G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto xy^{-1}$ 在 (e, e) 处连续, 且 $f(e, e) = e \in W$, 存在单位元开邻域 A, B , 使得 $AB^{-1} \subseteq W$. 令 $V = A \cap B$. 则 V 是单位元开邻域, 且 $VV^{-1} \subseteq AB^{-1} \subseteq W$. 下面证明 $\bar{V} \subseteq W$. 任取 $x \in \bar{V}$. 因为 V 是单位元邻域, 所以 xV 是 x 的邻域. 由 $x \in \bar{V}$, 得 $xV \cap V \neq \emptyset$. 因此存在 $u, v \in V$, 使得 $xv = u$. 于是 $x = uv^{-1} \in VV^{-1} \subseteq W$. 所以 $\bar{V} \subseteq W$.

(2) 取对称开核 $V = U \cap U^{-1}$. 则 $V \subseteq U$, 且 $V = V^{-1}$. 令 $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$. 因为 $V = V^{-1}$ 且 $e \in V$, 容易验证 $H \leq G$. 又因 V 是开集, 每个 V^n 都是开集, 故 H 是开子群. 开子群的每个陪集 gH 也是开集, 所以 $G - H = \bigcup_{g \notin H} gH$ 也是开集. 因而 H 既开又闭. 由于 G 连通, 只能有 $H = G$. 因此

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n \subseteq G,$$

从而 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$.

(3) 记 K 为含单位元 e 的连通分支. 由于连通分支总是闭集, 故 K 闭. 先证 $K \leq G$. 若 $a \in K$, 则 aK 是连通集, 且含有 a . 因为 $a \in K$, 而 K 是含 a 的最大连通集, 故 $aK \subseteq K$. 于是 $a^{-1}K \subseteq K$. 取 $a \in K$, 得 $a^{-1} \in K$. 再由 $aK \subseteq K$ 知对任意 $b \in K$, 有 $ab \in K$. 因此 K 是子群. 再证正规性. 对任意 $g \in G$, 共轭映射 $c_g: G \rightarrow G, x \mapsto gxg^{-1}$ 是同胚, 所以 gKg^{-1} 是连通集. 又 $e \in gKg^{-1}$, 故 gKg^{-1} 含于含 e 的连通分支 K . 对 g^{-1} 重复同理可得反包含, 因而 $gKg^{-1} = K$. 所以 $K \trianglelefteq G$. 最后, 左平移 $L_g: G \rightarrow G, x \mapsto gx$ 是同胚, 因此 gK 是连通集, 且含有 g .

(4) 若 C_g 是含 g 的连通分支, 则 $gK \subseteq C_g$. 另一方面 $g^{-1}C_g$ 是连通集且含 e , 故 $g^{-1}C_g \subseteq K$, 即 $C_g \subseteq gK$. 因此 $C_g = gK$. $\square$

* Chapter 13. 拓扑群

Proposition 13.5 [拓扑群的子群]. 设 G 是拓扑群, 则

- G 的开子群闭;
- G 的有限指数闭子群开;
- G 的含有单位元 e 的任意邻域的子群开.

设 $H \leq G$, G/H 是 G 对 H 的左陪集空间, 则

- 商映射 $\rho : G \rightarrow G/H$ 开;
- H 是开子群当且仅当 G/H 具有离散拓扑;
- G/H 也是拓扑群.

Proof.

□

Proposition 13.6 [拓扑群的子集]. 设 G 是拓扑群, $A, B \subseteq G$, $g \in G$, 则

- 若 A 是开/闭集, 则 gA, Ag 是开/闭集;
- 若 A 是开集, 则 AB, BA 是开集;
- 若 A 是闭集, B 是紧集, 则 AB, BA 是闭集;
- 若 A, B 是紧集, 则 AB, BA 是紧集.

设 $H \leq G$, G/H 是左陪集空间, 则

- 若 G 紧且 H 闭, 则 H 紧;
- 若 G 紧, 则 G/H 紧;
- 若 H 与 G/H 紧, 则 G 紧.

Remark. 拓扑群 G 的两个闭子集 A, B 的积 AB 一般不是闭集. 经典反例在加法拓扑群 $(\mathbb{R}, +)$ 中: $A = \mathbb{Z}$, $B = \pi\mathbb{Z}$. 二者都是 $\mathbb{R}$ 中的闭子群, 因此当然是闭集. 但 $A + B = \{m + n\pi : m, n \in \mathbb{Z}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中是稠密的真子集, 从而不是闭的.

Proof. 左、右平移 $L_g : x \mapsto gx$, $R_g : x \mapsto xg$ 都是同胚, 故若 A 开或闭, 则 $gA = L_g(A)$,

13.2. 局部紧 Tychonoff 拓扑群上的积分

$Ag = R_g(A)$ 也开或闭. 若 A 开, 则 $AB = \bigcup_{b \in B} Ab$, $BA = \bigcup_{b \in B} bA$. 由于每个 Ab, bA 都是开集, 故 AB, BA 开. 若 A 闭且 B 紧, 先证 AB 闭. 取 $x \notin AB$. 对每个 $b \in B$, 有 $xb^{-1} \notin A$. 由于 A 闭, 可取 xb^{-1} 的邻域 U_b 使得 $U_b \cap A = \emptyset$. 由乘法连续性, 可取 x 的邻域 W_b 与 b 的邻域 V_b , 使得 $W_b V_b^{-1} \subset U_b$. 由紧性, 有有限个 $V_{b_1}, \dots, V_{b_n}$ 覆盖 B . 令 $W = \bigcap_{i=1}^n W_{b_i}$, 则 W 是 x 的邻域. 若 $y \in W \cap AB$, 则 $y = ab$, 其中 $a \in A, b \in B$. 取 i 使 $b \in V_{b_i}$, 则 $a = yb^{-1} \in W_{b_i} V_{b_i}^{-1} \subseteq U_{b_i}$, 与 $U_{b_i} \cap A = \emptyset$ 矛盾. 故 $W \cap AB = \emptyset$, 从而 AB 闭. 同理 BA 闭. 最后, 若 A, B 紧, 则 $A \times B$ 紧. 乘法映射 $m: G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto ab$ 连续, 因此 $AB = m(A \times B)$ 紧. 同理 BA 紧. $\square$

Proposition 13.7 [拓扑群的积]. 设 $\{G_i\}_i$ 是一组拓扑群, $G := \prod_i G_i$, 则

- G 是拓扑群;
- G 紧当且仅当 G_i 紧, $\forall i$;
- G 局部紧当且仅当 G_i 局部紧, $\forall i$, 且非紧的 G_i 个数至多有限;
- G 是 Tychonoff 空间当且仅当 G_i 是 Tychonoff 空间, $\forall i$;
- G 连通当且仅当 G_i 连通, $\forall i$.

Proof.

$\square$

13.2 局部紧 Tychonoff 拓扑群上的积分

Definition 13.4 [Haar 测度 (Haar measure)]. 设 G 是局部紧 Tychonoff 拓扑群. G 上的一个非零左不变 Radon 测度 μ 称为左 Haar 测度, 即对任意 $g \in G$ 和任意 Borel 集 $E \subseteq G$, 有 $\mu(gE) = \mu(E)$. 同理可定义右 Haar 测度.

Proposition 13.8 [Haar 测度的基本性质]. 设 G 是局部紧 Tychonoff 拓扑群, μ 是 G 上的左 Haar 测度. 则:

- 若 $K \subseteq G$ 紧, 则 $\mu(K) < \infty$.
- 若 $U \subseteq G$ 非空开, 则 $\mu(U) > 0$.

* Chapter 13. 拓扑群

- μ 是正则测度. 即对 Borel 集 $E \subseteq G$, 有外正则性 $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subseteq U, U \text{ 开}\}$, 且对开集 $U \subseteq G$, 有内正则性 $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq U, K \text{ 紧}\}$.
- 对任意 Haar 可积函数 f , 有积分形式的左不变性: $\int_G f(gx) d\mu(x) = \int_G f(x) d\mu(x)$.
- 若 G 紧, 则 $\mu(G) < \infty$. 因而可以唯一归一化为 $\mu(G) = 1$.
- 若 G 离散, 则 Haar 测度就是计数测度的常数倍.

Proof. □

Theorem 13.1. 设 G 是局部紧 Tychonoff 拓扑群. 则 G 上存在左 Haar 测度, 且在乘以正常数的意义下唯一. 同理, G 上存在右 Haar 测度, 且在乘以正常数的意义下唯一.

Proof. □

Theorem 13.2 [模函数 (modular function)]. 设 μ 是 G 上的左 Haar 测度. 则存在唯一的连续群同态 $\Delta_G : G \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, 称为 G 的模函数, 使得 $\mu(Eg) = \Delta_G(g)^{-1} \mu(E)$ 对任意 Borel 集 $E \subseteq G$ 成立.

Proof. □

Proposition 13.9. 若 μ 是左 Haar 测度, 则 $\mu^\vee(E) := \mu(E^{-1})$ 定义了一个右 Haar 测度.

Proof. □

Theorem 13.3. 若 G 是紧拓扑群, 则存在唯一的 Borel 概率测度 μ , 使得 $\mu(gE) = \mu(Eg) = \mu(E)$ 对任意 $g \in G$ 与 Borel 集 $E \subseteq G$ 成立.

Proof. □

Theorem 13.4 [不变内积]. 设 G 是紧群, $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 是有限维连续表示. 任取 V 上的

References of this chapter

内积 $\langle \cdot | \cdot \rangle$, 定义

$$\langle v | w \rangle = \int_G (\rho(g)v | \rho(g)w) \, d\mu(g).$$

则 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ 是 G -不变内积.

References of this chapter

[丘维声 11] 丘维声.《群表示论》. 高等教育出版社, 2011. isbn: 978-7-04-032711-3.

[黎冯 14] 黎景辉 and 冯绪宁. 拓扑群引论. 2nd ed. 北京: 科学出版社, 2014.

14

Lie 群

Contents

14.1 Lie 群中的基本概念	293
14.2 若干重要 Lie 群	310

称 M 为 n 维**拓扑流形** (topological manifold), 若 M 是第二可数¹ 的 Hausdorff 空间, 且局部 n 维 Euclid². 若图册极大且各图之间光滑相容, 称为一个**微分结构** (differentiable structure), 配以微分结构的拓扑流形称作**微分流形** (differential manifold). **复拓扑流形**只需将拓扑流形定义中的局部 $\mathbb{R}^n$ 改为局部 $\mathbb{C}^n$, **复流形**即配备了**复微分结构**的**复拓扑流形**, 复微分结构即复图册极大且各复图之间全纯相容.

设 M 是微分流形, 记符号 $C^\infty(M)$ 表示其上所有光滑函数所构成的集合; 设 $p \in M$, $T_p M$ 表示 p 处的**切空间** (tangent space), TM 表示 M 的**切丛** (tangent bundle), $T_p^* M$ 表示 p 处的**余切空间** (cotangent space), $T^* M$ 表示 M 的**余切丛** (cotangent bundle); 对微分流形 N , 光滑映射 $F: M \rightarrow N$ 诱导的**推前** (pushforward) 记作 dF 或 F_* , **拉回** (pullback) 记作 F^* ; M 上全体光滑矢量场所构成的集合记作 $\mathfrak{X}(M)$, 全体光滑 k -形式所构成的集合记作 $\Omega^k(M)$, 全体光滑微分形式所构成的集合记作 $\Omega^\bullet(M)$. 涉及张量时, 以希腊字母 $\lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ 表示具体指标, 从 0 开始取值, 以拉丁字母 $a, b, c, d, e, f, \dots$ 表示抽象指标, 特别的, i, j, k 表示具体指标, 且从 1 开始取值, 不注明指标时, 张量或用粗体表示. 符号 $\mathcal{F}_M(k, l)$ 表示 M 上的 (k, l) -型光滑张量场.

涉及度规时, 记之为 g_{ab} , 一般不假设流形 M 是 Riemann 的, 我们按照物理上的习惯允许度规在局部正交归一标架下存在号差, 按照线性代数中的 **Sylvester 惯性定理** (Sylvester's law of inertia),

¹具有可数拓扑基的拓扑空间.

²任意 $p \in M$, 有其开邻域 $U \ni p$ 配以同胚 $\phi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. 这样的 (U, ϕ) 叫做**图** (chart). 收集一组覆盖 M 的 (U, ϕ) 构成的集合叫做**图册** (atlas)

Chapter 14. Lie 群

局部正交归一标架下度规总能写为

$$[g_{\mu\nu}] = \text{diag} \left(\underbrace{-1, -1, \dots}_p, \underbrace{+1, +1, \dots}_q \right).$$

这里 $[g_{\mu\nu}]$ 意思是把局部分量 $g_{\mu\nu}$ 排布为矩阵. 物理上称配备对角形式下 -1 数目为 1 的度规的流形为 **Lorentz 流形 (Lorentzian manifold)**, 更一般的号差归纳为伪 **Riemann 流形 (pseudo Riemannian manifold)**. 维度是 4 时, 局部正交归一标架也叫 **tetrad-四标架 (tetrad)** 或 **vierbein-四标架 (vierbein)**, 更高维度时, 称作**多重标架 (vielbein)**. 我们约定 Euclid 度规为 δ_{ab} , 其全局可写作 $\text{diag}(1, 1, \dots)$, Minkowski 度规为 η_{ab} , 其全局可写作 $\text{diag}(-1, 1, 1, \dots)$. 度规的行列式记作 g .

给定度规 g_{ab} 后, 我们默认选用与其适配的无挠的**联络 (connection)** ∇ , 即使得 $\nabla_a g_{bc} = 0$, 以及选用与其适配的体元, 在局部正交归一标架下, $\varepsilon_{a_1 \dots a_n} = \sqrt{|g|} (e^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (e^n)_{a_n}$, 此为右手系, 左手性差一个负号. 定义 **Levi-Civita 符号 (Levi-Civita symbol)**,

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = \begin{cases} +1, & \mu_1 \dots \mu_n \text{ 偶逆序,} \\ -1, & \mu_1 \dots \mu_n \text{ 奇逆序,} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

可见在局部正交归一标架下, $\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = \sqrt{|g|} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n}$. 以及, 注意 Levi-Civita 不是张量.

我们如下表示张量的对称化和反对称化:

$$A_{(a_1 \dots a_n)} = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in S_n} A_{a_{\tau(1)} \dots a_{\tau(n)}}, \quad A_{[a_1 \dots a_n]} = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn } \tau A_{a_{\tau(1)} \dots a_{\tau(n)}}.$$

设有流形 M , v 是其上的光滑矢量场, T 是其上的光滑张量场, T 对 v 的 **Lie 导数 (Lie derivative)** 定义为

$$\mathcal{L}_v T := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* T.$$

其中 ϕ_t 是 v 生成的**局部流 (local flow)**, 即 $\frac{d}{dt} \phi_t(p) = v_{\phi_t(p)}$. **Killing 矢量场 (Killing vector field)** ξ 指的是使得度规张量的 Lie 导数为 0 的矢量场, 即 $\mathcal{L}_\xi g = 0$, 另一个等价定义是 ξ 所满足的 **Killing 方程 (Killing equation)** $\nabla_{(\alpha} \xi_{\beta)} = 0$.

14.1 Lie 群中的基本概念

Definition 14.1 [Lie 群 (Lie group)]. 若群 G 配备了光滑的微分流形结构, 且映射 $f: G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh^{-1}$ 连续, 则称其为 **Lie 群**. Lie 群同态/同构即光滑的群同态/同构; Lie 群局部同构 $\phi: G \rightarrow H$ 则是只要求连续以及存在单位元附近的领域 $U \ni e_G, V \ni e_H$ 保持乘法 $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1) \phi(g_2)$; Lie 子群即作为子群的 Lie 群.

根据 Def. 13.1, Lie 群是特殊的拓扑群. Prop. 13.1 指出, 左平移 $L_g, \forall g \in G$ 是同胚, 而在 Lie 群中, 群运算时是光滑的, 因而 L_g 还是微分同胚.

Definition 14.2. 设 G 是 n 维度 Lie 群, X 是其上的光滑矢量场, 称其为**左不变的**, 若对 $\forall g \in G$ 即其诱导的左平移映射 L_g , 均有 $L_{g*}X = X$; 等价地, 有 $L_{g*}X_h = X_{gh}, \forall h \in G$.

此处稍加说明两个定义式的等价性. 推前 L_{g*} 在 h 点是线性同构 $(L_{g*})_h: T_h G \rightarrow T_{gh} G$, 注意 $L_g(h) = gh$. 当 $L_{g*}X = X$ 时, 该式在 h 点给出 $(L_{g*}X)_{gh} = X_{gh}$, 并且 L_{g*} 是微分同胚, 从而 $(L_{g*}X)_h = L_{g*}X_h$, 联合两式得到 $L_{g*}X_h = X_{gh}$. 上面推导可逆, 从而说明了等价性.

通过推前映射, 我们可以通过 $T_e G$ 构造 G 上的左不变矢量场, 具体方式为: 取 $x \in T_e G$, 定义其诱导的左不变矢量场为 X , 满足 $X_e = x, X_g = dL_g x = dL_g X_e = X_{ge}$. 这样定义出的 X 是左不变的, 因为 $\forall h \in G$,

$$L_{g*}X_h = L_{g*}L_{h*}x = (L_g \circ L_h)_* x = L_{gh*}x = X_{gh}.$$

第二个等号使用了推前映射的链式法则. 第三个等号使用了 Prop. 13.1. 命全体由 $T_e G$ 中的矢量诱导的左不变矢量场所构成的集合为 $L(G)$, 显然有如下断言:

Proposition 14.1. Lie 群 G 上全体左不变矢量场 $L(G)$ 与 $T_e G$ 线性同构, $X \leftrightarrow x = X_e$.

Proof. 容易验证, 两个方向的构造互逆. □

Proposition 14.2. Lie 群 G 上的左不变矢量场均光滑.

Proof. 取 X 为 G 上的左不变矢量场. 记其在单位元处的取值为 $x := X_e \in T_e G$. 由左不变性, 对任意 $g \in G$, 有 $X_g = (L_g)_* x$. 因此只需证明映射 $g \mapsto (L_g)_* x$ 是光滑的. 取单位元附近的局部坐

Chapter 14. Lie 群

标 (U, φ) , 令 $\varphi(e) = 0$. 设 $x = x^i \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_e$. 对任意 $f \in C^\infty(G)$, 有 $(Xf)(g) = X_g f = x(f \circ L_g)$. 于是

$$(Xf)(g) = x^i \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_0 f(g\varphi^{-1}(u)).$$

由于群乘法映射 $m: G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh$ 光滑, 故 $(g, u) \mapsto f(g\varphi^{-1}(u))$ 是光滑函数. 因此其关于 u^i 的偏导数在 $u = 0$ 处仍然光滑依赖于 g . 所以 $Xf \in C^\infty(G)$. 由光滑矢量场的判别准则, X 是光滑矢量场. $\square$

Proposition 14.3. 若 X 和 Y 均是 Lie 群 G 上的左不变矢量场, 则对易子 $[X, Y]$ 也是.

Proof. 任取 $g \in G$. 由于 X, Y 左不变, 有 $(L_g)_*X = X, (L_g)_*Y = Y$. 又因为微分同胚的推前映射保持矢量场对易子, 即 $(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_*X, (L_g)_*Y]$, 所以

$$(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_*X, (L_g)_*Y] = [X, Y].$$

因此 $[X, Y]$ 在左平移 L_g 下不变. 由 $g \in G$ 的任意性, $[X, Y]$ 是左不变矢量场. $\square$

Definition 14.3 [Lie 代数 (Lie algebra)]. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的 n 维度线性空间, 配以 Lie 括号 (Lie bracket) $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, 满足下列性质:

- 线性: $[\mu x + \nu y, z] = \mu [x, z] + \nu [y, z]$;
- 反对易: $[x, y] = -[y, x]$;
- Jacobi 恒等式 (Jacobi identity): $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

Lie 括号可以识别为一个 $(1, 2)$ -型张量, 用抽象指标记作 C^c_{ab} , 称为结构张量 (structure constant tensor), 即 $[x, y]^c = C^c_{ab} x^a y^b, \forall x, y \in \mathfrak{g}$. 用具体指标, 结构张量的分量 $C^\lambda_{\mu\nu}$ 叫做 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的结构常数 (structure constants), 将矢量的基底展开 $v = v^\mu x_\mu$ 和 $u = u^\nu x_\nu$ 代入 Lie 括号即可得到 $[x_\mu, x_\nu] = C^\lambda_{\mu\nu} x_\lambda$. Abel Lie 代数 (Abelian Lie algebra) 指的是 Lie 括号的值总为 0 的 Lie 代数.

Remark. 「线性」+「反对易」可以知道对第二个槽位也是线性的.

Remark. 将 Lie 括号识别为「乘法」, 可见 Lie 代数是一种非结合的代数. Lie 代数的理想 (ideal) $\mathfrak{h}$ 是线性子空间, 满足 $[x, y] \in \mathfrak{h}, \forall x \in \mathfrak{h}, \forall y \in \mathfrak{g}$, 也就是满足「乘法吸收律」. 因反对易性, Lie 代数的理想自动是双边理想. Lie 代数的理想自然诱导出商 Lie 代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, 配以 Lie 括号 $[x+\mathfrak{h}, y+\mathfrak{h}] := [x, y] + \mathfrak{h}$. Lie 括号不是对易子, 因为 Lie 代数上没有定义「乘法」, 实际上 Lie 括号是对易子的抽象, 随后我们会看到 Lie 括号的诸多性质均类似对易子.

14.1. Lie 群中的基本概念

Example. 三维 Euclid 空间的角动量代数构成 Lie 代数, 满足 $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = \epsilon_{ijk} \hat{L}_k$, 因 Euclid 空间矢量的上下指标自然认同顾不区分, 结构常数即 Levi-Civita 符号.

Proposition 14.4. Lie 代数的结构张量 C^c_{ab} 满足

- 下指标反对易 $C^c_{ab} = C^c_{[ab]}$;
- Jacobi 恒等式 $C^c_{a[b} C^a_{de]} = 0$.

Proof. (1) 由 Lie 括号的反对称性, $[v, u] = -[u, v]$. 写成分量形式, 得

$$C^c_{ab} v^a u^b = -C^c_{ab} u^a v^b = -C^c_{ba} v^a u^b.$$

由于 $v, u \in \mathfrak{g}$ 任意, 故 $C^c_{ab} = -C^c_{ba}$, 即 $C^c_{ab} = C^c_{[ab]}$.

(2) 下面证明 Jacobi 恒等式. 取一组基 $\{X_a\}$, 由 $[X_a, X_b] = C^c_{ab} X_c$ 得

$$[X_b, [X_d, X_e]] = [X_b, C^a_{de} X_a] = C^a_{de} [X_b, X_a] = C^a_{de} C^c_{ba} X_c.$$

因此 Jacobi 恒等式

$$[X_b, [X_d, X_e]] + [X_d, [X_e, X_b]] + [X_e, [X_b, X_d]] = 0$$

给出 $C^a_{de} C^c_{ba} + C^a_{eb} C^c_{da} + C^a_{bd} C^c_{ea} = 0$. 利用 $C^c_{ba} = -C^c_{ab}$, 上式等价于

$$C^c_{ab} C^a_{de} + C^c_{ad} C^a_{eb} + C^c_{ae} C^a_{bd} = 0.$$

这正是 $C^c_{a[b} C^a_{de]} = 0$. □

Definition 14.4 [泛包络代数 (universal enveloping algebra)]. 设 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数, 其泛包络代数定义为

$$U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g}) / \langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \mid x, y \in \mathfrak{g} \rangle, \quad T(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{g}^{\otimes n}.$$

泛包络是 Lie 代数嵌入结合代数最自由的方式.

Theorem 14.1 [Poincaré–Birkhoff–Witt 定理 (Poincaré–Birkhoff–Witt theorem)]. 若 Lie 代

Chapter 14. Lie 群

数 $\mathfrak{g} = \text{span} \{x_i\}_{i=1}^n$, 则其泛包络代数 $U(\mathfrak{g}) = \text{span} \{x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}, a_i \in \mathbb{N}\}$.

Proof. 由定义,

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g}) / \langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \mid x, y \in \mathfrak{g} \rangle.$$

因此在 $U(\mathfrak{g})$ 中有关系 $xy - yx = [x, y]$. 对有序基 $x_1 < \cdots < x_n$, 将定义关系写成重排规则 $x_j x_i \mapsto x_i x_j + [x_j, x_i]$, $j > i$. 也就是说, 凡是出现逆序因子 $x_j x_i$, 就将其改写为有序项 $x_i x_j$ 加上一个一次项 $[x_j, x_i] \in \mathfrak{g}$. 每次使用该规则, 都会减少单词中的逆序程度, 至多产生次数更低的项. 因此, 反复重排后, 任意单词都可以写成有序单项式 $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ 的线性组合. 所以这些有序单项式张成 $U(\mathfrak{g})$. 下面说明这种标准形与重排路径无关. 唯一需要检查的本质歧义来自三重逆序单词 $x_k x_j x_i$, $k > j > i$. 它可以先重排左侧的 $x_k x_j$, 也可以先重排右侧的 $x_j x_i$. 两种重排路径最终结果之差正比于

$$[x_k, [x_j, x_i]] + [x_j, [x_i, x_k]] + [x_i, [x_k, x_j]].$$

但这正是 Lie 代数的 Jacobi 恒等式, 因此该差为零. 故所有本质歧义均可消去, 标准形唯一. 于是有序单项式不仅张成 $U(\mathfrak{g})$, 而且线性无关. 因此它们构成 $U(\mathfrak{g})$ 的一组基. $\square$

Definition 14.5 [Lie 代数的同态与同构]. 设 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 是 Lie 代数, 线性映射 $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ 称为 **Lie 代数同态**, 若其保持 Lie 括号, 即 $f[x, y] = [fx, fy]$, $\forall x, y \in \mathfrak{g}$; 若 f 是线性同构, 则还称为 **Lie 代数同构**. **Ado 定理 (Ado's theorem)** 指出, 任意有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, 均存在有限维线性空间 V , 以及单 Lie 代数同态 $\phi: \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(V)$, 使得

$$\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)] = \phi(x)\phi(y) - \phi(y)\phi(x).$$

Note. Ado 定理十分深刻, 没有本质简短的证明. 完整证明可以阅读[陶哲轩的博客](#).

Lemma 14.1. Lie 群 G 上的全体左不变矢量场 $L(G)$ 以对易子为 Lie 括号成为 Lie 代数, 左平移映射是 $L(G)$ 上的平凡同构.

Proof. 我们回顾, 推前是保持对易子的, 原因如下:

$$\begin{aligned} [F_*X, F_*Y]f &= (F_*X)((F_*Y)f) - (F_*Y)((F_*X)f) \\ &= (F_*X)\left(Y(f \circ F) \circ F^{-1}\right) - (F_*Y)\left(X(f \circ F) \circ F^{-1}\right) \\ &= X\left(\left(Y(f \circ F) \circ F^{-1}\right) \circ F\right) \circ F^{-1} - Y\left(\left(X(f \circ F) \circ F^{-1}\right) \circ F\right) \circ F^{-1} \\ &= X(Y(f \circ F)) \circ F^{-1} - X(Y(f \circ F)) \circ F^{-1} \end{aligned}$$

14.1. Lie 群中的基本概念

$$= F_* [X, Y] f.$$

当 F 取左平移映射 L_g 时, $L_{g*} [X, Y] = [L_{g*} X, L_{g*} Y] = [X, Y]$ □

同构 $L(G) \cong T_e G$ 允许我们借用 $L(G)$ 上的对易子定义 T_e 上的 Lie 括号:

$$[x, y] := [X, Y]_e, \quad x, y \in T_e G, \quad X, Y \in L(G) \text{ 是 } x, y \text{ 诱导的左平移不变矢量场.} \quad (14.1)$$

容易验证, $T_e G$ 凭借如上定义的 Lie 括号成为 Lie 代数, 称为 **Lie 群 G 的 Lie 代数**, 记作 $\mathfrak{g}$, 也就是当上文给出 Lie 群 G 后, 我们用 Gothic 体 $\mathfrak{g} \equiv T_e G$ 表示其 Lie 代数, 例如 $\mathfrak{su}(3) = T_e \mathrm{SU}(3)$.

Proposition 14.5. 设 $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$ 是矩阵 Lie 群, 其 Lie 代数为

$$\mathfrak{g} = T_I G \subseteq T_I \mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{End}(V).$$

则在自然识别 $\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{End}(V)$ 下, $\mathfrak{g}$ 上的 Lie 括号为对易子:

$$[A, B] = A \circ B - B \circ A, \quad A, B \in \mathfrak{g}.$$

若选取 V 的一组基, 则写作 $[A, B] = AB - BA$.

Remark. 这个命题的重要意义在于, 矩阵 Lie 群的 Lie 代数上的 Lie 括号就是对易子.

Proof. 取 $A \in \mathfrak{g}$. 由 A 诱导的左不变矢量场记为 X^A , 即 $X_g^A := d(L_g)_I(A)$, $g \in G$, 其中 $L_g : G \rightarrow G$, $h \mapsto gh$ 是左平移映射. 因为 G 是矩阵 Lie 群, 左平移就是矩阵左乘, 故 $X_g^A = gA$. 同理, 对 $B \in \mathfrak{g}$, 有 $X_g^B = gB$. 将 X^A, X^B 视为 $\mathrm{End}(V)$ 中的矢量场的限制. 令 $\tilde{X}^A(g) = gA$, $\tilde{X}^B(g) = gB$. 则对任意 $H \in \mathrm{End}(V)$, $d(\tilde{X}^A)_g(H) = HA$, $d(\tilde{X}^B)_g(H) = HB$. 因此

$$\begin{aligned} [X^A, X^B]_g &= d(\tilde{X}^B)_g(X_g^A) - d(\tilde{X}^A)_g(X_g^B) = d(\tilde{X}^B)_g(gA) - d(\tilde{X}^A)_g(gB) \\ &= (gA)B - (gB)A = g(AB - BA). \end{aligned}$$

特别地, 在单位元 I 处, $[X^A, X^B]_I = AB - BA$. 由 Lie 群的 Lie 代数括号定义, $[A, B] := [X^A, X^B]_I$. 故 $[A, B] = AB - BA$. □

Example 32. 考虑 $\mathbb{R}^3$ 上的矢量叉乘 $[x, y] := x \times y$, 证明其构成 Lie 代数并与 $\mathfrak{su}(2)$ 同构.

Chapter 14. Lie 群

Proof. 矢量的集合自然成为线性空间, 下面说明叉乘符合 *Lie* 括号的定义: 因为 $(a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2) \times \mathbf{y} = a\mathbf{x}_1 \times \mathbf{y} + b\mathbf{x}_2 \times \mathbf{y}$, 另一侧同理, 所以满足线性; 因为 $\mathbf{y} \times \mathbf{x} = -\mathbf{x} \times \mathbf{y}$, 所以满足反对易性; 因为

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) + \mathbf{y} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) + \mathbf{z} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) \mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{z} + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{z} - (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) \mathbf{x} + (\mathbf{z} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{x} - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{y} = 0,$$

所以满足 *Jacobi* 恒等式, 从而确实构成 *Lie* 代数.

我们先证明如下公式: 对 $t = 0$ 附近局部可逆的矩阵 $A = A(t)$, 有

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \det A(t) \operatorname{Tr} \left(A(t)^{-1} A'(t) \right). \quad (14.2)$$

考虑任意矩阵 H ,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \det(1 + tH) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \det \begin{pmatrix} 1 + tH_{11} & \cdots & tH_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ tH_{n1} & \cdots & 1 + tH_{nn} \end{pmatrix} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left(1 + t(H_{11} + \cdots + H_{nn}) + \mathcal{O}(t^2) \right) \right|_{t=0} \\ &= H_{11} + \cdots + H_{nn} = \operatorname{tr} H. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \det A(t) \right|_{t=t_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det A(t_0 + h) - \det A(t_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det(A_0 + hA'_0 + o(h)) - \det A_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det(A_0(I + hA_0^{-1}A'_0 + o(h))) - \det A_0}{h} \\ &= \det A_0 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det(I + hA_0^{-1}A'_0 + o(h)) - 1}{h} \\ &= \det A_0 \operatorname{tr} \left(A_0^{-1} A'_0 \right) \\ &= \det A(t_0) \operatorname{tr} \left(A(t_0)^{-1} A'(t_0) \right). \end{aligned}$$

由如上公式, 我们能计算 $\mathfrak{su}(2)$ 的具体内容. 由 $\mathrm{SU}(2) = \{U \in M_2(\mathbb{C}) : U^\dagger U = 1, \det U = 1\}$, 取过单位元 1 的光滑曲线 $U(t) \in \mathrm{SU}(2)$, $U(0) = 1$, 我们要计算全部可能的 $U'(0)$. 由 $U(t)^\dagger U(t) =$

14.1. Lie 群中的基本概念

1, 求导得

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} U(t)^\dagger U(t) = U'(0)^\dagger U(0) + U(0)^\dagger U'(0) = 0.$$

即 $U'(0)^\dagger + U'(0) = 0$. 对 $\det U(t) = 1$ 求导数,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det U(t) = \det U(0) \operatorname{Tr} \left(U(0)^{-1} U'(0) \right) = 0,$$

即 $\operatorname{Tr}(U'(0)) = 0$. 因此

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in M_2(\mathbb{C}) : X^\dagger = -X, \operatorname{Tr}(X) = 0\},$$

即反 *Hermite* 无迹二阶复矩阵. 易知其中元素形如 $X = \begin{pmatrix} ix & u + iv \\ -u + iv & -ix \end{pmatrix}$, 所以 $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{su}(2) = 3$.

容易尝试出 $i\sigma_x, i\sigma_y, i\sigma_z$ 构成其一组基. 因为 $\mathfrak{su}(2)$ 是矩阵 *Lie* 代数, 从而其 *Lie* 代数就是对易子. 下面说明

$$\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}} \mapsto -\frac{i}{2}\sigma_x, -\frac{i}{2}\sigma_y, -\frac{i}{2}\sigma_z$$

是所欲构造的 *Lie* 代数同构:

$$\epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} \mapsto -\frac{1}{4} [\sigma_i, \sigma_j] = -\frac{1}{4} (\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i) = \epsilon_{ijk} \left(-\frac{i}{2} \sigma_k \right).$$

这样就证明了叉乘 *Lie* 代数与 $\mathfrak{su}(2)$ 是 *Lie* 代数同构的. □

Example 33. 考虑 *Lorentz* 群 $\mathrm{SO}(2, 1) := \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid M^T \Lambda M = \Lambda, \det M = 1\}$, $\Lambda = \operatorname{diag}(1, 1, -1)$, 求出 $\mathfrak{so}(2, 1)$, 并找一组基后写出结构常数.

Solution. 设 $M(t)$ 是 $\mathrm{SO}(2, 1)$ 中过单位元的光滑曲线, 并且满足 $M(0) = I$, $M'(0) = X$. 由 $M(t)^T \Lambda M(t) = \Lambda$ 对 t 求导, 得

$$M'(t)^T \Lambda M(t) + M(t)^T \Lambda M'(t) = 0.$$

令 $t = 0$, 得 $X^T \Lambda + \Lambda X = 0$. 因此

$$\mathfrak{so}(2, 1) = \{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid X^T \Lambda + \Lambda X = 0\}.$$

另外, 由 $\det M(t) = 1$ 可得 $\operatorname{Tr} X = 0$, 但这个条件已经由 $X^T \Lambda + \Lambda X = 0$ 推出.

Chapter 14. Lie 群

令 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$. 代入条件 $X^T \Lambda + \Lambda X = 0$ 得到 $x_{11} = x_{22} = x_{33} = 0$, $x_{21} = -x_{12}$,

$x_{31} = x_{13}$, $x_{32} = x_{23}$. 因此 $X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. 所以

$$\mathfrak{so}(2, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

取基

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

则任意 $X \in \mathfrak{so}(2, 1)$ 可唯一写成 $X = aJ + bK_1 + cK_2$. 由于矩阵 Lie 群的 Lie 代数括号是矩阵对易子, $[A, B] = AB - BA$, 直接计算得 $[J, K_1] = -K_2$, $[J, K_2] = K_1$, $[K_1, K_2] = J$. 若记 $X_1 = J$, $X_2 = K_1$, $X_3 = K_2$, 并采用约定 $[X_\mu, X_\nu] = C^\lambda_{\mu\nu} X_\lambda$, 则非零结构常数为 $C^3_{12} = -1$, $C^2_{13} = 1$, $C^1_{23} = 1$, 以及由反对称性给出的 $C^3_{21} = 1$, $C^2_{31} = -1$, $C^1_{32} = -1$. $\square$

Prop. 14.1 告知我们, $L(G)$ 和 $T_e(G)$ 是 Lie 代数同构的. 总结起来可知, 任给一个 Lie 群 G , 凭如上定义总能找到给出一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$; 那么给出一个 Lie 代数, 能否自然且唯一地得到一个 Lie 群呢? 对这个问题的回答是之后才证明的 Lie 第三定理 **Thm. 14.2**.

Definition 14.6 [单参数子群 (one-parameter subgroup)]. 光滑曲线 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$ 称作 Lie 群 G 的单参数子群, 若

$$\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t), \quad \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

Remark. γ 实际上是 $\mathbb{R}$ 到 G 的 Lie 群同态.

14.1. Lie 群中的基本概念

Proposition 14.6. Lie 群 G 的任意左不变向量场 X 均完备, 即其任意不可延积分曲线的参数均取遍 $\mathbb{R}$.

Proof. 因 X 光滑, 由常微分方程的局部存在唯一性, 存在 $\varepsilon > 0$ 以及一条积分曲线 $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$, $\sigma(0) = e$. 由左不变性, 对任意 $g \in G$, $t \mapsto g\sigma(t)$ 是过 g 的积分曲线. 因此每一点附近都有统一长度的积分曲线区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$. 设 $\gamma : (a, b) \rightarrow G$ 是 X 的一条不可延积分曲线. 若 $b < +\infty$, 取 $t_0 \in (a, b)$ 使得 $b - t_0 < \varepsilon$. 定义 $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t_0)\sigma(t - t_0)$, $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. 则 $\tilde{\gamma}$ 是过 $\gamma(t_0)$ 的积分曲线. 又 γ 本身在 t_0 处也经过 $\gamma(t_0)$, 故由积分曲线唯一性, $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ 在二者定义域的公共部分上成立. 因而可以用 $\tilde{\gamma}$ 将 γ 延拓到 b 之后, 这与 γ 不可延矛盾. 故 $b = +\infty$. 同理, 若 $a > -\infty$, 也可以从左端点继续延拓, 矛盾. 因此 $(a, b) = \mathbb{R}$. 所以 X 完备. $\square$

Proposition 14.7. 设 $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ 是 Lie 群 G 上左不变向量场 X 的满足 $\gamma(0) = e$ 的积分曲线, 则 γ 是 G 的单参数子群.

Proof. 只需证明 $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$. 固定 $s \in \mathbb{R}$. 考虑两条曲线 $\alpha(t) := \gamma(s+t)$, $\beta(t) := \gamma(s)\gamma(t)$. 首先, $\alpha(0) = \gamma(s)$, $\beta(0) = \gamma(s)\gamma(0) = \gamma(s)$. 其次, α 显然仍是 X 的积分曲线. 对 β 有

$$\beta'(t) = (L_{\gamma(s)})_* \gamma'(t) = (L_{\gamma(s)})_* X_{\gamma(t)} = X_{\gamma(s)\gamma(t)} = X_{\beta(t)},$$

其中用到了 X 的左不变性. 因此 β 也是 X 的积分曲线. 于是 α 与 β 是两条过同一点 $\gamma(s)$ 的积分曲线. 由积分曲线唯一性, $\alpha(t) = \beta(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. 即 $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$. 所以 γ 是单参数子群. $\square$

Proposition 14.8. 设单参数子群 $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ 在恒等元 e 的切矢量为 $\mathbf{x}$, 则 $\gamma(t)$ 是 $\mathbf{x}$ 诱导的左不变向量场 X 的积分曲线.

Proof. 设 $\mathbf{x} = \gamma'(0) \in T_e G$. 由 $\mathbf{x}$ 诱导的左不变向量场 X 满足 $X_g = (L_g)_* \mathbf{x}$, $\forall g \in G$. 由于 γ 是单参数子群, 对任意 $t, h \in \mathbb{R}$ 有

$$\gamma(t+h) = \gamma(t)\gamma(h) = L_{\gamma(t)}(\gamma(h)).$$

对 h 在 0 处求导, 得

$$\gamma'(t) = (L_{\gamma(t)})_* \gamma'(0) = (L_{\gamma(t)})_* \mathbf{x} = X_{\gamma(t)}.$$

因此 γ 是左不变向量场 X 的积分曲线. $\square$

由此可知, 左不变向量场 $L(G)$ 和单参数子群 $\{\gamma\}$ 之间存在一一对应关系, 并知 $T_e G$ 和 $\{\gamma\}$ 之间也存在一一对应关系, 故而称 $\mathfrak{g}$ 中的每一个元素为**无穷小生成元 (infinitesimal generator)**.

Chapter 14. Lie 群

Definition 14.7 [指数映射 (exponential map)]. Lie 群上的指数映射 $\exp : T_e G \rightarrow G$ 定义为

$$\exp(x) := \gamma(1), \quad \forall x \in T_e G,$$

其中 $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ 是 x 诱导的单参数子群.

Proposition 14.9. Lie 群 G 上的指数映射满足 $\exp(sx) = \gamma(s)$, $\forall s \in \mathbb{R}, \forall x \in T_e G$.

Proof. 固定 $x \in T_e G$, 设 $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ 是由 x 诱导的单参数子群, 即 $\gamma(0) = e$, $\gamma'(0) = x$. 对任意 $s \in \mathbb{R}$, 定义 $\eta(t) := \gamma(st)$. 由于 γ 是单参数子群, 有

$$\eta(t_1 + t_2) = \gamma(s(t_1 + t_2)) = \gamma(st_1 + st_2) = \gamma(st_1)\gamma(st_2) = \eta(t_1)\eta(t_2),$$

因此 η 也是 G 的单参数子群. 又由链式法则, $\eta'(0) = s\gamma'(0) = sx$. 所以 η 正是由 sx 诱导的单参数子群. 根据指数映射的定义, $\exp(sx) = \eta(1) = \gamma(s)$. $\square$

Proposition 14.10. 设 $\phi : \mathbb{R} \times G \rightarrow G$ 是 $x \in T_e G$ 诱导的左不变向量场 X 诱导的单参数微分同胚群, 则

$$\phi_t(g) = g \exp(tx), \quad \forall g \in G, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Proof. 记 $\gamma(t) := \exp(tx)$. 则 γ 是由 x 诱导的单参数子群, 因而是 X 经过单位元 e 的积分曲线, 即 $\gamma(0) = e$, $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$. 固定 $g \in G$, 定义曲线 $c_g(t) := g\gamma(t) = g \exp(tx)$. 显然 $c_g(0) = g\gamma(0) = g$. 又因为 X 是左不变向量场, 有 $X_{g\gamma(t)} = dL_g(X_{\gamma(t)})$. 另一方面, 由链式法则,

$$c'_g(t) = \frac{d}{dt} L_g(\gamma(t)) = dL_g(\gamma'(t)) = dL_g(X_{\gamma(t)}).$$

因此 $c'_g(t) = X_{c_g(t)}$. 所以 $c_g(t) = g \exp(tx)$ 是左不变向量场 X 经过 g 的积分曲线. 由积分曲线的唯一性可知, $\phi_t(g) = c_g(t) = g \exp(tx)$. $\square$

Definition 14.8 [Lie 变换群 (Lie group of transformations)]. 设 G 是 Lie 群, M 为流形, 光滑映射 $\sigma : G \times M \rightarrow M$ 称为 M 上的 Lie 变换群, 若

- $\forall g \in G, \sigma_g : M \rightarrow M$ 是微分同胚;
- $\sigma_{gh} = \sigma_g \circ \sigma_h, \forall g, h \in G$.

14.1. Lie 群中的基本概念

从 Lie 群 G 到 Lie 变换群 $\{\sigma_g\}_{g \in G}$ 的同态 σ 称为 G 的**实现 (realization)** 或**表示 (representation)**, M 称为**实现空间**或**表示空间**.

Remark. Lie 群的实现本质是一种群作用, 可以具备忠实性、自由性、传递性、齐性 (回顾 Def. 2.7). 根据拓扑群的齐性 Prop. 13.2 可知, Lie 群到自身的左平移实现 (左正则表示) 是齐性的.

Proposition 14.11. 配以度规 g_{ab} 的流形 M 的等度规变换群 G 的 Lie 代数 $T_e G$ 同构于其上全体 Killing 矢量场 $\mathcal{K}$ 的子代数; 当任意 Killing 矢量场均完备时, $T_e G \cong \mathcal{K}$.

Proof. 记 $\mathfrak{g} = T_e G$. 对任意 $A \in \mathfrak{g}$, 定义 M 上的向量场 A_M 为 $(A_M)_p := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sigma_{\exp(tA)}(p)$, $p \in M$. 这里 $\sigma_{\exp(tA)}$ 是一族等距变换, 因而 $\sigma_{\exp(tA)}^* g = g$. 对 t 在 0 处求导, 得

$$\mathcal{L}_{A_M} g = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sigma_{\exp(tA)}^* g = 0.$$

因此 A_M 是 Killing 矢量场. 于是得到一个线性映射 $\mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{K}$, $A \mapsto A_M$. 由于 G 作为等距变换群作用在 M 上是有效的, 若 $A_M = 0$, 则 $\sigma_{\exp(tA)}$ 对所有 $p \in M$ 均为常值流, 从而 $\sigma_{\exp(tA)} = \text{id}_M$. 因作用有效, 得 $\exp(tA) = e$, 从而 $A = 0$. 故该映射单射. 注意在左作用约定 $\sigma_{gh} = \sigma_g \circ \sigma_h$ 下, 映射 $A \mapsto A_M$ 关于 Lie 括号是反同态: $[A_M, B_M] = -[A, B]_M$. 因而若改取 $\iota(A) := -A_M$, 则有 $[\iota(A), \iota(B)] = \iota([A, B])$. 所以 $T_e G$ 同构于 $\mathcal{K}$ 的一个 Lie 子代数.

反过来, 设 $X \in \mathcal{K}$ 是完备 Killing 矢量场, 其全局流记为 ϕ_t . 因为 $\mathcal{L}_X g = 0$, 所以

$$\frac{d}{dt} \phi_t^* g = \phi_t^* (\mathcal{L}_X g) = 0.$$

又 $\phi_0 = \text{id}_M$, 故 $\phi_t^* g = g$. 因此每个 ϕ_t 都是等距变换, 即 $\phi_t \in \text{Isom}(M, g)$. 若 $G = \text{Isom}(M, g)$, 则 $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ 是 G 中的一参数子群, 从而对应某个 $A \in T_e G$. 由构造知其诱导的 Killing 矢量场正是 X . 因此当任意 Killing 矢量场均完备时, $T_e G \cong \mathcal{K}$. $\square$

Definition 14.9 [伴随表示 (adjoint representation)]. 设 G 是 Lie 群, $\mathfrak{g}$ 是其 Lie 代数, $g \in G$, 定义 $c_g : G \rightarrow G$, $h \mapsto ghg^{-1}$, 其给出线性同构 $c_{g*,e} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, 称为 g 对 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的伴随作用, 记作 $\text{Ad}_g := c_{g*,e}$, 同态 $\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$, $g \mapsto \text{Ad}_g$ 就称为 Lie 群 G 的伴随表示, 并记其于单位元的微分映射为 $\text{ad} := d(\text{Ad})_e : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(\mathfrak{g})$, $x \mapsto \text{ad}_x$, 叫做 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示. 当 $\mathfrak{g}$ 有限维度, 定义 $K(x, y) := \text{tr}(\text{ad } x \circ \text{ad } y)$, 称作 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型 (Killing form) 或 Cartan 内积 (Cartan inner product).

Chapter 14. Lie 群

Proposition 14.12. 设 G 是有限维 Lie 群, $\mathfrak{g}$ 是其 Lie 代数, Ad 是其伴随表示, ad 是其 Lie 代数的伴随表示, $K(\cdot, \cdot)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型, 则对 $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$, 有

- 线性 $\text{ad}(\mu x + \nu y) = \mu \text{ad } x + \nu \text{ad } y$, $\text{ad}_x(\mu y + \nu z) = \mu \text{ad}_x y + \nu \text{ad}_x z$;
- ad_x 可用抽象指标表达 $(\text{ad}_x)^a{}_c = x^b C^a{}_{bc}$, 其中 $C^a{}_{bc}$ 为结构张量;
- $\text{ad}_x y = [x, y]$;
- $\text{ad}[x, y] = [\text{ad } x, \text{ad } y] = \text{ad } x \circ \text{ad } y - \text{ad } y \circ \text{ad } x$;
- $\ker \text{ad}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的中心, 为 $\mathfrak{g}$ 的理想;
- $K(\text{ad}_x y, z) + K(y, \text{ad}_x z) = 0$;
- 若 $\phi \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$, 则 $K(\phi(x), \phi(y)) = K(x, y)$;
- K 可视为 $(0, 2)$ -型张量 K_{ab} , 称为 **Cartan 度规 (Cartan metric)**, 用其给结构张量降指标后得到 C_{abc} , 则 $C_{abc} = C_{[abc]}$;
- $\ker K := \{X \in \mathfrak{g} : K(X, Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\}$, 则 $\ker K \leq \mathfrak{g}$, 且包含了 $\mathfrak{g}$ 的全部 Abel 理想.

Proof. (1) 前两条只是 Lie 括号的线性. 事实上, 由伴随表示的无穷小形式可知 $\text{ad}_x y = [x, y]$. 因此 $\text{ad}_{\mu x + \nu y} z = [\mu x + \nu y, z] = \mu [x, z] + \nu [y, z]$, 从而 $\text{ad}_{\mu x + \nu y} = \mu \text{ad}_x + \nu \text{ad}_y$. 同理, $\text{ad}_x(\mu y + \nu z) = \mu \text{ad}_x y + \nu \text{ad}_x z$.

(2) 取一组基 $\{e_a\}$, 并写 $x = x^b e_b$, $y = y^c e_c$. 由于 $[e_b, e_c] = C^a{}_{bc} e_a$, 有 $[x, y]^a = x^b y^c C^a{}_{bc}$. 另一方面, $(\text{ad}_x y)^a = (\text{ad}_x)^a{}_c y^c$, 故 $(\text{ad}_x)^a{}_c = x^b C^a{}_{bc}$.

(3) 下面说明 $\text{ad}_x y = [x, y]$. 由定义, $\text{ad}_x y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(tx)} y$. 又 $\text{Ad}_{\exp(tx)} y$ 是曲线 $s \mapsto e^{tx} e^{sy} e^{-tx}$ 在 $s = 0$ 处的切矢量. 由 Lie 括号作为左不变矢量场对易子的定义, 对 t 在 0 处微分即得到 $\text{ad}_x y = [x, y]$.

(4) 由 Jacobi 恒等式, $\text{ad}_{[x, y]} z = [[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]]$, 则

$$\text{ad}_{[x, y]} = \text{ad}_x \circ \text{ad}_y - \text{ad}_y \circ \text{ad}_x = [\text{ad}_x, \text{ad}_y].$$

(5) 由 $\text{ad}_x y = [x, y]$, $x \in \ker \text{ad}$ 当且仅当 $[x, y] = 0$ 对任意 $y \in \mathfrak{g}$ 成立, 这正是 $\mathfrak{g}$ 的中心 $Z(\mathfrak{g})$. 若 $x \in Z(\mathfrak{g})$, 则任意 $y \in \mathfrak{g}$ 有 $[y, x] = 0 \in Z(\mathfrak{g})$, 故 $Z(\mathfrak{g})$ 是理想.

(6) 由上面的同态性质, $\text{ad}_{[x, y]} = [\text{ad}_x, \text{ad}_y]$. 因此 $K([x, y], z) = \text{tr}([\text{ad}_x, \text{ad}_y] \text{ad}_z)$. 利用迹的循环不变性, 得 $\text{tr}([\text{ad}_x, \text{ad}_y] \text{ad}_z) = \text{tr}(\text{ad}_y [\text{ad}_z, \text{ad}_x]) = -K(y, [x, z])$. 即 $K(\text{ad}_x y, z) + K(y, \text{ad}_x z) = 0$.

(7) 若 $\phi \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$, 则 $\text{ad}_{\phi(x)} \circ \phi = \phi \circ \text{ad}_x$, 因而 $\text{ad}_{\phi(x)} = \phi \circ \text{ad}_x \circ \phi^{-1}$. 于是

$$K(\phi(x), \phi(y)) = \text{tr}(\phi \text{ad}_x \phi^{-1} \phi \text{ad}_y \phi^{-1}) = \text{tr}(\phi \text{ad}_x \text{ad}_y \phi^{-1}) = K(x, y).$$

14.1. Lie 群中的基本概念

(8) 记 $K_{ab} := K(e_a, e_b)$, 并定义 $C_{abc} := K_{ad}C^d_{bc} = K(e_a, [e_b, e_c])$. 由 Lie 括号反对称性, 立刻有 $C_{abc} = -C_{acb}$. 又由 Killing 型的不变性, $0 = K([e_b, e_c], e_a) + K(e_c, [e_b, e_a]) = C_{abc} - C_{cab}$, 故 $C_{abc} = C_{cab}$. 这说明 C_{abc} 对循环置换不变, 且对最后两个指标反对称, 从而对任意两个指标交换均反号. 因此 $C_{abc} = C_{[abc]}$.

(9) 先证 $\ker K$ 是理想. 取 $X \in \ker K$, $A \in \mathfrak{g}$. 对任意 $Y \in \mathfrak{g}$, 由 Killing 型的不变性, $K([A, X], Y) = -K(X, [A, Y]) = 0$. 因此 $[A, X] \in \ker K$. 由 A 的任意性, 得 $\ker K \trianglelefteq \mathfrak{g}$. 再设 $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ 是 Abel 理想. 对任意 $X \in \mathfrak{a}$ 和 $Y \in \mathfrak{g}$, 考虑线性变换 $T := \text{ad}_X \text{ad}_Y$. 因为 $\mathfrak{a}$ 是理想, $\text{ad}_X(\mathfrak{g}) = [X, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}$. 又因为 $\mathfrak{a}$ 是 Abel 的, 对任意 $Z \in \mathfrak{a}$ 有 $\text{ad}_X Z = [X, Z] = 0$. 所以 $T(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$, 且 $T|_{\mathfrak{a}} = 0$. 因而 $T^2 = 0$, 从而 T 是幂零线性变换, 故 $\text{tr} T = 0$. 于是 $K(X, Y) = \text{tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y) = 0$. 由 Y 的任意性, 得 $X \in \ker K$. 因此 $\mathfrak{a} \subseteq \ker K$. $\square$

Proposition 14.13. 设 H 是连通 Lie 群 G 的连通 Lie 子群, 则 $H \trianglelefteq G$ 当且仅当 $T_e H \trianglelefteq T_e G$, 即 H 正规当且仅当其 Lie 代数是理想.

Proof. 记 $\mathfrak{g} := T_e G$, $\mathfrak{h} := T_e H$. 先设 $H \trianglelefteq G$. 对任意 $g \in G$, 共轭映射 $c_g : G \rightarrow G, x \mapsto gxg^{-1}$ 将 H 映到自身, 即 $c_g(H) = H$. 因此其在单位元处的微分满足 $(c_g)_{*,e}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}$. 但 $(c_g)_{*,e} = \text{Ad}_g$, 所以 $\text{Ad}_g \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}, \forall g \in G$. 对 $g = \exp(tX)$ 求导, 其中 $X \in \mathfrak{g}$, 得 $\text{ad}_X \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}$. 即 $[X, Y] \in \mathfrak{h}, \forall X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}$. 因此 $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g}$.

反过来, 设 $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. 则对任意 $X \in \mathfrak{g}$, 有 $\text{ad}_X \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}$. 因此 $\text{Ad}_{\exp X} \mathfrak{h} = e^{\text{ad}_X} \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$. 由于 G 连通, G 由形如 $\exp X$ 的元素生成, 故 $\text{Ad}_g \mathfrak{h} = \mathfrak{h}, \forall g \in G$. 任取 $g \in G$. 共轭子群 gHg^{-1} 是 G 的连通 Lie 子群, 其 Lie 代数为 $T_e(gHg^{-1}) = \text{Ad}_g \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$. 而连通 Lie 子群由其 Lie 代数唯一决定, 所以 $gHg^{-1} = H$. 因此 $H \trianglelefteq G$. $\square$

Proposition 14.14. 设 G 是连通 Lie 群, 则存在单连通 Lie 群 $\tilde{G}$ 及覆盖同态 $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$. 这样的 $\tilde{G}$ 在覆盖同态意义下唯一. 因而, 若两个单连通 Lie 群具有同构的 Lie 代数, 则它们作为 Lie 群同构, 从而微分同胚.

Proof. 取 G 作为拓扑空间的万有覆盖 $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$, 并取 $\tilde{e} \in \tilde{G}$ 使得 $\pi(\tilde{e}) = e$. 由于 π 是覆盖映射, 可在 $\tilde{G}$ 上唯一赋予光滑结构, 使得 π 成为局部微分同胚.

下面在 $\tilde{G}$ 上构造群结构. 考虑映射

$$m \circ (\pi \times \pi) : \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow G,$$

其中 $m : G \times G \rightarrow G$ 是 G 的乘法. 因为 $\tilde{G} \times \tilde{G}$ 单连通, 该映射唯一提升为

$$\tilde{m} : \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$$

Chapter 14. Lie 群

且满足 $\tilde{m}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$, $\pi \circ \tilde{m} = m \circ (\pi \times \pi)$. 记 $\tilde{x}\tilde{y} := \tilde{m}(\tilde{x}, \tilde{y})$. 类似地, 由 G 上的取逆映射 $\iota: G \rightarrow G$ 可唯一提升出 $\tilde{\iota}: \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$, $\tilde{\iota}(\tilde{e}) = \tilde{e}$, 满足 $\pi \circ \tilde{\iota} = \iota \circ \pi$. 记 $\tilde{x}^{-1} := \tilde{\iota}(\tilde{x})$.

群公理由提升的唯一性给出. 例如, $(\tilde{x}\tilde{y})\tilde{z}$ 与 $\tilde{x}(\tilde{y}\tilde{z})$ 作为从 $\tilde{G}^3$ 到 $\tilde{G}$ 的映射, 复合 π 后都等于 $\pi(\tilde{x})\pi(\tilde{y})\pi(\tilde{z})$, 且在 $(\tilde{e}, \tilde{e}, \tilde{e})$ 处取同一值 $\tilde{e}$, 故二者相等. 单位元与逆元性质同理. 因此 $\tilde{G}$ 成为群, 且 π 是群同态.

又因为 $\tilde{m}$ 与 $\tilde{\iota}$ 都是光滑映射, $\tilde{G}$ 是 Lie 群. 于是 $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$ 是 Lie 群之间的覆盖同态, 且 $\tilde{G}$ 单连通.

再证唯一性. 若 $q: H \rightarrow G$ 也是单连通 Lie 群 H 到 G 的覆盖同态, 则由万有覆盖的唯一性, 存在唯一覆盖微分同胚 $\Phi: \tilde{G} \rightarrow H$ 使得 $q \circ \Phi = \pi$, $\Phi(\tilde{e}) = e_H$. 只需说明 Φ 是群同态. 比较两个映射 $\tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow H$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \mapsto \Phi(\tilde{x}\tilde{y})$, 与 $(\tilde{x}, \tilde{y}) \mapsto \Phi(\tilde{x})\Phi(\tilde{y})$. 它们复合 q 后都等于 $\pi(\tilde{x})\pi(\tilde{y})$, 且在 $(\tilde{e}, \tilde{e})$ 处同取 e_H , 故由提升唯一性可知二者相等. 因此 Φ 是 Lie 群同构. 这说明 $\tilde{G}$ 在覆盖同态意义下唯一.

最后设 G_1, G_2 是两个单连通 Lie 群, 且其 Lie 代数同构: $\varphi: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$. 由 Lie 第二定理, φ 唯一积分为 Lie 群同态 $F: G_1 \rightarrow G_2$, $dF_e = \varphi$. 同理, φ^{-1} 唯一积分为 Lie 群同态 $E: G_2 \rightarrow G_1$, $dE_e = \varphi^{-1}$. 于是 $d(E \circ F)_e = \text{id}_{\mathfrak{g}_1}$, $d(F \circ E)_e = \text{id}_{\mathfrak{g}_2}$. 因为连通 Lie 群上的同态由其在单位元处的微分唯一决定, 故 $E \circ F = \text{id}_{G_1}$, $F \circ E = \text{id}_{G_2}$. 因此 F 是 Lie 群同构, 特别地 G_1 与 G_2 微分同胚. $\square$

现在谈论参数化 Lie 群. 设 Lie 群 G 中的每个元素 $g \in G$ 使用实参数 $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^n) \in \mathbb{R}^n$ 标记, 也就是 $g = g(\alpha)$. 我们考虑群乘法

$$c(\gamma) = a(\alpha)b(\beta), \quad a, b, c \in G,$$

积 c 使用了参数 $\gamma = \gamma(\alpha, \beta)$ 标记, 也就是说, 乘积的群参数完全取决于两个乘积因子的群参数, 给出方式由一个函数 $\varphi(\cdot, \cdot)$ 确定, 即

$$\gamma = \varphi(\alpha, \beta).$$

这样的 φ 就叫做合成函数.

Proposition 14.15. 合成函数满足如下性质: 对任意的 $g(\alpha)$,

- 存在单位元 $e(\alpha^0) = e(0)$ 使得 $eg = ge = g$, 从而 $\varphi(0, \alpha) = \varphi(\alpha, 0) = \alpha$;
- 存在唯一逆元 $g^{-1}(\bar{\alpha})$, 使得 $gg^{-1} = g^{-1}g = e$, 从而 $\varphi(\alpha, \bar{\alpha}) = \varphi(\bar{\alpha}, \alpha) = 0$;
- 结合律 $\varphi(\varphi(\alpha, \beta), \gamma) = \varphi(\alpha, \varphi(\beta, \gamma))$, $\forall \beta, \gamma$;
- 当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, $\bar{\alpha} = -\alpha + \mathcal{O}(|\alpha|^2)$;
- 当 $\alpha, \beta \rightarrow 0$ 时, $\varphi(\alpha, \beta) = \alpha + \beta + \mathcal{O}(|\alpha|^2, |\beta|^2, |\alpha \cdot \beta|)$.

14.1. Lie 群中的基本概念

Proof. 取单位元 e 附近的局部坐标, 使得 $e = g(0)$. 群乘法 $m : G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto ab$ 在坐标下诱导光滑映射 $\varphi(\alpha, \beta)$ 满足 $g(\varphi(\alpha, \beta)) = g(\alpha)g(\beta)$. 由单位元性质 $eg(\alpha) = g(\alpha)e = g(\alpha)$, 得 $\varphi(0, \alpha) = \varphi(\alpha, 0) = \alpha$.

由逆元存在唯一性, 存在唯一参数 $\bar{\alpha}$ 使得 $g(\alpha)g(\bar{\alpha}) = g(\bar{\alpha})g(\alpha) = e$, 因而 $\varphi(\alpha, \bar{\alpha}) = \varphi(\bar{\alpha}, \alpha) = 0$.

由群乘法结合律 $(g(\alpha)g(\beta))g(\gamma) = g(\alpha)(g(\beta)g(\gamma))$, 写成参数形式, 即得 $\varphi(\varphi(\alpha, \beta), \gamma) = \varphi(\alpha, \varphi(\beta, \gamma))$.

下面考察单位元附近的展开. 因为 $\varphi(\alpha, 0) = \alpha, \varphi(0, \beta) = \beta$, 所以 $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(0, 0) = I, \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}(0, 0) = I$. 因此由 Taylor 展开,

$$\varphi(\alpha, \beta) = \alpha + \beta + \mathcal{O}(|\alpha|^2, |\beta|^2, |\alpha||\beta|).$$

最后令 $\bar{\alpha} = \psi(\alpha)$. 由 $\varphi(\alpha, \psi(\alpha)) = 0$ 在 $\alpha = 0$ 处求微分, 得 $I + d\psi_0 = 0$. 因此 $d\psi_0 = -I$, 从而 $\bar{\alpha} = -\alpha + \mathcal{O}(|\alpha|^2)$. $\square$

Lemma 14.2 [Baker–Campbell–Hausdorff 公式 (Baker–Campbell–Hausdorff formula)]. 设 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数, $x, y, z \in \mathfrak{g}$ 满足 $e^x e^y = e^z$, 则

$$z = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}[x, [x, y]] + \frac{1}{12}[y, [y, x]] + \cdots.$$

Proof. 由于 $d\exp_0 = \text{id}_{\mathfrak{g}}$, 由反函数定理可知, 指数映射在 $0 \in \mathfrak{g}$ 的某个邻域到 $e \in G$ 的某个邻域之间是微分同胚. 因此当 x, y 足够小时, $\exp(x)\exp(y)$ 仍落在 e 的一个足够小邻域中, 从而存在唯一充分小的 $z \in \mathfrak{g}$ 使得 $\exp(x)\exp(y) = \exp(z)$, 即 $z = \log(\exp(x)\exp(y))$. 下面在完备包络代数中作形式计算. 记 $A = e^x e^y - 1$. 于是

$$z = \log(1 + A) = A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 - \cdots.$$

将

$$e^x e^y = 1 + x + y + \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{6}y^3 + \cdots$$

代入 $\log(1 + A)$ 并按总次数收集. 一次项为 $x + y$. 二次项为

$$\frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}yx = \frac{1}{2}[x, y].$$

三次项经整理为

$$\frac{1}{12}(x^2y - 2xyx + yx^2) + \frac{1}{12}(y^2x - 2yxy + xy^2),$$

Chapter 14. Lie 群

即

$$\frac{1}{12}[\mathbf{x}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]] + \frac{1}{12}[\mathbf{y}, [\mathbf{y}, \mathbf{x}]].$$

更高阶项同理由 $\log(e^{\mathbf{x}}e^{\mathbf{y}})$ 的形式展开逐阶得到, 并且 BCH 定理保证这些项均可写成 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 的反复 Lie 括号. 因此

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \frac{1}{2}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] + \frac{1}{12}[\mathbf{x}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]] + \frac{1}{12}[\mathbf{y}, [\mathbf{y}, \mathbf{x}]] + \cdots.$$

□

Theorem 14.2 [Lie 定理 (Lie's theorem)]. 设 G 和 H 是 Lie 群, 则

- **第一定理:** 若 G 和 H 局部 Lie 群同构, 则 $T_e G$ 和 $T_e H$ 作为 Lie 代数同构;
- **第二定理:** 若 $T_e G$ 和 $T_e H$ 作为 Lie 代数同构, 则 G 和 H 局部同构;
- **第三定理:** 每个有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, 均存在唯一的单连通 Lie 群 G , 使得其 Lie 代数恰为 $\mathfrak{g}$.

Proof. 先证明第一定理. 设 $F: U \subseteq G \rightarrow V \subseteq H$ 是单位元附近的局部 Lie 群同构, 即 $F(e_G) = e_H$, 且在有定义时满足 $F(gh) = F(g)F(h)$. 则 $dF_{e_G}: T_{e_G} G \rightarrow T_{e_H} H$ 是线性同构. 取 $X, Y \in T_{e_G} G$, 并记它们诱导的左不变矢量场仍为 X, Y . 由于 F 局部保持群乘法, 它把 G 上的局部左平移对应到 H 上的局部左平移, 因而 $F_* X = (dF_{e_G} X)^L$, $F_* Y = (dF_{e_G} Y)^L$. 又推前映射保持矢量场对易子, 所以 $F_*[X, Y] = [F_* X, F_* Y]$. 在单位元处取值, 得 $dF_{e_G}([X, Y]) = [dF_{e_G} X, dF_{e_G} Y]$. 因此 dF_{e_G} 是 Lie 代数同构. 这证明了第一定理.

下面证明第二定理. 设 $A: T_{e_G} G \rightarrow T_{e_H} H$ 是 Lie 代数同构. 取单位元附近足够小的邻域, 使得指数映射 $\exp_G: T_{e_G} G \supseteq U_{\mathfrak{g}} \rightarrow U_G \subseteq G$, $\exp_H: T_{e_H} H \supseteq U_{\mathfrak{h}} \rightarrow U_H \subseteq H$ 都是微分同胚. 定义局部映射 $F: U_G \rightarrow U_H$, $F := \exp_H \circ A \circ \exp_G^{-1}$. 下面证明 F 是局部群同构. 由 Baker–Campbell–Hausdorff 公式, 当 X, Y 足够小时,

$$\exp_G(X) \exp_G(Y) = \exp_G(\text{BCH}_{\mathfrak{g}}(X, Y)),$$

其中

$$\text{BCH}_{\mathfrak{g}}(X, Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] + \frac{1}{12}[Y, [Y, X]] + \cdots.$$

这个级数只由 Lie 括号决定. 因为 A 保持 Lie 括号, 所以 $A \text{BCH}_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \text{BCH}_{\mathfrak{h}}(AX, AY)$. 因此

$$\begin{aligned} F(\exp_G(X) \exp_G(Y)) &= F(\exp_G(\text{BCH}_{\mathfrak{g}}(X, Y))) = \exp_H(A \text{BCH}_{\mathfrak{g}}(X, Y)) \\ &= \exp_H(\text{BCH}_{\mathfrak{h}}(AX, AY)) = \exp_H(AX) \exp_H(AY) = F(\exp_G X) F(\exp_G Y). \end{aligned}$$

14.1. Lie 群中的基本概念

所以 F 在单位元附近保持乘法, 即 G 和 H 局部同构. 这证明了第二定理.

最后证明第三定理. 存在性是 Lie 第三基本定理的核心内容: 对任意有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, Baker–Campbell–Hausdorff 公式在 0 附近定义一个局部 Lie 群结构, $X \cdot Y := \text{BCH}(X, Y)$. 这个局部 Lie 群可以整体化为一个单连通 Lie 群 G , 且其 Lie 代数同构于 $\mathfrak{g}$. 因此存在性成立.

下面证明唯一性. 设 G_1, G_2 是两个单连通 Lie 群, 且 $\text{Lie}(G_1) \cong \mathfrak{g}, \text{Lie}(G_2) \cong \mathfrak{g}$. 于是 $\text{Lie}(G_1) \cong \text{Lie}(G_2)$. 由第二定理, G_1 与 G_2 在单位元附近局部同构. 记此局部同构为 $f: U_1 \rightarrow U_2$. 因为 G_1 单连通, 局部同构可以沿任意路径唯一延拓; 单连通性保证延拓与路径选择无关. 因此 f 延拓为全局 Lie 群同态 $F: G_1 \rightarrow G_2$. 同理, f^{-1} 延拓为全局 Lie 群同态 $E: G_2 \rightarrow G_1$. 复合映射 $E \circ F: G_1 \rightarrow G_1, F \circ E: G_2 \rightarrow G_2$ 在单位元附近分别等于恒等映射. 由于连通 Lie 群上的同态由单位元附近的取值唯一决定, 故 $E \circ F = \text{id}_{G_1}, F \circ E = \text{id}_{G_2}$. 因此 F 是 Lie 群同构. 所以单连通积分群唯一. $\square$

Proposition 14.16. 设 $\mathfrak{g}$ 是有限维 Lie 代数, G 是由 $\mathfrak{g}$ 生成的单连通 Lie 群. 若 $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g}$, 则 $\mathfrak{h}$ 在 G 中生成的单连通 Lie 子群 H 是 G 的闭正规 Lie 子群, 且 G/H 的 Lie 代数自然同构于 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Proof. 记商映射为 $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. 由于 $\mathfrak{h}$ 是理想, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 自然成为 Lie 代数, 且 π 是 Lie 代数同态. 令 $\overline{G}$ 为由 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 生成的单连通 Lie 群. 因 G 单连通, π 可唯一积分为 Lie 群同态 $\Pi: G \rightarrow \overline{G}$, 且 $d\Pi_e = \pi$.

由于 $d\Pi_e$ 满射, $\Pi(G)$ 是 $\overline{G}$ 中具有全维 Lie 代数的连通 Lie 子群, 因而是开子群. 又 $\overline{G}$ 连通, 故 $\Pi(G) = \overline{G}$. 于是 $K := \ker \Pi$ 是 G 的闭正规 Lie 子群, 且 $T_e K = \ker(d\Pi_e) = \mathfrak{h}$.

令 H 为 K 的单位连通分支. 则 H 正是由 $\mathfrak{h}$ 生成的连通 Lie 子群, 并且 H 是闭 Lie 子群. 又因为 $K \trianglelefteq G$, 对任意 $g \in G, gHg^{-1}$ 仍是 K 中经过单位元的连通分支, 故 $gHg^{-1} = H$. 因此 $H \trianglelefteq G$.

最后考虑自然投影 $q: G \rightarrow G/H$. 由商 Lie 群的构造, $dq_e: \mathfrak{g} \rightarrow T_{eH}(G/H)$ 的核为 $T_e H = \mathfrak{h}$. 由线性代数第一同构定理, 得 $T_{eH}(G/H) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. 该同构保持 Lie 括号, 因为 q 是 Lie 群同态. 所以 G/H 的 Lie 代数自然同构于 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. $\square$

Definition 14.10 [可解 Lie 代数 (solvable Lie algebra), 幂零 Lie 代数 (nilpotent Lie algebra)]. 设 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数.

- 定义其导列, 也称导出理想列, 为 $\mathfrak{g}^{(0)} := \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(k+1)} := [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}], k \geq 0$, 其中对任意子空间 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}, [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] := \text{span}\{[X, Y] \mid X \in \mathfrak{a}, Y \in \mathfrak{b}\}$. 若存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$, 则称 $\mathfrak{g}$ 为可解 Lie 代数. 最小的这种 k 称为其导长度.
- 定义其下中心列为 $\mathfrak{g}^0 := \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k+1} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k], k \geq 0$. 若存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathfrak{g}^k = 0$, 则称 $\mathfrak{g}$ 为幂零 Lie 代数. 最小的这种 k 称为 $\mathfrak{g}$ 的幂零长度.

Chapter 14. Lie 群

Proposition 14.17. 设 $\mathfrak{g}$ 是有限维 Lie 代数. 若 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的两个可解理想, 则 $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ 也是可解理想. 从而 $\mathfrak{g}$ 存在唯一最大可解理想, 称为根理想 (*radical ideal*), 记作 $\text{rad } \mathfrak{g}$.

Proof. 首先, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 事实上, 对任意 $X \in \mathfrak{g}, A \in \mathfrak{a}, B \in \mathfrak{b}$, 有 $[X, A+B] = [X, A] + [X, B] \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

记 $\mathfrak{h} := \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. 因为 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{h}$ 的理想, 且 $\mathfrak{h}/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{b}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$, 而可解 Lie 代数的商代数仍可解, 所以 $\mathfrak{h}/\mathfrak{a}$ 可解.

现在用一个标准事实: 若 $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{h}$, 且 $\mathfrak{i}$ 与 $\mathfrak{h}/\mathfrak{i}$ 都可解, 则 $\mathfrak{h}$ 可解. 证明如下. 若 $(\mathfrak{h}/\mathfrak{i})^{(r)} = 0$, 则 $\mathfrak{h}^{(r)} \subseteq \mathfrak{i}$; 若 $\mathfrak{i}^{(s)} = 0$, 则进一步有 $\mathfrak{h}^{(r+s)} \subseteq \mathfrak{i}^{(s)} = 0$. 因而 $\mathfrak{h}$ 可解. 取 $\mathfrak{i} = \mathfrak{a}$, 得 $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ 可解.

最后证明最大可解理想的存在唯一性. 由于 $\mathfrak{g}$ 有限维, 任意一族理想之和可由其中有限多个理想张成. 令

$$\text{rad } \mathfrak{g} := \sum_{\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{g}, \mathfrak{r} \text{ 可解}} \mathfrak{r}.$$

这是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 且实际上等于有限多个可解理想之和. 由前面已经证明的结论, 有限多个可解理想之和仍可解, 所以 $\text{rad } \mathfrak{g}$ 本身可解. 按定义, 任意可解理想都包含在 $\text{rad } \mathfrak{g}$ 中, 故它是最大可解理想. 若另有最大可解理想 $\mathfrak{r}'$, 则 $\mathfrak{r}' \subseteq \text{rad } \mathfrak{g}$ 且 $\text{rad } \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{r}'$, 故二者相等. 因此最大可解理想唯一. $\square$

14.2 若干重要 Lie 群

一般线性群 $\text{GL}(n)$

一般正交群 $\text{O}(n)$

Lorentz 群 $\text{O}(1, 3)$

酉群 $\text{U}(n)$

Euclid 群 $\text{E}(n)$

Poincaré 群 P

Example 34. 我们考虑 $\mathfrak{su}(3)$ 的根系结构:

14.2. 若干重要 Lie 群

- 取 **Gell-Mann 矩阵 (Gell-Mann matrices)** 为该 Lie 代数的生成元:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} & -i & \\ i & & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} & -i & \\ & & \\ i & & \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} & & \\ & -i & \\ i & & \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

证明 λ_3, λ_8 可以生成该 Lie 代数的一个 Cartan 子代数;

- 已知 $H^1 = \frac{1}{2}\lambda_3, H^2 = \frac{1}{2}\lambda_8$ 构成 Cartan 子代数的一组正交归一的基, 验证 $\lambda_1 \pm i\lambda_2, \lambda_4 \pm i\lambda_5, \lambda_6 \pm i\lambda_7$ 对应的伴随表示的态均为 Cartan 子代数的共同本征态, 并计算相应的根;
- 该李代数共有多少个非零的根? 其中有几个正根、几个负根? 找出该李代数的一组单根.

Solution. 记 $\mathfrak{h} := \text{span}\{\lambda_3, \lambda_8\}$. 因为 $\lambda_3 = \text{diag}(1, -1, 0), \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{diag}(1, 1, -2)$, 所以 $[\lambda_3, \lambda_8] = 0$, 从而 $\mathfrak{h}$ 是 Abel 子代数. 设 $X = (x_{ij})$ 与 λ_3, λ_8 均对易. 对任意对角矩阵 $D = \text{diag}(d_1, d_2, d_3)$, 有 $[D, X]_{ij} = (d_i - d_j)x_{ij}$. 取 $D = \lambda_3 = \text{diag}(1, -1, 0)$, 因为 $d_i - d_j \neq 0$ 对任意 $i \neq j$ 成立, 故 $x_{ij} = 0$ 对任意 $i \neq j$ 成立. 因此 X 必为对角矩阵. 又由于 X 迹为零, 可写为 $X = \text{diag}(a, b, c), a + b + c = 0$. 取 $s = \frac{a-b}{2}, t = \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$, 则 $X = s\lambda_3 + t\lambda_8$. 因此 $Z_{\mathfrak{su}(3)}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. 于是任何包含 $\mathfrak{h}$ 的 Abel 子代数都只能等于 $\mathfrak{h}$, 故 $\mathfrak{h}$ 是极大 Abel 子代数. 由于 $\mathfrak{su}(3)$ 是紧实 Lie 代数, 其 Cartan 子代数正是极大 Abel 子代数, 故 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{su}(3)$ 的 Cartan 子代数.

记 E_{ij} 为第 (i, j) 元为 1、其余元为 0 的矩阵. 由 Gell-Mann 矩阵的定义可得 $\lambda_1 + i\lambda_2 = 2E_{12}, \lambda_1 - i\lambda_2 = 2E_{21}, \lambda_4 + i\lambda_5 = 2E_{13}, \lambda_4 - i\lambda_5 = 2E_{31}, \lambda_6 + i\lambda_7 = 2E_{23}, \lambda_6 - i\lambda_7 = 2E_{32}$. 又 $H^1 = \text{diag}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), H^2 = \text{diag}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. 对任意对角矩阵 $H = \text{diag}(h_1, h_2, h_3)$, 有 $[H, E_{ij}] = (h_i - h_j)E_{ij}$. 因此每个 E_{ij} 都是 ad_{H^1} 与 ad_{H^2} 的共同本征态. 具体计算得到 $[H^1, \lambda_1 + i\lambda_2] = \lambda_1 + i\lambda_2, [H^2, \lambda_1 + i\lambda_2] = 0$, 因而 $\lambda_1 + i\lambda_2 \leftrightarrow (1, 0)$. 类似地, $\lambda_1 - i\lambda_2 \leftrightarrow (-1, 0)$.

对 $\lambda_4 \pm i\lambda_5$ 有 $[H^1, \lambda_4 + i\lambda_5] = \frac{1}{2}(\lambda_4 + i\lambda_5), [H^2, \lambda_4 + i\lambda_5] = \frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda_4 + i\lambda_5)$, 故 $\lambda_4 + i\lambda_5 \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 而 $\lambda_4 - i\lambda_5 \leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 对 $\lambda_6 \pm i\lambda_7$ 有 $[H^1, \lambda_6 + i\lambda_7] = -\frac{1}{2}(\lambda_6 + i\lambda_7), [H^2, \lambda_6 + i\lambda_7] = \frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda_6 + i\lambda_7)$, 故 $\lambda_6 + i\lambda_7 \leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 而 $\lambda_6 - i\lambda_7 \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 综上, 非零根为 $\pm(1, 0), \pm\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \pm\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 这

Chapter 14. Lie 群

正是 A_2 根系.

因此该 *Lie* 代数共有 6 个非零根. 若取正根为 $\alpha_{12} = (1, 0)$, $\alpha_{23} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\alpha_{13} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 则 $\alpha_{13} = \alpha_{12} + \alpha_{23}$. 所以正根共有 3 个, 负根也共有 3 个. 一组单根可取为 $\alpha_1 = \alpha_{12} = (1, 0)$, $\alpha_2 = \alpha_{23} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 此时

$$\Delta = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2)\}.$$

因此 $\mathfrak{su}(3)$ 的根系为 A_2 型根系.

□

15

Lie 代数

Contents

- 15.1 有限维半单 Lie 代数 313
- * 15.2 对半单 Lie 代数的进一步讨论 .. 315

15.1 有限维半单 Lie 代数

Definition 15.1.

Example 35. 我们考虑 $\mathfrak{su}(3)$ 的根系结构:

- 取 **Gell-Mann 矩阵 (Gell-Mann matrices)** 为该 Lie 代数的生成元:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}, \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} & -i \\ & \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} & \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} & \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

证明 λ_3, λ_8 可以生成该 Lie 代数的一个 Cartan 子代数;

- 已知 $H^1 = \frac{1}{2}\lambda_3, H^2 = \frac{1}{2}\lambda_8$ 构成 Cartan 子代数的一组正交归一的基, 验证 $\lambda_1 \pm i\lambda_2$,

Chapter 15. Lie 代数

$\lambda_4 \pm i\lambda_5, \lambda_6 \pm i\lambda_7$ 对应的伴随表示的态均为 *Cartan* 子代数的共同本征态, 并计算相应的根;

- 该李代数共有多少个非零的根? 其中有几个正根、几个负根? 找出该李代数的一组单根.

Solution. 记 $\mathfrak{h} := \text{span}\{\lambda_3, \lambda_8\}$. 因为 $\lambda_3 = \text{diag}(1, -1, 0)$, $\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{diag}(1, 1, -2)$, 所以 $[\lambda_3, \lambda_8] = 0$, 从而 $\mathfrak{h}$ 是 *Abel* 子代数. 设 $X = (x_{ij})$ 与 λ_3, λ_8 均对易. 对任意对角矩阵 $D = \text{diag}(d_1, d_2, d_3)$, 有 $[D, X]_{ij} = (d_i - d_j)x_{ij}$. 取 $D = \lambda_3 = \text{diag}(1, -1, 0)$, 因为 $d_i - d_j \neq 0$ 对任意 $i \neq j$ 成立, 故 $x_{ij} = 0$ 对任意 $i \neq j$ 成立. 因此 X 必为对角矩阵. 又由于 X 迹为零, 可写为 $X = \text{diag}(a, b, c)$, $a + b + c = 0$. 取 $s = \frac{a-b}{2}$, $t = \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$, 则 $X = s\lambda_3 + t\lambda_8$. 因此 $Z_{\mathfrak{su}(3)}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. 于是任何包含 $\mathfrak{h}$ 的 *Abel* 子代数都只能等于 $\mathfrak{h}$, 故 $\mathfrak{h}$ 是极大 *Abel* 子代数. 由于 $\mathfrak{su}(3)$ 是紧实 *Lie* 代数, 其 *Cartan* 子代数正是极大 *Abel* 子代数, 故 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{su}(3)$ 的 *Cartan* 子代数.

记 E_{ij} 为第 (i, j) 元为 1、其余元为 0 的矩阵. 由 *Gell-Mann* 矩阵的定义可得 $\lambda_1 + i\lambda_2 = 2E_{12}$, $\lambda_1 - i\lambda_2 = 2E_{21}$, $\lambda_4 + i\lambda_5 = 2E_{13}$, $\lambda_4 - i\lambda_5 = 2E_{31}$, $\lambda_6 + i\lambda_7 = 2E_{23}$, $\lambda_6 - i\lambda_7 = 2E_{32}$. 又 $H^1 = \text{diag}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$, $H^2 = \text{diag}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. 对任意对角矩阵 $H = \text{diag}(h_1, h_2, h_3)$, 有 $[H, E_{ij}] = (h_i - h_j)E_{ij}$. 因此每个 E_{ij} 都是 ad_{H^1} 与 ad_{H^2} 的共同本征态. 具体计算得到 $[H^1, \lambda_1 + i\lambda_2] = \lambda_1 + i\lambda_2$, $[H^2, \lambda_1 + i\lambda_2] = 0$, 因而 $\lambda_1 + i\lambda_2 \leftrightarrow (1, 0)$. 类似地, $\lambda_1 - i\lambda_2 \leftrightarrow (-1, 0)$.

对 $\lambda_4 \pm i\lambda_5$ 有 $[H^1, \lambda_4 + i\lambda_5] = \frac{1}{2}(\lambda_4 + i\lambda_5)$, $[H^2, \lambda_4 + i\lambda_5] = \frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda_4 + i\lambda_5)$, 故 $\lambda_4 + i\lambda_5 \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 而 $\lambda_4 - i\lambda_5 \leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 对 $\lambda_6 \pm i\lambda_7$ 有 $[H^1, \lambda_6 + i\lambda_7] = -\frac{1}{2}(\lambda_6 + i\lambda_7)$, $[H^2, \lambda_6 + i\lambda_7] = \frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda_6 + i\lambda_7)$, 故 $\lambda_6 + i\lambda_7 \leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 而 $\lambda_6 - i\lambda_7 \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 综上, 非零根为 $\pm(1, 0)$, $\pm\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\pm\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 这正是 A_2 根系.

因此该 *Lie* 代数共有 6 个非零根. 若取正根为 $\alpha_{12} = (1, 0)$, $\alpha_{23} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\alpha_{13} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 则 $\alpha_{13} = \alpha_{12} + \alpha_{23}$. 所以正根共有 3 个, 负根也共有 3 个. 一组单根可取为 $\alpha_1 = \alpha_{12} = (1, 0)$, $\alpha_2 = \alpha_{23} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 此时

$$\Delta = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2)\}.$$

因此 $\mathfrak{su}(3)$ 的根系为 A_2 型根系. □

* 15.2 对半单 Lie 代数的进一步讨论

Lemma 15.1 [Cartan 幂零性引理]. 设 V 是有限维复线性空间, $A \subseteq B \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 是线性子空间, 并定义

$$M := \{X \in \mathfrak{gl}(V) : [X, B] \subseteq A\}.$$

若 $X \in M$ 且 $\mathrm{tr}(XY) = 0, \forall Y \in M$, 则 X 是幂零线性变换.

Proof. 取 X 的 *Jordan–Chevalley* 分解

$$X = X_s + X_n,$$

其中 X_s 半单, X_n 幂零, 且 $[X_s, X_n] = 0$. 取一组使 X_s 对角化的基, 设

$$X_s = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

只需证明所有 $\lambda_i = 0$.

令 E 为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 在 $\mathbb{Q}$ 上张成的有限维线性空间. 任取 $\mathbb{Q}$ -线性泛函 $f: E \rightarrow \mathbb{Q}$, 定义

$$Y := \mathrm{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)).$$

下面证明 $Y \in M$.

记 E_{ij} 为上述基下的矩阵单位. 则

$$\mathrm{ad}_{X_s}(E_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}, \quad \mathrm{ad}_Y(E_{ij}) = (f(\lambda_i) - f(\lambda_j))E_{ij}.$$

因为 f 是 $\mathbb{Q}$ -线性的, 若 $\lambda_i - \lambda_j = \lambda_k - \lambda_l$, 则 $f(\lambda_i) - f(\lambda_j) = f(\lambda_k) - f(\lambda_l)$. 因此可由 *Lagrange* 插值取多项式 $p(t)$, 满足

$$p(0) = 0, \quad p(\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_i) - f(\lambda_j).$$

从而

$$\mathrm{ad}_Y = p(\mathrm{ad}_{X_s}).$$

又 ad_{X_s} 是 ad_X 的半单部分, 因而 ad_{X_s} 本身可写成 ad_X 的一个无常数项多项式. 故 ad_Y 也是 ad_X 的无常数项多项式.

由于 $X \in M$, 有 $\mathrm{ad}_X(B) \subseteq A$. 又 $A \subseteq B$, 所以 $\mathrm{ad}_X(A) \subseteq A$. 因此任意无常数项多项式 $q(\mathrm{ad}_X)$ 都满足

$$q(\mathrm{ad}_X)(B) \subseteq A.$$

Chapter 15. Lie 代数

特别地,

$$[Y, B] = \text{ad}_Y(B) \subseteq A.$$

故 $Y \in M$.

由假设 $\text{tr}(XY) = 0$. 另一方面, $X = X_s + X_n$, 且 Y 与 X_s 对角, Y 也与 X_n 交换; 因此 $X_n Y$ 幂零, 迹为 0. 所以

$$0 = \text{tr}(XY) = \text{tr}(X_s Y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\lambda_i).$$

上式属于 E . 对它再作用 f , 得

$$0 = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f(\lambda_i)\right) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i)^2.$$

因为 $f(\lambda_i) \in \mathbb{Q}$, 上式是有理数平方和, 故每个 $f(\lambda_i) = 0$. 由于 $f: E \rightarrow \mathbb{Q}$ 任意, 得 $\lambda_i = 0, \forall i$. 因此 $X_s = 0$, 从而 $X = X_n$ 幂零. $\square$

Lemma 15.2 [线性 Cartan 判据]. 设 $\mathfrak{I} \leq \mathfrak{gl}(V)$ 是有限维线性 Lie 代数. 则 $\mathfrak{I}$ 可解当且仅当

$$\text{tr}(AB) = 0, \quad \forall A \in [\mathfrak{I}, \mathfrak{I}], \quad \forall B \in \mathfrak{I}.$$

Proof. 先设 $\mathfrak{I}$ 可解. 复化后不影响可解性与迹条件, 故可假设底域为 $\mathbb{C}$. 由 Lie 定理, 可取一组基使得 $\mathfrak{I}$ 中所有元素均为上三角矩阵. 因此 $[\mathfrak{I}, \mathfrak{I}]$ 中所有元素均为严格上三角矩阵. 若 $A \in [\mathfrak{I}, \mathfrak{I}]$, $B \in \mathfrak{I}$, 则 AB 仍然对角元全为 0, 故 $\text{tr}(AB) = 0$.

反过来, 假设

$$\text{tr}(AB) = 0, \quad \forall A \in [\mathfrak{I}, \mathfrak{I}], \quad \forall B \in \mathfrak{I}.$$

令

$$A := [\mathfrak{I}, \mathfrak{I}], \quad B := \mathfrak{I}, \quad M := \{T \in \mathfrak{gl}(V) : [T, \mathfrak{I}] \subseteq [\mathfrak{I}, \mathfrak{I}]\}.$$

若 $X \in [\mathfrak{I}, \mathfrak{I}]$, 则显然 $X \in M$. 为应用 Cartan 幂零性引理, 需证明 $\text{tr}(XY) = 0, \forall Y \in M$.

因为 $X \in [\mathfrak{I}, \mathfrak{I}]$ 可写为有限个对易子的线性组合, 只需考虑 $X = [U, V], U, V \in \mathfrak{I}$. 对任意 $Y \in M$, 由迹的循环不变性,

$$\text{tr}([U, V]Y) = \text{tr}(U[V, Y]).$$

又 $Y \in M$, 故 $[V, Y] \in [\mathfrak{I}, \mathfrak{I}]$. 由假设, $\text{tr}(U[V, Y]) = 0$. 所以 $\text{tr}(XY) = 0, \forall X \in [\mathfrak{I}, \mathfrak{I}], \forall Y \in M$.

由 Cartan 幂零性引理, $[\mathfrak{I}, \mathfrak{I}]$ 中每个元素都是幂零线性变换. 由 Engel 定理, $[\mathfrak{I}, \mathfrak{I}]$ 是幂零 Lie 代数, 特别地是可解 Lie 代数. 而

$$\mathfrak{I}/[\mathfrak{I}, \mathfrak{I}]$$

是 Abel Lie 代数. 因此 $\mathfrak{I}$ 是可解 Lie 代数的 Abel 扩张, 从而 $\mathfrak{I}$ 可解. $\square$

15.2. 对半单 Lie 代数的进一步讨论

Theorem 15.1 [Engel 定理, 线性形式]. 设 V 是非零有限维线性空间, $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{gl}(V)$ 是 Lie 子代数. 若 $\mathfrak{n}$ 中每个元素都是幂零线性变换, 则存在非零向量 $v \in V$, 使得

$$Xv = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{n}.$$

因而可取 V 的一组基, 使得 $\mathfrak{n}$ 中所有元素均为严格上三角矩阵.

Proof. 对 $\dim \mathfrak{n}$ 归纳. 若 $\dim \mathfrak{n} = 0$, 结论显然. 下面设 $\dim \mathfrak{n} > 0$.

先证明 $\mathfrak{n}$ 有余维数为 1 的理想. 取 $\mathfrak{m}$ 为 $\mathfrak{n}$ 的极大真子代数. 对任意 $X \in \mathfrak{m}$, 因为 X 作为 V 上线性变换幂零, 所以 ad_X 作为 $\mathfrak{gl}(V)$ 上的线性变换也是幂零. 事实上, $\text{ad}_X = L_X - R_X$, 其中 $L_X(T) = XT$, $R_X(T) = TX$, 且 L_X, R_X 交换并且都是幂零算子.

由于 $\mathfrak{m}$ 是子代数, 对 $X \in \mathfrak{m}$ 有 $[X, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$, 故 ad_X 诱导出 $\mathfrak{n}/\mathfrak{m}$ 上的幂零线性变换. 由归纳假设作用于 $\mathfrak{m}$ 在 $\mathfrak{n}/\mathfrak{m}$ 上的表示, 存在 $Y \notin \mathfrak{m}$, 使得

$$[X, Y] \in \mathfrak{m}, \quad \forall X \in \mathfrak{m}.$$

因此 Y 属于 $\mathfrak{m}$ 在 $\mathfrak{n}$ 中的正规化子

$$N_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m}) := \{Z \in \mathfrak{n} : [Z, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}\}.$$

于是 $N_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m})$ 严格包含 $\mathfrak{m}$. 由 $\mathfrak{m}$ 的极大性, 得 $N_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{n}$. 因而 $\mathfrak{m} \triangleleft \mathfrak{n}$. 又 $\mathfrak{n}/\mathfrak{m}$ 没有非零真子代数, 否则其逆像会给出 $\mathfrak{m}$ 与 $\mathfrak{n}$ 之间的中间子代数. 因为任意一维子空间都是 Lie 子代数, 所以 $\dim(\mathfrak{n}/\mathfrak{m}) = 1$. 故 $\mathfrak{m}$ 是余维数为 1 的理想.

由归纳假设, 存在非零子空间

$$W := \{v \in V : Xv = 0, \forall X \in \mathfrak{m}\} \neq 0.$$

下面证明 W 在 $\mathfrak{n}$ 下不变. 对任意 $Y \in \mathfrak{n}$, $v \in W$, $X \in \mathfrak{m}$, 有

$$X(Yv) = Y(Xv) + [X, Y]v = 0,$$

因为 $Xv = 0$ 且 $[X, Y] \in \mathfrak{m}$. 故 $Yv \in W$.

取 $Y_0 \in \mathfrak{n}$ 使得 $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{F}Y_0$. 由于 Y_0 在 W 上仍是幂零算子, 存在 $0 \neq v \in W$ 使得 $Y_0v = 0$. 又 $\mathfrak{m}v = 0$, 故 $\mathfrak{n}v = 0$.

最后, 由上面已证结论取 $0 \neq v_1 \in V$ 使得 $\mathfrak{n}v_1 = 0$. 在商空间 $V/\mathbb{F}v_1$ 上重复该过程, 归纳得到一列旗

$$0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V,$$

其中每个 V_i 都在 $\mathfrak{n}$ 下不变, 且 $\mathfrak{n}$ 在 V_i/V_{i-1} 上作用为零. 取适应该旗的基, $\mathfrak{n}$ 中所有元素均为严格上三角矩阵. $\square$

Chapter 15. Lie 代数

Theorem 15.2 [Engel 定理, 抽象形式]. 设 $\mathfrak{g}$ 是有限维 Lie 代数. 若对任意 $X \in \mathfrak{g}$, ad_X 都是 $\mathfrak{g}$ 上的幂零线性变换, 则 $\mathfrak{g}$ 是幂零 Lie 代数.

Proof. 对 $\dim \mathfrak{g}$ 归纳. 若 $\dim \mathfrak{g} = 0$, 结论显然. 现在设 $\dim \mathfrak{g} > 0$.

由 Engel 定理的线性形式, 将 $\text{ad } \mathfrak{g} \leq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 作用在 $\mathfrak{g}$ 上, 可得存在 $0 \neq Z \in \mathfrak{g}$, 使得

$$[X, Z] = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

因此 $Z(\mathfrak{g}) \neq 0$.

考虑商 Lie 代数 $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$. 对任意 $\bar{X} \in \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$, 其伴随作用由 ad_X 诱导, 因而仍是幂零线性变换. 由归纳假设, $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ 幂零.

若 $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ 的下中心列在第 k 步为零, 则 $\mathfrak{g}^k \subseteq Z(\mathfrak{g})$. 于是 $\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] = 0$. 故 $\mathfrak{g}$ 幂零. $\square$

Lemma 15.3. 设 $\mathfrak{g}$ 是非零有限维可解 Lie 代数. 则 $\mathfrak{g}$ 存在余维数为 1 的理想.

Proof. 因为 $\mathfrak{g}$ 可解, 有 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$; 否则导列从第一步起恒等于 $\mathfrak{g}$, 不可能终止于 0. 取一个超平面 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$, 使得 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$. 则对任意 $X \in \mathfrak{g}$, $H \in \mathfrak{h}$, 有 $[X, H] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$. 故 $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g}$, 且 $\text{codim } \mathfrak{h} = 1$. $\square$

Theorem 15.3 [Lie 定理]. 设 $\mathbb{F}$ 是代数闭且特征为 0 的域. 设 $\mathfrak{I} \leq \mathfrak{gl}(V)$ 是有限维可解 Lie 代数, 且 $0 \neq V$ 是有限维 $\mathfrak{I}$ -模. 则存在非零向量 $v \in V$, 使得 v 是 $\mathfrak{I}$ 中所有元素的公共本征向量. 因而可取 V 的一组基, 使得 $\mathfrak{I}$ 中所有元素均为上三角矩阵.

Proof. 对 $\dim \mathfrak{I}$ 归纳. 若 $\dim \mathfrak{I} = 1$, 结论就是代数闭域上线性变换存在本征向量.

设 $\dim \mathfrak{I} > 1$. 由上一个引理, 取余维数为 1 的理想 $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{I}$, 并取 $X_0 \in \mathfrak{I}$ 使得 $\mathfrak{I} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{F}X_0$.

由归纳假设, $\mathfrak{h}$ 在 V 中有公共本征向量. 因此存在线性函数 $\lambda: \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{F}$, 使得权空间

$$V_\lambda := \{v \in V : Hv = \lambda(H)v, \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

非零.

取 $0 \neq v \in V_\lambda$, 并令

$$W := \text{span}\{v, X_0 v, X_0^2 v, \dots\}.$$

因为 V 有限维, W 有限维, 且 $X_0 W \subseteq W$.

下面证明 W 在 $\mathfrak{h}$ 下不变, 且每个 $H \in \mathfrak{h}$ 在 W 上的矩阵都是上三角的, 对角元全为 $\lambda(H)$. 对 r 归纳证明:

$$HX_0^r v = \lambda(H)X_0^r v + \text{span}\{v, X_0 v, \dots, X_0^{r-1} v\}.$$

15.2. 对半单 Lie 代数的进一步讨论

当 $r = 0$ 时这就是 $v \in V_\lambda$. 若对 r 成立, 则

$$HX_0^{r+1}v = X_0(HX_0^r v) + [H, X_0]X_0^r v.$$

第一项给出 $\lambda(H)X_0^{r+1}v$ 加低阶项; 第二项中 $[H, X_0] \in \mathfrak{h}$, 故由归纳假设也是低阶项加 $\lambda([H, X_0])X_0^r v$. 因此结论成立.

于是 W 在 $\mathfrak{l}$ 下不变. 对任意 $H \in \mathfrak{h}$, $[X_0, H] \in \mathfrak{h}$, 且其在 W 上的迹一方面等于

$$\mathrm{tr}([X_0, H]|_W) = \dim W \cdot \lambda([X_0, H]),$$

另一方面又因为 $X_0|_W$ 与 $H|_W$ 都是 W 上线性变换, 有

$$\mathrm{tr}([X_0|_W, H|_W]) = 0.$$

故 $\dim W \cdot \lambda([X_0, H]) = 0$. 由于特征为 0, 得

$$\lambda([X_0, H]) = 0, \quad \forall H \in \mathfrak{h}.$$

因而 V_λ 在 X_0 下不变. 事实上, 若 $u \in V_\lambda$, 则

$$H(X_0 u) = X_0(Hu) + [H, X_0]u = \lambda(H)X_0 u + \lambda([H, X_0])u = \lambda(H)X_0 u.$$

所以 $X_0 u \in V_\lambda$.

由于 $\mathbb{F}$ 代数闭, $X_0|_{V_\lambda}$ 有本征向量. 取 $0 \neq w \in V_\lambda$ 使得 $X_0 w = \mu w$. 则对任意 $H \in \mathfrak{h}$, 有 $Hw = \lambda(H)w$, 并且 $X_0 w = \mu w$. 因为 $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{F}X_0$, 所以 w 是 $\mathfrak{l}$ 的公共本征向量.

最后, 令 $V_1 = \mathbb{F}w$. 由于 V_1 在 $\mathfrak{l}$ 下不变, $\mathfrak{l}$ 自然作用在 V/V_1 上. 对商空间重复上述论证并归纳于 $\dim V$, 得到一系列 $\mathfrak{l}$ -不变旗

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V, \quad \dim V_i = i.$$

取适应该旗的基, $\mathfrak{l}$ 中所有元素均为上三角矩阵. □

Theorem 15.4. 有限维 Lie 代数的半单性和可解性有如下判据:

- **Cartan 判别法 (Cartan criterion):** Lie 代数可解当且仅当其 Killing 型满足
- **Cartan-Killing 判别法 (Cartan-Killing criterion):** Lie 代数半单当且仅当其 Killing 型非退化; $K(X, [Y, Z]) = 0, \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Proof. (1) 先证 Cartan criterion. 引用如下线性 Cartan 判据: 若 $\mathfrak{l} \leq \mathfrak{gl}(V)$ 是有限维线性 Lie 代数, 则 $\mathfrak{l}$ 可解当且仅当 $\mathrm{tr}(AB) = 0, \forall A \in [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}], \forall B \in \mathfrak{l}$.

Chapter 15. Lie 代数

取 $I = \text{ad } \mathfrak{g}$. 因为 $[\text{ad}_Y, \text{ad}_Z] = \text{ad}_{[Y, Z]}$, 所以条件 $K(X, [Y, Z]) = 0$ 对任意 X, Y, Z 成立, 等价于 $\text{tr}(AB) = 0, \forall A \in [\text{ad } \mathfrak{g}, \text{ad } \mathfrak{g}], \forall B \in \text{ad } \mathfrak{g}$. 由线性 Cartan 判据, $\text{ad } \mathfrak{g}$ 可解. 又 $\mathfrak{g}/\ker \text{ad} \cong \text{ad } \mathfrak{g}$, 且 $\ker \text{ad} = Z(\mathfrak{g})$ 是 Abel 理想, 故 $\mathfrak{g}$ 是可解 Lie 代数的中心扩张, 从而 $\mathfrak{g}$ 可解.

反过来, 若 $\mathfrak{g}$ 可解, 则 $\text{ad } \mathfrak{g}$ 可解. 仍由线性 Cartan 判据, 得 $\text{tr}(\text{ad}_X \text{ad}_{[Y, Z]}) = 0$, 即 $K(X, [Y, Z]) = 0$.

(2) 下面证 Cartan-Killing criterion. 记 $\mathfrak{i} := \ker K$. 前面已经证明 $\mathfrak{i} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. 对任意 $X, Y, Z \in \mathfrak{i}$, 因为 $\mathfrak{i}$ 是理想, $\text{ad}_X \text{ad}_{[Y, Z]}$ 在商空间 $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ 上诱导零映射, 故其在 $\mathfrak{g}$ 上的迹等于其在 $\mathfrak{i}$ 上的迹. 于是

$$K_{\mathfrak{i}}(X, [Y, Z]) = K_{\mathfrak{g}}(X, [Y, Z]) = 0.$$

由刚刚证明的 Cartan criterion, $\mathfrak{i}$ 可解.

若 $\mathfrak{g}$ 半单, 则 $\mathfrak{g}$ 没有非零 Abel 理想, 因而没有非零可解理想. 所以 $\ker K = 0$, 即 K 非退化.

反过来, 若 K 非退化, 则 $\ker K = 0$. 但任意 Abel 理想都包含于 $\ker K$, 因此 $\mathfrak{g}$ 没有非零 Abel 理想, 即 $\mathfrak{g}$ 半单. $\square$

Proposition 15.1. 设 $\mathfrak{g}$ 是有限维 Lie 代数. 则 $\mathfrak{g}$ 半单当且仅当 $\text{rad } \mathfrak{g} = 0$. 进一步, $\mathfrak{g}$ 半单当且仅当 $\mathfrak{g}$ 是若干单理想的直和.

Proof. 先证 $\mathfrak{g}$ 半单当且仅当 $\text{rad } \mathfrak{g} = 0$. 若 $\text{rad } \mathfrak{g} = 0$, 则 $\mathfrak{g}$ 没有非零可解理想. Abel 理想必然可解, 故 $\mathfrak{g}$ 没有非零 Abel 理想, 即 $\mathfrak{g}$ 半单.

反过来, 若 $\mathfrak{g}$ 半单而 $\text{rad } \mathfrak{g} \neq 0$, 由于 $\text{rad } \mathfrak{g}$ 可解, 其导列最后一个非零项是 $\mathfrak{g}$ 的非零 Abel 理想, 矛盾. 所以 $\text{rad } \mathfrak{g} = 0$.

下面证明半单 Lie 代数分解为单理想直和. 由 Cartan-Killing criterion, 半单 Lie 代数的 Killing 型非退化. 取 $\mathfrak{g}$ 的一个非零极小理想 $\mathfrak{s}$. 定义

$$\mathfrak{s}^\perp := \{X \in \mathfrak{g} : K(X, S) = 0, \forall S \in \mathfrak{s}\}.$$

由 Killing 型的不变性, $\mathfrak{s}^\perp$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想.

因为 $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{s}^\perp$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 由 $\mathfrak{s}$ 的极小性, 它只能是 0 或 $\mathfrak{s}$. 若 $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{s}^\perp$, 则 K 在 $\mathfrak{s}$ 上恒为零. 又对 $X, Y \in \mathfrak{s}$, 算子 $\text{ad}_X \text{ad}_Y$ 在 $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}$ 上诱导零映射, 故 $K_{\mathfrak{g}}(X, Y) = K_{\mathfrak{g}}(X, Y) = 0$. 由 Cartan criterion, $\mathfrak{s}$ 可解. 这会给出 $\mathfrak{g}$ 的非零可解理想, 与半单性矛盾. 因此 $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{s}^\perp = 0$.

由 K 非退化, 有 $\dim \mathfrak{s} + \dim \mathfrak{s}^\perp = \dim \mathfrak{g}$, 从而

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{s}^\perp.$$

又 $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}^\perp] \subseteq \mathfrak{s} \cap \mathfrak{s}^\perp = 0$.

现在说明 $\mathfrak{s}$ 是单的. 若 $\mathfrak{i} \trianglelefteq \mathfrak{s}$, 则 $[\mathfrak{s}, \mathfrak{i}] \subseteq \mathfrak{i}$, 且 $[\mathfrak{s}^\perp, \mathfrak{i}] = 0$. 因此 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{i}] \subseteq \mathfrak{i}$, 即 $\mathfrak{i}$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 由 $\mathfrak{s}$ 的极小性, 得 $\mathfrak{i} = 0$ 或 $\mathfrak{i} = \mathfrak{s}$. 又 $\mathfrak{s}$ 不是 Abel 的, 否则它就是 $\mathfrak{g}$ 的非零 Abel 理想. 因此 $\mathfrak{s}$ 是单理想.

15.2. 对半单 Lie 代数的进一步讨论

对 $\mathfrak{s}^\perp$ 递归使用同样论证. 因为 $\mathfrak{g}$ 有限维, 该过程有限步终止, 得

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_r,$$

其中每个 $\mathfrak{s}_i$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的单理想.

反过来, 若 $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_r$, 其中每个 $\mathfrak{s}_i$ 是单理想, 则 $\mathfrak{g}$ 没有非零 Abel 理想. 事实上, 若 $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{g}$ 是 Abel 理想, 则其到 $\mathfrak{s}_i$ 的自然投影 $\pi_i(\mathfrak{a})$ 是 $\mathfrak{s}_i$ 的 Abel 理想. 由于 $\mathfrak{s}_i$ 单且非 Abel, 只能有 $\pi_i(\mathfrak{a}) = 0$. 对所有 i 均如此, 故 $\mathfrak{a} = 0$. 因此 $\mathfrak{g}$ 半单. $\square$

Theorem 15.5 [Levi-Malcev 分解 (Levi-Malcev decomposition)]. 任意有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 存在正合列

$$0 \rightarrow \text{rad } \mathfrak{g} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{g} \xrightarrow{q} \mathfrak{g}/\text{rad } \mathfrak{g} \rightarrow 0,$$

其中 $\mathfrak{g}/\text{rad } \mathfrak{g}$ 半单. 进一步, 存在半单子代数 $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{g}$, 使得

$$\mathfrak{g} = \text{rad } \mathfrak{g} \rtimes \mathfrak{s}, \quad \mathfrak{s} \cong \mathfrak{g}/\text{rad } \mathfrak{g}.$$

因此 Lie 代数总能分解为可解理想和半单 Lie 代数的半直积.

Proof. 记 $\mathfrak{r} := \text{rad } \mathfrak{g}$. 由于 $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{g}$, 自然有包含映射 $\iota: \mathfrak{r} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ 和商映射 $q: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$. 显然 ι 单射, q 满射, 且 $\ker q = \text{im } \iota = \mathfrak{r}$. 故上列正合.

下面证明 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 半单. 设 $\bar{\mathfrak{a}} \leq \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 是可解理想. 令 $\mathfrak{a} := q^{-1}(\bar{\mathfrak{a}})$. 则 $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{g}$, 且 $\mathfrak{a}/\mathfrak{r} \cong \bar{\mathfrak{a}}$ 可解. 又 $\mathfrak{r}$ 可解, 因此 $\mathfrak{a}$ 是可解扩张, 从而可解. 由 $\mathfrak{r}$ 的最大性, 得 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$. 所以 $\bar{\mathfrak{a}} = 0$. 因此 $\text{rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{r}) = 0$, 从而 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 半单.

至于正合列的劈裂, 即半单子代数 $\mathfrak{s}$ 的存在性, 是 Levi 定理的核心内容: 在特征 0 的有限维情形下, 对任意有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, 存在子代数 $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{g}$, 使得 $q|_{\mathfrak{s}}: \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 是 Lie 代数同构. 因而作为线性空间 $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{s}$. 又 $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{g}$, 所以 $[\mathfrak{s}, \mathfrak{r}] \subseteq \mathfrak{r}$. 因此 $\mathfrak{g}$ 是半直积

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \rtimes \mathfrak{s}.$$

$\square$

Definition 15.2 [Lie 代数的一阶上同调]. 设 M 是 $\mathfrak{g}$ -模. 线性映射 $f: \mathfrak{g} \rightarrow M$ 称为 1-余闭链. 若

$$f([X, Y]) = Xf(Y) - Yf(X), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

若存在 $m \in M$, 使得 $f(X) = Xm, \forall X \in \mathfrak{g}$, 则称 f 为 1-余边界. 一阶上同调定义为

$$H^1(\mathfrak{g}, M) := \frac{\{1\text{-余闭链}\}}{\{1\text{-余边界}\}}.$$

Chapter 15. Lie 代数

Definition 15.3 [??]. 设 $\mathfrak{g}$ 是有限维半单 Lie 代数, K 是其 Killing 型. 取 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $\{X_i\}$, 并取关于 K 的对偶基 $\{X^i\}$. 定义

$$\Omega := \sum_i X_i X^i \in U(\mathfrak{g}),$$

称为 $\mathfrak{g}$ 的 **Casimir 元**. 若 $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 是一个表示, 则

$$\rho(\Omega) := \sum_i \rho(X_i) \rho(X^i)$$

称为该表示中的 **Casimir 算子**.

Proposition 15.2. Casimir 元 Ω 与基的选取无关, 且 $\Omega \in Z(U(\mathfrak{g}))$. 因此若 V 是不可约 $\mathfrak{g}$ -模, 则 Ω 在 V 上按标量作用.

Proof. 张量 $\sum_i X_i \otimes X^i$ 是 Killing 型对应的恒等张量, 因而与基的选取无关. 由 Killing 型的不变性, 对任意 $X \in \mathfrak{g}$ 有

$$\sum_i [X, X_i] \otimes X^i + \sum_i X_i \otimes [X, X^i] = 0.$$

将张量乘法映入 $U(\mathfrak{g})$ 后得到 $[X, \Omega] = 0$. 因为 $\mathfrak{g}$ 生成 $U(\mathfrak{g})$, 所以 $\Omega \in Z(U(\mathfrak{g}))$.

若 V 不可约, 则 $\rho(\Omega)$ 与所有 $\rho(X)$ 对易. 由 Schur 引理, $\rho(\Omega) = c_V \text{id}_V$. □

Lemma 15.4 [Whitehead 引理 (Whitehead's lemma)]. 若 $\mathfrak{g}$ 是有限维半单 Lie 代数, M 是有限维 $\mathfrak{g}$ -模, 则 $H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$.

Proof. Whitehead 引理是半单 Lie 代数表示论中的标准深结果. 这里只给出常用的 Casimir 证明框架. 设 $f: \mathfrak{g} \rightarrow M$ 是 1-余闭链.

先设 M 不可约. 若 M 是平凡模, 则 $f([X, Y]) = 0$. 因为 $\mathfrak{g}$ 半单, 有 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, 故 $f = 0$.

若 M 非平凡不可约, 由 Casimir 理论, Ω 在 M 上按非零标量 c 作用. 取 Killing 对偶基 $\{X_i\}$ 与 $\{X^i\}$, 令

$$m := c^{-1} \sum_i X_i f(X^i).$$

15.2. 对半单 Lie 代数的进一步讨论

由 1-余闭链条件和 Casimir 张量的不变性, 对任意 $X \in \mathfrak{g}$ 有

$$Xm = c^{-1} \sum_i ([X, X_i]f(X^i) + X_i X f(X^i)) = c^{-1} \sum_i X_i X^i f(X) = f(X).$$

因此 f 是余边界.

一般有限维模 M 的情形可对 $\dim M$ 归纳. 取非零不可约子模 $N \leq M$, 令 $Q = M/N$. 由归纳假设, $H^1(\mathfrak{g}, N) = H^1(\mathfrak{g}, Q) = 0$. 由短正合列 $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow 0$ 诱导的一阶上同调长正合列, 得 $H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$. $\square$

Theorem 15.6 [Weyl 完全可约性定理 (Weyl's complete reducibility theorem)]. 半单 Lie 代数的有限维表示均半单.

Proof. 只需证明任意有限维 $\mathfrak{g}$ -模 V 的任意子模 $U \leq V$ 都存在 $\mathfrak{g}$ -不变补空间. 任选线性补空间 W , 使得 $V = U \oplus W$. 由于 U 是子模, 对任意 $X \in \mathfrak{g}$, 作用矩阵可写成

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} \rho_U(X) & \alpha(X) \\ 0 & \rho_W(X) \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha(X) \in \text{Hom}(W, U)$ 记录 W 偏离不变性的部分.

由 $\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)]$ 得

$$\alpha([X, Y]) = \rho_U(X)\alpha(Y) - \alpha(Y)\rho_W(X) - \rho_U(Y)\alpha(X) + \alpha(X)\rho_W(Y).$$

令 $\text{Hom}(W, U)$ 成为 $\mathfrak{g}$ -模, 作用定义为

$$X \cdot f := \rho_U(X)f - f\rho_W(X).$$

则上式正是说 $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Hom}(W, U)$ 是一个 1-余闭链.

由 Whitehead 引理, $H^1(\mathfrak{g}, \text{Hom}(W, U)) = 0$, 故存在 $\varphi \in \text{Hom}(W, U)$, 使得

$$\alpha(X) = X \cdot \varphi = \rho_U(X)\varphi - \varphi\rho_W(X).$$

定义

$$W' := \{-\varphi(w) + w : w \in W\}.$$

显然 $V = U \oplus W'$ 作为线性空间直和. 又对任意 $w \in W$,

$$\rho(X)(-\varphi(w) + w) = -\rho_U(X)\varphi(w) + \alpha(X)w + \rho_W(X)w = -\varphi(\rho_W(X)w) + \rho_W(X)w \in W'.$$

因此 W' 是 $\mathfrak{g}$ -不变补空间.

所以任意子模都有不变补空间. 对 $\dim V$ 归纳, 可知 V 是不可约子模的直和. 因此半单 Lie 代数的有限维表示均半单. $\square$

Chapter 15. Lie 代数

References of this chapter

- [黎冯 14] 黎景辉 and 冯绪宁. 拓扑群引论. 2nd ed. 北京: 科学出版社, 2014.
- [Tu11] L. W. Tu. [An Introduction to Manifolds](#). 2nd. Universitext. New York: Springer, 2011. isbn: 978-1-4419-7399-3.
- [Tu17] L. W. Tu. [Differential Geometry: Connections, Curvature, and Characteristic Classes](#). Vol. 275. Graduate Texts in Mathematics. Cham: Springer, 2017. isbn: 978-3-319-55083-1.
- [黄宣国 24] 黄宣国. 《李群基础》. 3rd ed. 上海: 复旦大学出版社, 2024. isbn: 9787309169447.
- [刘玉鑫 22] 刘玉鑫. 《物理学家用李群李代数》. 中外物理学精品书系. 北京: 北京大学出版社, 2022. isbn: 9787301331804.
- [李张 86] 李元熹 and 张国圀. 拓扑学. Chinese. 复旦大学数学系主编. 上海: 上海科学技术出版社, 1986.

Part V

代数学

*Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur
adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut,
placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur
dictum gravida mauris. Nam arcu libero,
nonummy eget, consectetur id, vulputate a,
magna. Donec vehicula augue eu neque.
Pellentesque habitant morbi tristique senectus
et netus et malesuada fames ac turpis egestas.
Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus
sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla
ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor
gravida placerat. Integer sapien est, iaculis
in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent
eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean
faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu,
pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor
semper nulla. Donec varius orci eget risus.
Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend,
sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci
dignissim rutrum.*

— Eugene Wigner

— 笔者

16

古典同调代数速成课 (a crash course of classical homological algebra)

Contents

16.1 加性范畴	328
16.2 Abel 范畴	332
16.3 正合列	333
16.4 模的投射, 内射与平坦	334
16.5 复形同调	334
16.6 导出函子	334
16.6.1 左导出函子与 Ext	334
16.6.2 右导出函子与 Ext	334
16.6.3 泛 δ 函子	334
16.6.4 K 群	334
16.7 同调群	334
16.7.1 系数在群的模的上同调群	334
16.7.2 非交换上同调群	334

同调代数大致可分为古典与现代两种形态. 古典同调代数主要研究阿贝尔范畴中的链复形、正合列、投射/内射分辨以及 Ext 、 Tor 等导出函子, 其核心任务是「把「函子不正合」与「扩张是否可解」这类问题转化为可计算的同调不变量. 现代同调代数则进一步把注意力从具体分辨提升到其同伦与导出层面, 研究导出范畴、三角范畴、微分分次范畴以及更高范畴中的结构; 其关键思想是: 真正本质的对象不是某个特定分辨, 而是其拟同构类与由此决定的导出结构. 换言之, 古典同调代数偏重「构造与计算」, 现代同调代数偏重「结构与范畴化统一」.

在物理学中, 古典同调代数的重要性首先体现在对称性与扩张问题上: 空间群本质上可视为晶格平移群被点群扩张所得, 而这类群扩张及其分类与群上同调紧密相关, 因此同调方法自然进入空间群、晶体对称性和相关拓扑约束的研究. 另一方面, 现代同调代数的重要性则体现在拓扑量子场论、弦论与拓扑序中: 一方面, Witten 的拓扑量子场论开辟了「上同调型场论」的系统视角; 另一方面, 在弦论的 B-model 与 D-brane 理论中, 导出范畴成为刻画膜态与稳定性的核心语言; 而在凝聚态理论中, Levin-Wen 弦网模型¹ 的数学骨架主要是融合范畴、Drinfeld 中心与更广

¹Wen 指的是文小刚.

* Chapter 16. 古典同调代数速成课 (a crash course of classical homological algebra)

义的范畴化结构, 属于现代同调/范畴方法在拓扑序中的代表性应用.

16.1 加性范畴

作为预备, 我们在本章介绍加性范畴. 该部分主要参考贺伟的《范畴论》[贺伟 06, Chapter 4], 黎景辉、白正简和周国晖的《高等线性代数学》[黎白周 14, Chapter 13-14], 以及郑浩的《范畴论讲义》[郑浩, §2.4], 前者是最早的一批范畴论中文教材, 后者直至本笔记作成之时仍未出版, 只是讲义. 另, 也可参看 Lane 的 *Categories for the Working Mathematician* [Lan98, Chapter 8], 此书为权威范畴论教材.

Definition 16.1 [准加性范畴 (preadditive category), 加性函子 (additive functor)]. 若范畴 $\mathcal{C}$ 满足对任意的 $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 是 Abel 群且态射的复合兼容双线性, 即

$$(g + g') \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f' + g' \circ f + g' \circ f'$$

对任意的 $f, f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 和 $g, g' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ 均成立, 则称 $\mathcal{C}$ 是准加性范畴. 准加性范畴之间保持态射加法的函子 $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 就称为**加性函子**, 即 $T(f + g) = T(f) + T(g)$.

对准加性范畴中的 Abel 群 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, 记单位元为 0_{AB} , 简记 0, 称作**零态射**. 类比地, 单位态射记作 1_A , 简记为 1. 注意记号 0 和 1 没有区分不同 Hom-集, 依语境不至引起歧义. 下文为方便起见, 常省略复合符号 $\circ$ 不写, 例如 $fg \equiv f \circ g$.

Example. Abel 群范畴 Ab 和 R -模范畴 $R\text{-Mod}$ 均是准加性范畴.

Example. 若范畴 $\mathcal{C}$ 是加性的, 则协变函子 h_A 和逆变函子 h^A 均加性.

Definition 16.2 [核 (kernel), 余核 (cokernel)]. 设 $\mathcal{C}$ 是一个准加性范畴, 给定 $f, 0 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, 若 $k \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ 是两者的等值子, 则称 k 是 f 的**核**, 记作 $k = \text{Ker}(f)$; 对偶地, 若 $c \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, D)$ 是两者的余等值子, 则称 c 是 f 的**余核**, 记作 $c = \text{Coker}(f)$.

$$\begin{array}{ccccccc} C & \xrightarrow{k} & A & \xrightleftharpoons[0]{f} & B & \xrightarrow{c} & D \\ \exists! \uparrow r & \nearrow k' & & & & \searrow c' & \downarrow \exists! s \\ C' & & & & & & D' \end{array}$$

Remark. 也有文献是把对象记作核与余核, 在上面的定义中就是 $C = \text{Ker}(k)$, $D = \text{Coker}(c)$. 这种符号技法更复合我们在群论中的习惯, 所以后文也常使用. 虽然符号存在差异, 但概念的内蕴在

16.1. 加性范畴

于泛性质, 故不至引发混淆.

从定义中我们直接可见 k 是 f 的核当且仅当 $fk = 0k = 0$ 且任给的 k' 均存在唯一的 t 使得 $k' = kt$ 从而 $fk' = fkt = 0t = 0$; 对偶的, c 是 f 的余核当且仅当 $cf = 0f = 0$ 且任给 c' 均存在唯一的 s 使得 $c' = sc$ 从而 $c'f = scf = s0 = 0$.

Proposition 16.1. 核是单态射, 余核是满态射.

Proof. 根据对偶原理 *Prin. 9.1*, 只需证明核的情形. 设 $k, f, 0$ 的定义由如上交换图给出. 考虑 $D \begin{smallmatrix} \xrightarrow{w_1} \\ \xrightarrow{w_2} \end{smallmatrix} C$, 使得 $kw_1 = kw_2$, 只需证明左消去律 $w_1 = w_2$. 因为 $fk w_1 = 0$, 由核的泛性质, 存在唯一的 $w : D \rightarrow C$ 使得 $kw_1 = kw$, 这就证明了 $w_1 = w = w_2$. $\square$

Lemma 16.1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个准加性范畴, $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 则下列条件均相互等价:

- A 是始对象;
- A 是终对象;
- A 是零对象;
- $1_A = 0_A$;
- $\text{End}_{\mathcal{C}}(A)$ 平凡.

Proof. $(1) \implies (4)(5)$: 若 A 是始对象, 则 $\text{End}_{\mathcal{C}}(A)$ 只有一个元素 0 . $(4) \iff (5)$ 显然. $(4) \implies (2)$, 任取 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$, $\forall B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 均有 $1_A f = 0_A f = 0_{BA} \in \mathcal{C}(B, A)$. 从而 $(1) \iff (2)$, 均等价于 (3) . $\square$

该引理说明, 在准加性范畴中, 始对象和终对象直接就是零对象了, 我们又知道始/终/零对象存在就是同构意义下唯一的.

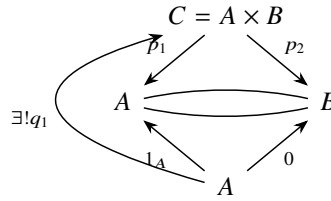
Lemma 16.2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个准加性范畴, $A, B, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 则下列条件均互相等价:

- $Z = A \times B$;
- $Z = A \amalg B$;

* Chapter 16. 古典同调代数速成课 (a crash course of classical homological algebra)

- 存在 $p_1, p_2, q_1, q_2 : A \xrightleftharpoons[p_1]{q_1} Z \xrightleftharpoons[q_2]{p_2} B$ 满足 $p_1 q_1 = 1_A$ 和 $p_2 q_2 = 1_B$ 以及 $q_1 p_1 + q_2 p_2 = 1_Z$.

Proof. (1) $\implies$ (3): 此时取 p_1 和 p_2 为投影. 在准加性范畴 $\mathcal{C}$ 中, 总能取 $0_{AB} : A \rightarrow B$, 使得 $\{1_A, 0_{AB}\}$ 是离散图 $\{A, B\}$ 以 A 为顶点的锥形.



根据积的泛性质 **Prop. 9.6**, 存在唯一一个 $q_1 : A \rightarrow Z$, 使得 $p_1 q_1 = 1_A, p_2 q_1 = 0$. 同理存在唯一一个 $q_2 : B \rightarrow Z$ 使得 $p_1 q_2 = 0, p_2 q_2 = 1_B$. 此时有 $p_1(q_1 p_1 + q_2 p_2) = p_1, p_2(q_1 p_1 + q_2 p_2) = p_2$, 但 $p_1 1_Z = p_1, p_2 1_Z = p_2$, 根据单位态射的唯一性, $q_1 p_1 + q_2 p_2 = 1_Z$.

(3) $\implies$ (1): 我们有 $p_1 q_2 = p_1(q_1 p_1 + q_2 p_2) q_2 = p_1 q_2 + p_1 q_2$, 从而 $p_1 q_2 = 0$, 同理 $p_2 q_1 = 0$. 考虑 $f_1 : C \rightarrow A, f_2 : C \rightarrow B, h = q_1 f_1 + q_2 f_2 : C \rightarrow Z$, 满足 $p_1 h = p_1(q_1 f_1 + q_2 f_2) = f_1, p_2 h = p_2(q_1 f_1 + q_2 f_2) = f_2$. 若 $h' : C \rightarrow Z$ 也满足 $p_1 h' = f_1, p_2 h' = f_2$, 则 $h' = (q_1 p_1 + q_2 p_2) h' = q_1 f_1 + q_2 f_2 = h$, 从而 $Z = A \times B, f_1$ 和 f_2 是投影.

对如上证明, 态射全部取反, 从而 $p_{1,2}$ 与 $q_{1,2}$ 功能对调, 从而证明 (2) $\iff$ (3). 这正是对偶原理 **Prin. 9.1**. $\square$

该命题说明, 在准加性范畴中, 若对象 Z 是有限积/有限余积, 则其自动称为该族的有限「双积」:

Definition 16.3 [双积 (biproduct)]. 若对象 Z 同时是对象 A 和 B 的积与余积, 即

$$A \xrightleftharpoons[p_1]{q_1} Z \xrightleftharpoons[q_2]{p_2} B$$

使得 $p_1 q_1 = 1_A, p_2 q_2 = 1_B, q_1 p_1 + q_2 p_2 = 1_Z$, 则把 Z 连同 (q_1, q_2, p_1, p_2) 称作 A 和 B 的**双积**. 记作 $Z = A \oplus B$, 并定义双函子 $\oplus : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 使得对任意的态射 $f_1 : A_1 \rightarrow B_1, f_2 : A_2 \rightarrow B_2$, 均有 $f_1 \oplus f_2 : A_1 \oplus A_2 \rightarrow B_1 \oplus B_2$ 满足对投影 $p_i : A_1 \oplus A_2 \rightarrow A_i, p'_i : B_1 \oplus B_2 \rightarrow B_i$ 和余投影 $q_i : A_i \rightarrow A_1 \oplus A_2, q'_i : B_i \rightarrow B_1 \oplus B_2$, 有 $(f_1 \oplus f_2) q_i = q'_i f_i$,

16.1. 加性范畴

$p'_i(f_1 \oplus f_2) = f_i p_i$. 有限双积情形记作 $\bigoplus_{i=1}^n A_i$.

$$\begin{array}{ccc} A_1 \oplus A_2 & \xrightarrow{f_1 \oplus f_2} & B_1 \oplus B_2 \\ p_i \downarrow & & \downarrow p'_i \\ A_i & \xrightarrow{f_i} & B_i \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A_1 \oplus A_2 & \xrightarrow{f_1 \oplus f_2} & B_1 \oplus B_2 \\ q_i \uparrow & & \uparrow q'_i \\ A_i & \xrightarrow{f_i} & B_i \end{array}$$

Remark. 回忆 [Ex. 25](#) 提到的 *Abel* 群的直和, 此处记号蕴意相同.

定义中的两个交换图实则是等价的. 若第一个图交换, 根据 [Lem. 16.2](#), 有 $(f_1 \oplus f_2) q_i = 1_{B_1 \oplus B_2} (f_1 \oplus f_2) q_i = (q'_1 p'_1 + q'_2 p'_2) (f_1 \oplus f_2) q_i = q'_i f_1 p_1 q_i + q'_i f_2 p_2 q_i = q'_i f_i$, 从而第二个图交换. 反之亦然.

考虑 $f: \bigoplus_{i=1}^n A_i \rightarrow \bigoplus_{j=1}^m B_j$, 其可以由态射族 $f_{ij} = p'_j f q_i: A_i \rightarrow B_j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$

完全确定, 这里 $p'_j: \bigoplus_{j=1}^m B_j \rightarrow B_j$ 是投影, $q_i: A_i \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n A_i$ 是余投影. 这件事并不十分显然, 细说明之: 我们有双积恒等式 $p_i^{(\prime)} q_k^{(\prime)} = \delta_{ik}, \sum_i q_i^{(\prime)} p_i^{(\prime)} = 1$, 我们可以提取分量, $f_{ij} := p'_j f q_i: A_i \rightarrow B_j$; 反之

$$f = 1_B f 1_A = \left(\sum_j q'_j p'_j \right) f \left(\sum_i q_i p_i \right) = \sum_{ji} q'_j p'_j f q_i p_i = \sum_{ji} q'_j f_{ij} p_i$$

则说明 f_{ij} 可以完全表出 f . 因此我们将 f 等价地看作一个 $n \times m$ 的矩阵 (f_{ij}) , 这时双积之间的态射的复合就是通常矩阵的乘积.

Definition 16.4 [**加性范畴 (additive category)**]. 若准加性范畴存在有限积和零对象, 则称 $\mathcal{C}$ 是一个**加性范畴**.

Proposition 16.2. 若 $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是加性范畴 $\mathcal{C}$ 到准加性范畴 $\mathcal{D}$ 之间的函子, 其具有加性当且仅当其保持双积.

Proof.

□

16.2 Abel 范畴

Definition 16.5 [Abel 范畴 (Abelian category)]. 加法范畴 $\mathcal{C}$ 称为 **Abel 范畴**, 如果其满足:

- 有限完备性与有限余完备性;
- 任意单态射均为某态射的核, 任意满态射均为某态射的余核.

Lemma 16.3. 设 $\mathcal{C}$ 是 *Abel* 范畴, $f \in \text{Mor}(\mathcal{C})$, 则

- f 是单的, 当且仅当 $f = \text{Ker}(\text{Coker}(f))$, 当且仅当 $\text{Ker}(f) = 0$;
- f 是满的, 当且仅当 $f = \text{Coker}(\text{Ker}(f))$, 当且仅当 $\text{Coker}(f) = 0$;

Proof.

□

Proposition 16.3. 设 $\mathcal{C}$ 是 *Abel* 范畴, 则任意的 $f \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ 均可以同构意义下唯一地分解为 $f = me$, 且 m 是单的 (*monomorphism*), e 是满的 (*epimorphism*).

Proof.

□

据此命题, 我们把 *Abel* 范畴中态射的分解 $f = me$ 中的 m 称作 f 的**像 (image)**, 记作 $m = \text{Im}(f)$, e 称为**余像 (coimage)**, 记作 $e = \text{Coim}(f)$. 滥用符号地, 我们用下图表达这一概念:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ e \downarrow & & \uparrow m \\ \text{Coim}(f) & \xrightarrow{\sim} & \text{Im}(f) \end{array} .$$

Example 36 [线性映射]. 线性空间之间的线性映射 $T : V \rightarrow W$ 有熟知的分解:

$$V \xrightarrow{\pi} V/\text{Ker}(T) \xrightarrow{\cong} \text{Im}(T) \xrightarrow{\iota} W$$

即商去核之后得到线性空间之间的同构. π 就是商映射, ι 是自然嵌入.

16.3. 正合列

Example 37 [同态基本定理]. 同态基本定理成立的群范畴 $\mathbf{Grp}$ 不是 $Abel$ 范畴, 当我们全当举例只为说明: 对任意的群同态 $f: G \rightarrow H$, 根据同态基本定理 *Thm. 2.1*,

$$G \xrightarrow{\pi} G/\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Im}(f) \xrightarrow{\iota} H$$

所以, 在 $Abel$ 范畴中, 「同态基本定理」是普遍成立.

Theorem 16.1 [Mitchell 嵌入定理 (Mitchell's embedding theorem)]. 任何小 $Abel$ 范畴均可在保持核与余核的函子下作为子范畴全嵌入到一个 $R\text{-Mod}$ 小范畴中.

Proof.

□

16.3 正合列

??

著名数学家 Grothendieck 引入在 $Abel$ 范畴上进行同调代数的思想, 这是古典同调代数的一个统领性纲领.

Theorem 16.2.

* Chapter 16. 古典同调代数速成课 (a crash course of classical homological algebra)

16.4 模的投射, 内射与平坦

16.5 复形同调

16.6 导出函子

16.6.1 左导出函子与 Ext

16.6.2 右导出函子与 Ext

16.6.3 泛 δ 函子

16.6.4 K 群

16.7 同调群

16.7.1 系数在群的模的上同调群

16.7.2 非交换上同调群

References of this chapter

[贺伟 06] 贺伟.《范畴论》. 1st ed. 北京: 科学出版社, 2006. isbn: 7-03-017096-2.

[黎白周 14] 黎景辉, 白正简, and 周国晖, eds.《高等线性代数学》. 北京: 高等教育出版社, 2014. isbn: 9787040410570.

[郑浩] 郑浩.《范畴论讲义》. PDF lecture notes. Unpublished lecture notes.

[Lan98] S. M. Lane. Categories for the Working Mathematician. 2nd ed. Vol. 5. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 1998. isbn: 978-0-387-98403-2.

17

么半范畴

Contents

17.1 融贯性	339
17.2 配边范畴	342
17.3 辫结构	343
17.4 中心	350
17.5 融合范畴	350
17.6 拓扑序	350

么半范畴旨在范畴中引入一个「平行运算 (in parallel)」, 这是一种类似于张量积 $\otimes$ 并带有么元 **1** 的结构. 么半范畴在几何学和数学物理中有广泛的运用, 关于其与量子力学的关系可见 Heunen and Vicary 的 *Categories for Quantum Theory: An Introduction* [HV19]. 举一例以体验, 设两个系统各自的态空间均为 Hilbert 空间, 记作 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, 我们想考虑联合系统, 自然的想法就是张量积 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 这个我们已经熟悉了. 而么半范畴可视作此想法的推广.

回忆 **Prop. 7.6**, 我们可以体验到在涉及泛性质的构造中, 严格的相等往往是颇强的条件, 么半范畴亦同理. 考虑三个系统 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, 我们自然会问 $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$ 是否成立. 已有的实践告诉我们这个要求过强了, 所以我们仅要求两者同构即可.

Definition 17.1 [么半范畴 (monoidal category)]. 么半范畴意指一组资料 $(\mathcal{V}, \otimes, a, \mathbf{1}, \iota)$, 其中

- $\mathcal{V}$ 是一个范畴;
- $\otimes : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ 是二元函子, 其在对象和态射集上定义的映射分别记为 $(X, Y) \mapsto X \otimes Y$ 和 $(f, g) \mapsto f \otimes g$;
- a 是函子范畴 $\text{Fct}(\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{V})$ 中的同构

$$a : ((\cdot \otimes \cdot) \otimes \cdot) \xrightarrow{\sim} (\cdot \otimes (\cdot \otimes \cdot)),$$

使得对所有对象 X, Y, Z, W , 下图交换.

Chapter 17. 么半范畴

$$\begin{array}{ccc}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W & \\
 a(X,Y,Z) \otimes \text{id}_W \swarrow & & \searrow a(X \otimes Y, Z, W) \\
 (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \\
 a(X, Y \otimes Z, W) \searrow & & \swarrow a(X, Y, Z \otimes W) \\
 X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) & \xrightarrow{\quad \text{id}_X \otimes a(Y, Z, W) \quad} & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
 \end{array}$$

- 对象 $\mathbf{1} \in \text{Ob}(\mathcal{V})$ 称为**么元**, 相应的函子 $\mathbf{1} \otimes -$ 和 $- \otimes \mathbf{1}$ 须给出范畴 $\mathcal{V}$ 到自身的等价, 它们作用在态射上是 $(\mathbf{1} \otimes -)f = \text{id}_{\mathbf{1}} \otimes f$ 和 $(- \otimes \mathbf{1})f = f \otimes \text{id}_{\mathbf{1}}$;
- $\iota: \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}$.

这里的 a 又称**结合约束**. 我们习惯将 $\otimes$ 想成某种二元运算, 现实中 $\otimes$ 鲜少具备严格结合律 $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)$, 因此退而求其次, 将结合律的等式改成一族给定的「约束」 $a(X, Y, Z): (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\sim} X \otimes (Y \otimes Z)$, 使得 a 对各变元皆自然. 由于结合约束可以反复套用, a 还应具备第三点的相容条件. 此交换图表称为**五边形公理 (pentagon axiom)**, 画法是以 X, Y, Z, W 循序相乘的所有可能方式作为图的顶点; 能应用一次结合约束 a 相连的以边连接. 同理, 么元 $\mathbf{1}$ 满足的并非严格等式 $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1}$, 而是自然同构 ι .

Definition 17.2. 给定么半范畴 $(\mathcal{V}, \otimes, a, \mathbf{1}, \iota)$ 和对象 X , 由于 $\mathbf{1} \otimes -$ 和 $- \otimes \mathbf{1}$ 给出范畴等价 $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, 我们可以

- 唯一地定义 $\lambda_X: \mathbf{1} \otimes X \xrightarrow{\sim} X$ 使得

$$\text{id}_{\mathbf{1}} \otimes \lambda_X = \left[\mathbf{1} \otimes (\mathbf{1} \otimes X) \xrightarrow{a(\mathbf{1}, \mathbf{1}, X)^{-1}} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \otimes X \xrightarrow{\iota \otimes \text{id}_X} \mathbf{1} \otimes X \right];$$

- 同理可唯一地定义 $\rho_X: X \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\sim} X$ 使得

$$\rho_X \otimes \text{id}_{\mathbf{1}} = (\text{id}_X \otimes \iota) \circ a(X, \mathbf{1}, \mathbf{1}).$$

它们了到 $\text{id}_{\mathcal{C}}$ 的自然变换 $\lambda: \mathbf{1} \otimes \bullet \xrightarrow{\sim} \bullet$ 和 $\rho: \bullet \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\sim} \bullet$.

λ, ρ 也称作**么约束**, 它们与 a 的角色相近. 稍加说明如此定义的唯一性: 根据 **Thm. 9.1**, 因为 $\mathbf{1} \otimes -$ 给出到自身的等价, 因而全忠实本质满, 也就是说在

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(A, B) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(\mathbf{1} \otimes A, \mathbf{1} \otimes B), \quad \forall A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$$

上是双射. 令 $A = \mathbf{1} \otimes X, B = X$, 可得

$$[(\iota \otimes \mathrm{id}_X) \circ a(\mathbf{1}, \mathbf{1}, X)^{-1}] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(\mathbf{1} \otimes (\mathbf{1} \otimes X), \mathbf{1} \otimes X) \leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(\mathbf{1} \otimes X, X)$$

双射, 因此存在唯一的 $\lambda_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(\mathbf{1} \otimes X, X)$ 与 $(\iota \otimes \mathrm{id}_X) \circ a(\mathbf{1}, \mathbf{1}, X)^{-1}$ 对应, 对应关系由函子 $\mathbf{1} \otimes -$ 给出, 即 $\mathrm{id}_X \otimes \lambda_X = (\iota \otimes \mathrm{id}_X) \circ a(\mathbf{1}, \mathbf{1}, X)^{-1}$.

Lemma 17.1 [Kelly 相干性定理 (Kelly's coherence theorem)]. 对于么半范畴 $(\mathcal{V}, \otimes, a, \mathbf{1}, \lambda, \rho)$ 的任意对象 X , 以下等式成立

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbf{1} \otimes X} &= \mathrm{id} \otimes \lambda_X : \mathbf{1} \otimes (\mathbf{1} \otimes X) \rightarrow \mathbf{1} \otimes X, \\ \rho_{X \otimes \mathbf{1}} &= \rho_X \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{1}} : (X \otimes \mathbf{1}) \otimes \mathbf{1} \rightarrow X \otimes \mathbf{1}, \\ \lambda_{\mathbf{1}} &= \rho_{\mathbf{1}} = \iota : \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}. \end{aligned}$$

而对任意对象 X, Y , 下列各图交换:

$$\begin{array}{ccc} (X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y & \xrightarrow{a(X, \mathbf{1}, Y)} & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \\ \rho_X \otimes \mathrm{id}_Y \searrow & & \swarrow \mathrm{id}_X \otimes \lambda_Y \\ & X \otimes Y & \end{array},$$

以上又称么半范畴的**三角形公理 (triangle axiom)**,

$$\begin{array}{ccc} (X \otimes Y) \otimes \mathbf{1} & \xrightarrow{\quad} & X \otimes (Y \otimes \mathbf{1}) \\ \rho_{X \otimes Y} \searrow & & \swarrow \mathrm{id}_X \otimes \rho_Y \\ & X \otimes Y & \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} (\mathbf{1} \otimes X) \otimes Y & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{1} \otimes (X \otimes Y) \\ \lambda_X \otimes \mathrm{id}_Y \searrow & & \swarrow \lambda_{X \otimes Y} \\ & X \otimes Y & \end{array},$$

以及

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{1} \otimes X) \otimes \mathbf{1} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{1} \otimes (X \otimes \mathbf{1}) \\ \rho_{\mathbf{1} \otimes X} \downarrow & & \downarrow \lambda_{X \otimes \mathbf{1}} \\ \mathbf{1} \otimes X & \xrightarrow{\lambda_X} X & \xleftarrow{\rho_X} X \otimes \mathbf{1} \end{array}.$$

本引理箭头均为同构.

Chapter 17. 么半范畴

Proof. 先证前两个式子. 对 $\mathbf{1} \otimes X \xrightarrow{\lambda_X} X$ 使用函子 $\mathbf{1} \otimes -$ 和 id_C 并考虑自然变换 λ , 得到图

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} \otimes (\mathbf{1} \otimes X) & \xrightarrow{\text{id}_1 \otimes \lambda_X} & \mathbf{1} \otimes X \\ \lambda_{\mathbf{1} \otimes X} \downarrow & & \downarrow \lambda_X \\ \mathbf{1} \otimes X & \xrightarrow{\lambda_X} & X \end{array},$$

又 λ_X 为同构, 从而 $\text{id}_1 \otimes \lambda_X = \lambda_{\mathbf{1} \otimes X}$. 同理可证第二式.

细观图表

$$\begin{array}{ccccc} & & (X \otimes \mathbf{1}) \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ ((X \otimes \mathbf{1}) \otimes \mathbf{1}) \otimes Y & & & & X \otimes (\mathbf{1} \otimes (\mathbf{1} \otimes Y)) \\ & \searrow & \downarrow (\rho_X \otimes \text{id}_1) \otimes \text{id}_Y & \swarrow \rho_X \otimes \text{id}_{\mathbf{1} \otimes Y} & \downarrow \text{id}_X \otimes \lambda_{\mathbf{1} \otimes Y} \\ & & (X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y & \xrightarrow{\quad} & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \\ & \nearrow & \uparrow (\text{id}_X \otimes \iota) \otimes \text{id}_Y & \nwarrow \text{id}_X \otimes (\iota \otimes \text{id}_Y) & \\ (X \otimes (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})) \otimes Y & \xrightarrow{\quad} & X \otimes ((\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \otimes Y) & & \end{array}$$

其中所有箭头皆同构, 纵横箭头皆来自结合约束 a . 五角形公理断言五角形外框交换, 我们要证明内部的交换性: 内部划分五个按边并接的部分, 最下方的矩形、左侧三角形、左上方扭曲的四边形、右上方三角形、右侧三角形.

左上方扭曲的四边形是交换的, 归结于 a 的自然性, 考虑对 $\mathcal{V}^3$ 范畴的 $(X \otimes \mathbf{1}, \mathbf{1}, Y) \xrightarrow{(\rho_X, \text{id}_1, \text{id}_Y)}$ $(X, \mathbf{1}, Y)$ 作用函子 $((\cdot \otimes \cdot) \otimes \cdot)$ 和 $(\cdot \otimes (\cdot \otimes \cdot))$ 并考虑自然变换 a , 于是得到图

$$\begin{array}{ccc} ((X \otimes \mathbf{1}) \otimes \mathbf{1}) \otimes Y & \xrightarrow{(\rho_X \otimes \text{id}_1) \otimes \text{id}_Y} & (X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y \\ a(X \otimes \mathbf{1}, \mathbf{1}, Y) \downarrow & & \downarrow a(X, \mathbf{1}, Y) \\ (X \otimes \mathbf{1}) \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) & \xrightarrow{\rho_X \otimes (\text{id}_1 \otimes \text{id}_Y)} & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \end{array},$$

正是左上方扭曲的四边形. 同理可证下方矩形也是交换的.

其余三个三角形图中只要任两者交换, 剩下者自动交换. 今断言右上三角图交换. 诚然, 由 λ_Y 的定义以及已经证明的引理第一式子, 最右三角在施行 $X \otimes -$ 前便已交换; 同理可证左三角交换. 由于任意 $\mathcal{V}$ 中对象皆同构于某个 $\mathbf{1} \otimes Y$, 这就证明了第四式 (图), 而在其中取 $X = Y = \mathbf{1}$ 并比对 ρ_1, λ_1 的构造, 则得到 $\text{id}_1 \otimes \lambda_1 = \text{id}_1 \otimes \iota$ 和 $\rho_1 \otimes \text{id}_1 = \iota \otimes \text{id}_1$, 于是回头证出第三式子.

准此要领, 可以考虑求解

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (Z \otimes 1) \otimes (X \otimes Y) & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 ((Z \otimes 1) \otimes X) \otimes Y & & & & Z \otimes (1 \otimes (X \otimes Y)) \\
 \downarrow (\rho_Z \otimes \text{id}_X) \otimes \text{id}_Y & & \rho_Z \otimes \text{id}_{X \otimes Y} & & \downarrow \text{id}_Z \otimes \lambda_{X \otimes Y} \\
 (Z \otimes X) \otimes Y & \xrightarrow{\quad} & Z \otimes (X \otimes Y) & \xleftarrow{\quad} & \\
 \uparrow (\text{id}_Z \otimes \lambda_X) \otimes \text{id}_Y & & \text{id}_Z \otimes (\lambda_X \otimes \text{id}_Y) \uparrow & & \\
 (Z \otimes (1 \otimes X)) \otimes Y & \xrightarrow{\quad} & Z \otimes ((1 \otimes X) \otimes Y) & &
 \end{array}$$

对于任意对象 X, Y, Z . 此处过程从略, 事成后得证第五、六两式 (图).

现证明引理最后的图表交换: 将之拆解为

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 \otimes (X \otimes 1) & & \\
 & \nearrow & & \searrow \lambda_{X \otimes 1} & \\
 (1 \otimes X) \otimes 1 & \xrightarrow{\lambda_X \otimes \text{id}} & X \otimes 1 & & \\
 \downarrow \rho_{1 \otimes X} & & \downarrow \rho_X & & \\
 1 \otimes X & \xrightarrow{\lambda_X} & X & &
 \end{array}$$

并 ρ 的自然性可知矩形部分交换, 另一方面已证明三角部分交换, 故全图交换. $\square$

17.1 融贯性

一些文献对幺半范畴的定义较为复杂, 其中 λ, ρ 和三角形公理都在定义中. 我们以上采用的是李文威的《代数学方法: 卷一》[李文威 23, Chapter 3] 中的定义, 并遵循原著还原诸符合直观的交流图表. 由于幺半范畴的结合律与幺元都是在差一个同构的意义下定义的, 证明它们满足一些直观的性质十分不易, 这体现为种种交换图表. 然而至少有两个问题悬而未决:

- 实践中能否化约到具有严格结合律及幺元的情形?
- **Def. 17.1** 是否穷尽了对幺半范畴的期待? 更具体地说, 从二元函子 $\otimes$ 和结合约束 a , 幺约束 λ, ρ 出发, 能制造千变万化的图表, 它们既是「自然的」, 理应交换. 试问能从 MacLane 的五角形公理和 $\iota: 1 \otimes 1 \xrightarrow{\sim} 1$ 的性质推出这一切吗?

两个问题密切相关. 对于问题 1, 我们先引入如下概念:

Chapter 17. 么半范畴

Definition 17.3. 么半范畴 $\mathcal{V}$ 被称为**严格的**, 如果

- 结合约束 a 是等号, 即 $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)$;
- 么约束 λ, ρ 是等号, 即 $X \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1} \otimes X = X$.

这里 X, Y, Z 表 $\mathcal{V}$ 中任意对象.

Definition 17.4. 设 $\mathcal{V}_1$ 和 $\mathcal{V}_2$ 为么半范畴. 从 $\mathcal{V}_1$ 到 $\mathcal{V}_2$ 的**么半函子**意谓资料 (F, ξ_F) , 其中 $F : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ 是函子而

$$\xi_F : F(\cdot) \otimes F(\cdot) \xrightarrow{\sim} F(\cdot \otimes \cdot)$$

是二元函子之间的同构, 使得 $\exists \varphi_F : F(\mathbf{1}_1) \simeq \mathbf{1}_2$, 并且下图对所有对象 X, Y, Z 交换:

$$\begin{array}{ccc} F((X \otimes Y) \otimes Z) & \xrightarrow{F \circ a(X, Y, Z)} & F(X \otimes (Y \otimes Z)) \\ \nearrow \xi_F(X \otimes Y, Z) & & \nwarrow \xi_F(X, Y \otimes Z) \\ F(X \otimes Y) \otimes F(Z) & & F(X) \otimes F(Y \otimes Z) \\ \nwarrow \xi_F(X, Y) \otimes \text{id} & & \nearrow \text{id} \otimes \xi_F(Y, Z) \\ (F(X) \otimes F(Y)) \otimes F(Z) & \xrightarrow{a(F(X), F(Y), F(Z))} & F(X) \otimes (F(Y) \otimes F(Z)) \end{array}$$

Definition 17.5. 设 $F, G : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ 为么半函子, 其间的**么半自然变换**, 记作 θ , 是使得 $\theta_{\mathbf{1}_1}$ 为同构, 且使下图对所有 X, Y 都交换的自然变换

$$\begin{array}{ccc} F(X) \otimes F(Y) & \xrightarrow{\xi_F(X, Y)} & F(X \otimes Y) \\ \theta_X \otimes \theta_Y \downarrow & & \downarrow \theta_{X \otimes Y} \\ G(X) \otimes G(Y) & \xrightarrow{\xi_G(X, Y)} & G(X \otimes Y) \end{array}$$

么半自然变换下可定义么半范畴的**么半同构**和**么半等价**, 我们说么半范畴等价指的就是么半等价.

在严格么半范畴中可以将任意个对象的 $\otimes$ -积写成 $X_1 \otimes X_2 \otimes X_3 \cdots$ 的形式而不致歧义; 此时问题 2 也有了肯定的回答, 因为从结合约束和么约束造出的图表只有一种箭头, 就是等号.

17.1. 融贯性

严格么半范畴的理论显然大大地简化了. 所有之前的论证在严格情形下都成了同义反复. 然而代数学中常见的么半范畴多非严格, 这又反过来说明问题 2 的复杂性. MacLane 给出了肯定的回答.

Theorem 17.1 [**MacLane 严格化定理 (MacLane's strictification theorem)**, ??]. 任意么半范畴 $\mathcal{V}$ 都么半等价于一个严格么半范畴; 或者说, 由结合约束 a 和左右么约束 λ, ρ 及其逆构成的任何规范交换图都交换.

Remark. 前一种表述常称为 *MacLane 严格化定理*, 后一种表述常称为 *融贯定理*, 两者等价.

Remark. 该定理被誉为「范畴论中的 Cayley 定理」.

Remark. 该定理使得形如 $(\cdots((X_1 \otimes X_2) \otimes X_3) \otimes \cdots) \otimes X_n$ 到自身的由 $\lambda^\pm, \rho^\pm, a^\pm$ 的复合得到的同构必为恒同, 从而 $X_1 \otimes X_2 \otimes \cdots \otimes X_n$ 良定义, 即精确到同构意义下, 去除括号的方式不依赖路径的选择.

Proof. 此处只铺陈大意, 细致证明应见 [李文威 23] 或 [Lan98]. 设 $\mathcal{V}$ 为么半范畴. 定义新的么半范畴 $\mathbf{e}(\mathcal{V})$ 如下:

- 对象: 形如 (F, ρ) , 其中 $F: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ 是函子, 而

$$\rho = \left(\rho(X, Y) : F(X) \otimes Y \xrightarrow{\sim} F(X \otimes Y) \right)_{X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{V})}$$

是函子间的态射, 使得下图恒交换.

$$\begin{array}{ccc}
 & (F) \otimes Y \otimes Z & \\
 \rho(X, Y) \otimes \text{id}_Z \swarrow & & \searrow a(F(X), Y, Z) \\
 F(X \otimes Y) \otimes Z & & F(X) \otimes (Y \otimes Z) \\
 \rho(X \otimes Y, Z) \searrow & & \swarrow \rho(X, Y \otimes Z) \\
 F((X \otimes Y) \otimes Z) & \xrightarrow{Fa(X, Y, Z)} & F(X \otimes (Y \otimes Z))
 \end{array}$$

Chapter 17. 么半范畴

- 态射: 从 (F_1, ρ_1) 到 (F_2, ρ_2) 的态射是与 ρ 相容的自然变换 $\theta : F_1 \rightarrow F_2$, 即: 图表

$$\begin{array}{ccc} F_1(X) \otimes Y & \xrightarrow{\rho_1} & F_1(X \otimes Y) \\ \theta_X \otimes \text{id}_Y \downarrow & & \downarrow \theta_{X \otimes Y} \\ F_2(X) \otimes Y & \xrightarrow{\rho_2} & F_2(X \otimes Y) \end{array}$$

对所有 X, Y 皆交换; 态射的合成定义为自然变换的纵合成.

- 么元: 取 $\mathbf{1}$ 为恒等函子 $\text{id}_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, 相应地 $\rho(X, Y) := \text{id}_{X \otimes Y}$.
- 定义 $(F_1, \rho_1) \otimes (F_2, \rho_2)$ 为函子 $F_1 F_2 : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ 连同一族同构 $\rho_3(X, Y)$, 给出的

$$(F_1 F_2 X) \otimes Y \xrightarrow{\rho_1(F_2 X, Y)} F_1(F_2 X \otimes Y) \xrightarrow{F_1 \rho_2(X, Y)} F_1 F_2(X \otimes Y)$$

其中 $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{V})$.

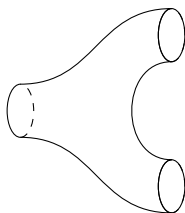
容易验证 $\mathbf{e}(\mathcal{V})$ 是严格么半范畴. 然后定义函子 $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{e}(\mathcal{V})$ 使得对每个对象 X 有

$$L(X) = X \otimes - : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

而相应的 $\rho(Y, Z)$ 取为结合约束 $a(X, Y, Z)$. 在态射层面定义 $L(f) = f \otimes -$. 则可以验证 L 是全忠实本质满函子, 并具有自然的么半函子结构. 从而由 [Thm. 9.1](#) 和么半范畴等价的定义可知, $\mathcal{V}$ 么半等价于 $\mathbf{e}(\mathcal{V})$. □

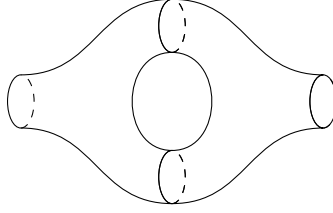
17.2 配边范畴

对于 $n \in \mathbb{N}_+$, 定义配边范畴 $\text{Bord}^{(n, n-1)}$ 如下: 范畴 $\text{Bord}^{(n, n-1)}$ 的对象是 $n-1$ 维紧闭定向微分流形, 包括空集 $\emptyset$. 将对象 X 的定向倒转后得到的对象记作 X^* . 两对象 X, Y 间的态射集由配边的等价类给出, 即一个 n 维带边定向微分流形 W 配上同构 $\partial W \xrightarrow{\sim} X \sqcup Y^*$. 对于 $n=2$ 的情形, 配边可以用俗称裤子的图表表示, 由左而右绘制, 如



17.3. 辫结构

给出了从带正定向的单位圆 S^1 到 $S^1 \sqcup S^1$ 的态射; 图中的「裤子」就是态射定义中的定向流形 W . 由此可知态射的合成无非是缝合裤管, 如



给出了 S^1 的自同态. 显然缝合时要求保持定向, 即要求两裤管的内, 外两面不相错, 此外还要保证接口平滑等. 恒等态射 id_X 由柱体 $W := X \times [0, 1]$ 给出. 无交并 $(X, Y) \mapsto X \sqcup Y$ 赋予 $\text{Bord}^{(n, n-1)}$ 么半范畴结构, 其么元是 $\emptyset$.

围绕范畴 $\text{Bord}^{(n, n-1)}$ 及其变体的研究是拓扑学和拓扑量子场论的重点之一. 本节简单列举建立在配边范畴之上的拓扑量子场论 (Topological Quantum Field Theory, TQFT). 最终理论仍未完全建立, 诸多概念仍未完全严格的定理, 此处的参考文献是 [Ohm24, Lecture 1].

在拓扑量子场论中, 我们需要的流形常带有附加结构, 记作 S , 其中可以包含可微结构, Riemann 度量, 自旋结构, 纤维丛等, 并把工作范畴记作 $\text{Bord}_S^{(n, n-1)}$. 时空 n 维的量子场论 (Quantum Field Theory, QFT) 记作函子

$$\mathcal{Z} : \text{Bord}_S^{(n, n-1)} \rightarrow \text{Vect},$$

也就是 $\mathcal{Z}$ 接受一个流形 M , 返回一个线性空间 $\mathcal{Z}(M)$, 称为态空间 (state space); 接受一个 S -配边 W , 返回一个态空间之间的线性映射. 此外, $\mathcal{Z}$ 必须是么半的, 它保持张量积结构,

$$\mathcal{Z}(M_1 \sqcup M_2) = \mathcal{Z}(M_1) \otimes \mathcal{Z}(M_2).$$

对于对象 M , 我们记 $\mathcal{Z}(M \times [0, \tau]) = U_M(\tau)$, 称为时间演化算符. $\mathcal{Z}$ 的函子性给出半群律

$$U_M(\tau_2) \circ U_M(\tau_1) = U_M(\tau_1 + \tau_2).$$

这使我们可将 $U_M(\tau)$ 写成 $e^{-\tau H_M}$, 其中 H_M 称为 Hamilton 量. 或者, 我们可以弯折这个柱面, 得到一个从 $M \sqcup M^*$ 到空集的配边. 于是 $\mathcal{Z}$ 给出一个配对

$$\mathcal{Z}(\tilde{W}) : \mathcal{Z}(M) \otimes \mathcal{Z}(M^*) \rightarrow \mathbb{C}.$$

这给出了态空间上内积的类比物.

17.3 辫结构

Chapter 17. 么半范畴

Definition 17.6 [??]. 设 $(\mathcal{V}, \otimes, a, \mathbf{1}, \iota)$ 是么半范畴, 其上的**辫结构**意谓二元函子之间的同构

$$c(X, Y) : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X, \quad X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{V})$$

对变元 X, Y 自然, 使得以下图表交换

$$\begin{array}{ccccc} & & X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{c(X, Y \otimes Z)} & (Y \otimes Z) \otimes X \\ & \nearrow & & & \searrow \\ (X \otimes Y) \otimes Z & & & & Y \otimes (Z \otimes X) \\ & \searrow & & & \nearrow \\ & & (Y \otimes X) \otimes Z & \xrightarrow{c(X, Y) \otimes \text{id}_Z} & Y \otimes (X \otimes Z) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{c(X \otimes Y, Z)} & Z \otimes (X \otimes Y) \\ & \nearrow & & & \searrow \\ X \otimes (Y \otimes Z) & & & & (Z \otimes X) \otimes Y \\ & \searrow & & & \nearrow \\ & & X \otimes (Z \otimes Y) & \xrightarrow{\text{id}_X \otimes c(Y, Z)} & (X \otimes Z) \otimes Y \end{array}$$

和

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} \otimes X & \xrightarrow{c(\mathbf{1}, X)} & X \otimes \mathbf{1} \\ & \searrow \lambda_X & \swarrow \rho_X \\ & X & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X \otimes \mathbf{1} & \xrightarrow{c(X, \mathbf{1})} & \mathbf{1} \otimes X \\ & \swarrow \rho_X & \searrow \lambda_X \\ & X & \end{array}$$

其中 X, Y, Z 是 $\mathcal{V}$ 中任意对象, 未标名的箭头都是结合约束或其逆.

Remark. 给定辫结构 c 的么半范畴简称**辫么半范畴**, 将定义中的两个六边形交换图称为??.

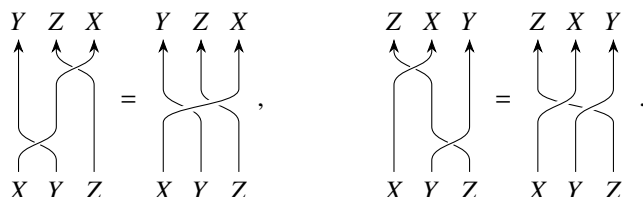
对于严格么半范畴, 六角形公理可以写作

$$\begin{array}{ccc} & X \otimes Y \otimes Z & \\ c(X, Y) \otimes \text{id}_Z \swarrow & & \searrow c(X, Y \otimes Z) \\ Y \otimes X \otimes Z & \xrightarrow{\text{id}_Y \otimes c(X, Z)} & Y \otimes Z \otimes X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & X \otimes Y \otimes Z & \\ \text{id}_X \otimes c(Y, Z) \swarrow & & \searrow c(X \otimes Y, Z) \\ X \otimes Z \otimes Y & \xrightarrow{c(X, Z) \otimes \text{id}_Y} & Z \otimes X \otimes Y \end{array}$$

如此一来, 几何意义更加直观. 两个六边形公理 (严格么半范畴下简化为三角形) 说的无非是「达

17.3. 辫结构

到 X, Y, Z 均错位的效果」(两种情形)的不同路径要求殊途同归. 用辫状图表示即



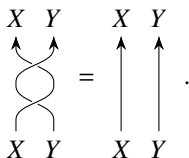
无非是想说,就连着跨越两股的情况而言,辫的同痕变换无关结果.

Definition 17.7. 设 $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ 为么半范畴, 么半函子 $F: \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ 若满足以下性质则称为**辫么半函子**: 对任意对象 X, Y , 下图交换.

$$\begin{array}{ccc} F(X) \otimes F(Y) & \xrightarrow{\quad} & F(X \otimes Y) \\ c_2(F(X), F(Y)) \downarrow & & \downarrow Fc_1(X, Y) \\ F(Y) \otimes F(X) & \xrightarrow{\quad} & F(Y \otimes X) \end{array}$$

Definition 17.8. 设 $(\mathcal{V}, \otimes, a, \mathbf{1}, \iota, c)$ 为辫么半范畴. 如果对称性 $c(Y, X) \circ c(X, Y) = \text{id}_{X \otimes Y}$ 对所有 X, Y 成立, 则称之为**对称么半范畴**.

Remark. 对称么半范畴满足的辫图为

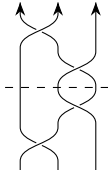


此时辫缠绕所得的节可以穿越解开.

辫子的定义凭直觉自明, 不必自费笔墨严格刻画, 只需注意端点固定, 以及辫子在空间 $\mathbb{R}^3$ 中连续的形变下 (不动端点, 不割断线) 视为等价. 记全体 n 条线的辫子所成集合为 $\mathcal{B}_n$, 定义任意 $x, y \in \mathcal{B}_n$ 的合成 xy 为首尾相衔; 形象地看, 这无非是粘结 x 的起点与 y 的终端以得到新的辫子.

Chapter 17. 幺半范畴

不难看出这是良定的. 例如: 设 $x =$ , $y =$ , 则

$$xy = \boxed{\begin{array}{c} x \\ y \end{array}} = \text{---} \text{---} \text{---}$$


将上图的各条线拉直, 可见它等价于三条垂直线 $|||$. 从代数的视角, $\mathcal{B}_n$ 连同辫子的合成运算构成一个群, 称为 **Artin 辫群 (Artin braid group)**. 乘法结合律是自明的, 乘法幺元是 $\underbrace{|\cdots|}_{n\text{条}}$, 而一个

辫子 x 的逆元无非是让曲线逆行, 或者说取其垂直镜像. 由拓扑学当可立刻看出 $\mathcal{B}_n = \pi_1(C_n, p)$, 其中 $C_n := \{\text{子集 } c \subseteq \mathbb{R}^2 : |c| = n\}$, $p = \{p_1, \dots, p_n\} \in C_n$.

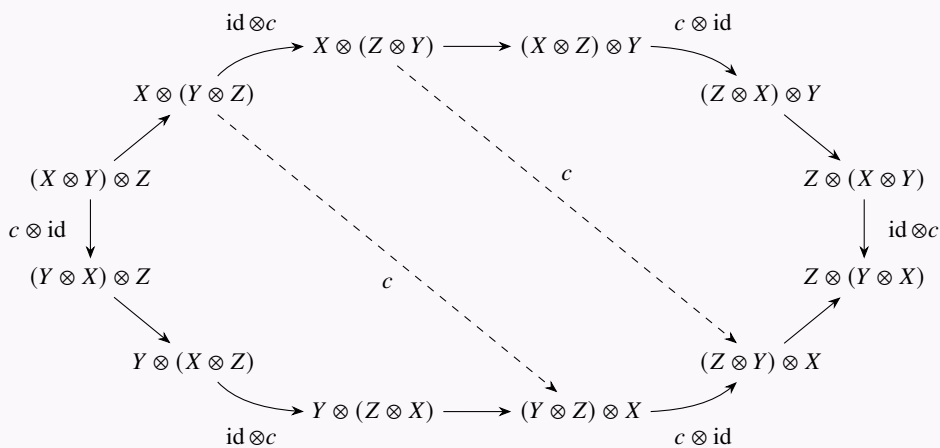
为了给出 $\mathcal{B}_b$ 的群展示, 即求得生成关系, 我们接着研究辫图. 设生成元 $\sigma_i \in \mathcal{B}_n$, $i \in \mathbb{N}_+$, $1 \leq i \leq n$ 对应的辫图为 , 即「第 i 股 (从当前的底边算起) 从上方跨过第 $i+1$ 股」. 容易

看出, 当 $|i-j| \geq 2$ 时, $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$. 另一个重要的关系是「Yang-Baxter 方程」¹:

Theorem 17.2 [??]. 设 $\mathcal{V}$ 为辫幺半范畴. 下图的实线部分对任意对象 X, Y, Z 皆交换.

¹Yang 指的是杨振宁.

17.3. 辫结构



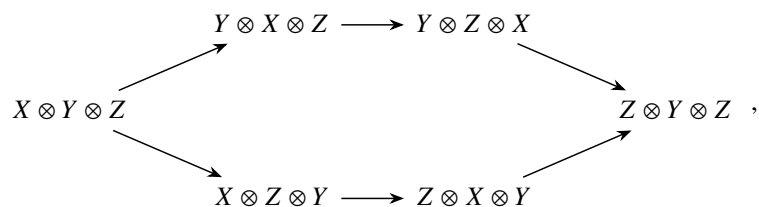
其中未标名的箭头都是结合约束, c 代表自明的交换约束.

Proof. 虚线分大图为一块. 左右两块因六角形公理故交换. 中间的四边形因 c 的自然性而交换. 故全图交换. $\square$

严格么半范畴的情形, 上图可以简并到六项, 其交换性无非是说

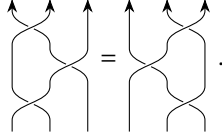
$$(c(Y, Z) \otimes id_X) (id_Y \otimes c(X, Z)) (c(X, Y) \otimes id_Z) = (id_Z \otimes c(X, Y)) (c(X, Z) \otimes id_Y) (id_X \otimes c(Y, Z)),$$

用交换图表示就是



Chapter 17. 么半范畴

用辫图表示就是



上两图依然同痕等价. 于是可得生成关系 $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-2$. 直观上可知, 所有的 σ_i 及逆可以构成所有辫图, 同时我们已经计算出了相邻和不相邻 σ_i 的关系式, 于是可以给出辫群的展示:

Definition 17.9 [Artin 辫群 (Artin braid group)]. n 阶 Artin 辫群 $\mathcal{B}_n$ 通过如下群展示定义:

$$\mathcal{B}_n = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \left| \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & (|i-j| \geq 2), \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & (1 \leq i \leq n-2) \end{array} \right. \right\rangle.$$

生成关系就叫做**辫关系 (braid relation)**. 约定 $\mathcal{B}_0$ 为平凡群.

既然辫么半范畴中的交换图可以用辫图的同痕等价来联系, 我们不禁要问反过来的问题: 由辫图同痕等价给出的函子等式是否成立?

Theorem 17.3 [Joyal–Street 融贯定理 (Joyal–Street coherence theorem)]. 若两个辫图表示同一种辫, 那么它们在任意辫么半范畴中所对应的规范态射相等, 因此由它们组成的交换图交换.

Remark. 规范态射指的是 $a, \lambda, \rho, \iota, c, \otimes$ 和逆 (若有) 组成的复合箭头. 「同一种辫」指的是通过 Reidemeister II、III 变换和平面同痕 (辫图投影到平面后不改变节型的同痕变换) 下的等价类 (标准的辫图不会出现 Reidemeister I 型的情况).

Proof. 不证, 因为远远超出所需. 证明可见 [Lan98]. □

现在构造严格么半范畴 Braid: 其对象集是 $\mathbb{N}_+$, 而任两个对象 n, m 间的态射集在 $n = m$ 时定为 $\mathcal{B}_n$, 否则定为空集. 态射的合成即是辫群中的合成. 紧接着定义 $m \otimes n := m + n$, 而对 $x \in \mathcal{B}_m$, $y \in \mathcal{B}_n$, 态射 $x \otimes y \in \mathcal{B}_{m+n}$ 定为两个辫子的并置, 形象地表述为

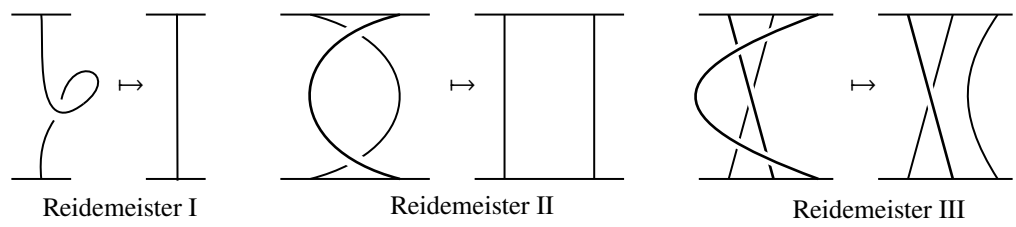
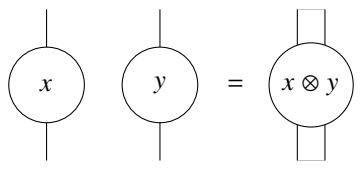
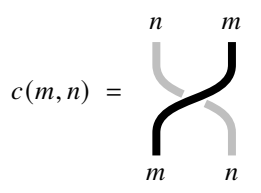


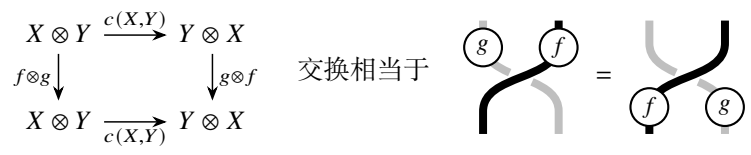
Figure 17.1: 三种 Reidemeister 变换, 反转辫的跨越方式亦是.



易见 $x \otimes y$ 良定. 并使得 Braid 成为严格幺半范畴; 其幺元是 0.
现在定义交换约束 c 以得到辫幺半范畴. 对于 $X = m, Y = n$, 我们以 — 表示对应于辫子 X 的 m 条互不缠绕的线, 而以 — 表示对应于辫子 Y 的 n 条互不缠绕的线. 定义 $c(X, Y) \in \mathcal{B}_{m+n}$ 为



这意味着把 n 条线 — 视为一个整体, 压过由 — 表示的 m 条线.
同理, 交换约束的自然性直观地诠释如下.



由于 $\text{—} \neq \text{—}$, 幺半范畴 Braid 并不对称; 实际上 $c(1, 1)$ 生成无穷循环群群 $\mathcal{B}_2 \simeq \mathbb{Z}$, 这应当是直观的.

Chapter 17. 么半范畴

17.4 中心

Definition 17.10 [??]. 设 $\mathcal{V}$ 是么半范畴, 给定对象 $X \in \text{Ob}(\mathcal{V})$, 其的一个半辫 (half-braiding) γ^X 是对 $\forall Y \in \text{Ob}(\mathcal{V})$ 均自然的同构 $\gamma_Y^X: X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$, 并在省略结合约束后使得

$$\begin{array}{ccc} & Y \otimes X \otimes Z & \\ \gamma_Y^X \otimes \text{id}_Z \nearrow & & \searrow \text{id}_Y \otimes \gamma_Z^X \\ X \otimes Y \otimes Z & \xrightarrow{\gamma_{Y \otimes Z}^X} & Y \otimes Z \otimes X \end{array} .$$

$\mathcal{V}$ 的 **Drinfeld 中心** $Z(\mathcal{V})$ 是这样的范畴: 对象是二元组 (X, γ^X) , 其中 $X \in \text{Ob}(\mathcal{V})$, 态射 $f: (X, \gamma^X) \rightarrow (Y, \gamma^Y)$ 来自 $f: X \rightarrow Y, f \in \text{Mor}(\mathcal{V})$, 满足对 $\forall Z \in \text{Ob}(\mathcal{V})$ 有

$$\begin{array}{ccc} X \otimes Z & \xrightarrow{\gamma_Z^X} & Z \otimes X \\ f \otimes \text{id}_Z \downarrow & & \downarrow \text{id}_Z \otimes f \\ Y \otimes Z & \xrightarrow{\gamma_Z^Y} & Z \otimes Y \end{array} .$$

定义 $(X, \gamma^X) \otimes (Y, \gamma^Y) := (X \otimes Y, \gamma^{X \otimes Y})$, 么元 $(\mathbf{1}, \rho^{-1} \circ \lambda)$, 辫结构 $c((X, \gamma^X), (Y, \gamma^Y)) = \gamma_Y^X$, 容易验证定义从而 Drinfeld 成为辫么半范畴.

17.5 融合范畴

Definition 17.11.

17.6 拓扑序

References of this chapter

[李文威 23] 李文威. 《代数学方法: 卷一》. 1st. 北京, China: 高等教育出版社, 2023, 约 450.

References of this chapter

- [Lan98] S. M. Lane. Categories for the Working Mathematician. 2nd ed. Vol. 5. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 1998. isbn: 978-0-387-98403-2.
- [HV19] C. Heunen and J. Vicary. [Categories for Quantum Theory: An Introduction](#). Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford: Oxford University Press, 2019. isbn: 978-0-19-873962-3.
- [Ohm24] K. Ohmori. “An Introduction to Symmetries in Quantum Field Theory”. In: Simons Lectures on Categorical Symmetries, Volume 1. Ed. by D. Costa et al. Lecture notes by Robert Moscrop. 2024.

Part VI

表示论

Part VII

群论在凝聚态物理中的运用

*More is different: Broken symmetry and the
nature of the hierarchical structure of science.*

— Philip Warren Anderson

抬头的碑文来自美国著名物理学家, 1977 年 Nobel 奖得主 *P. W. Anderson* 的 1972 年的著作 *More is Different* (《多者异也》), 这句话精妙地道出了「涌现」的核心哲学, 并被现代凝聚态物理学视作中心思想.

对称性不是凝聚态物理的全部, 但大量对象形成的多体系统往往伴随着集体行为中涌现而来的对称性. 研究这样的对称性及其破缺是凝聚态物理中的一大方针. 本部分我们将基于前文已有的群论理论, 应用到凝聚态理论之中.

18

点群

Contents

18.1 点群的分类 357

18.1 点群的分类

Definition 18.1 [点群 (point group)]. 点群是三维正交群 $O(3)$ 的有限子群; 若其只包含纯转动, 即其为三维特殊正交群 $SO(3)$ 的子群, 则称为**第一类点群**; 若其还包含反演操作, 则称为**第二类点群**.

考虑绕方向 $\mathbf{k}$ 转动生成的 n 阶群 $\left\{C_k\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right\}$,

Proposition 18.1. 设 G 是点群, $G^+ \leq G$ 是纯转动部分, I 为反演操作, 则 G^+ 与 G 的关系有且仅有以下三种可能:

- $G = G^+$;
- $G = G^+ \sqcup IG^+$, 从而 $I \in G$;
- $G = G^+ \sqcup g_-G^+$, 且 $I \notin G$, 其中 $\forall g_- \in G - G^+$.

Proof.

□

Chapter 18. 点群

第一条描述的正是第一类点群, 第二三条刻画了第二类点群的可能特征 — $G - G^+$ 正是陪集分解的另一半, 改变手性的操作的集合, 且可能不含反演操作 I . 这个定理说明, 只要知道了所有的第一类点群, 就可以据此构造所有的第二类点群.

19

晶体空间群

Contents

19.1 晶体对称性	359
19.2 Brillouin 区	361
19.3 波矢星和小旁群	362

19.1 晶体对称性

我们考虑三维 Euclid 空间的等距变换 (二维情况同理可得), 显然构成群, 记作 $E(3)$, 容易知道这样的等距变换必能写为一个平移和一个正交变换的组合

$$\mathbf{r} \mapsto R \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r}_0.$$

所以我们将等距变换记作 $(R|\mathbf{r}_0)$. 一种用矩阵表示的方法如下: 进行认同 $\mathbf{r} = (\mathbf{r}, 1)^T$ 以及

$$(R|\mathbf{r}_0) = \begin{pmatrix} R & \mathbf{r}_0 \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

如此一来, 就有

$$(R|\mathbf{r}_0) \mathbf{r} = \begin{pmatrix} R & \mathbf{r}_0 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ 1 \end{pmatrix} = R \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r}_0.$$

Proposition 19.1. 三维 Euclid 空间的等距变换以接连作用为乘法, 满足

$$(R_1|\mathbf{r}_1) \cdot (R_2|\mathbf{r}_2) = (R_1 R_2|\mathbf{r}_1 + R_1 \cdot \mathbf{r}_2),$$

Chapter 19. 晶体空间群

从而等距变换群为平移群右半直积正交变换群, 即 $E(3) = T \rtimes \text{SO}(3)$.

Proof. 直接计算

$$\begin{aligned} (R_1|\mathbf{r}_1) \cdot (R_2|\mathbf{r}_2) \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} R_1 & \mathbf{r}_1 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_2 & \mathbf{r}_2 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & \mathbf{r}_1 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_2 \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r}_2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_1 \cdot R_2 \cdot \mathbf{r} + R_1 \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

以上是对三维 Euclid 空间等距变换的一般讨论, 下面介绍晶体中的对称操作. 晶体的核心特点在于对称性的离散化, 不是 $E(3)$ 中所有的操作都是晶体的对称操作了.

平移 平移表示为 $(I|\mathbf{r}_0)$, 平移群 T 同构于 $\mathbb{Z}^3$, 因为只有平移晶格整数倍才是对称操作.

旋转 旋转表示为 $(R|0)$. 晶体的旋转对称操作是 $\text{SO}(3)$ 的真子群, 例如无限小旋转使得晶格错位因而不是晶体对称操作. 选取晶体中某轴, 绕其旋转 $\frac{2\pi}{n}$ 是对称操作, 且更小不可旋转, 则称这个轴为 n -度轴, 这个旋转为 n -重旋转, 常把 n -重旋转记作 n 或者 c_n . 显然 n -度轴给出一个 $\mathbb{Z}_n$ 群, 记住 C_n .

Proposition 19.2. 晶体中仅可能存在 $n = 1, 2, 3, 4, 6$ -度轴.

Proof.

□

空间反演 空间反演记作 $-I \equiv (-I|0)$, 显然其改变空间的手性. $\text{O}(3)$ 群一共有两个连通分支, 即 $\text{O}(3) = \text{SO}(3) \sqcup \text{ISO}(3)$, 空间反演 I 是改变手性的

镜面反射 镜面反射也会改变空间手性,

反轴

螺旋轴 下面正式给出晶体点群的定义, 注意其定义不同于分子点群, 其依赖整个晶体对称性.

19.2. Brillouin 区

Definition 19.1 [点群 (point group)]. 设晶体的平移群为 T , 空间群为 SG , 定义其点群为

$$PG := SG/T.$$

一般情况下, SG 不是 T 和 PG 的简单直积, 因为可能存在非点式的操作. 但是我们依旧可以用群扩张来考究三者的关系:

$$0 \rightarrow T \rightarrow SG \rightarrow PG \rightarrow 1. \quad (19.1)$$

Proposition 19.3. 设晶体的平移群为 T , 空间群为 SG , 则扩招

$$0 \rightarrow T \rightarrow SG \rightarrow PG \rightarrow 1$$

分裂即 $SG = T \rtimes PG$ 当且仅当 SG 是点式的.

Proof.

□

19.2 Brillouin 区

考虑 $T = \mathbb{Z}^3$, 因为其是 Abel 群, 其所有不可约表示都是一维的, 取态 $|\psi\rangle$ 为一个一维表示, 那么这个态就是 T 的所有元素的共同本征态, 因此三个平移操作生成元¹ $T_i, i = x, y, z$ 的本征值均是 $U(1)$ 相因子,

$$T_i |\psi\rangle = e^{-i\kappa_i} |\psi\rangle.$$

Definition 19.2 [Brillouin 区 (Brillouin zone)].

x

¹分别向三个晶格方向平移一个格矢, 实空间定义为 $\langle \mathbf{r} | T_i | \psi \rangle := \psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}_i) = \langle \mathbf{r} + \mathbf{a}_i | \psi \rangle$, 从而么正, $T_i^\dagger = T_i^{-1}, T_i |\mathbf{r}\rangle = |\mathbf{r} - \mathbf{a}_i\rangle$

19.3 波矢星和小旁群

Definition 19.3 [波矢星 (star of $\mathbf{k}$), 小旁群 (little cogroup), 小群 (little group)].

$$LG_{\mathbf{k}} := \{g \in PG \mid g \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k}\},$$

$$\mathbf{k}^* = \{g \cdot \mathbf{k} \mid \forall g \in PG\},$$

$$G_{\mathbf{k}} = \{(R|\mathbf{r}_0) \in SG \mid R \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} + G\}.$$

Definition 19.4 [Wyckoff 位置 (Wyckoff position)].

在量子力学中, Fermi 子的 Fock 空间上有一个特别的对称性, 称之为 ?? — 定义 Fermi 子奇偶算符 $\hat{P}_f := (-1)^{\hat{N}} = e^{i\pi\hat{N}}$, 其本征值只有 ± 1 , 分别对应于粒子数为偶数和奇数的本征态. Fock 空间显然是有一个 $\mathbb{Z}_2$ -分次的结构, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\text{even}} \oplus \mathcal{F}_{\text{odd}}$, 产生湮灭算符张成的亦是 $\mathbb{Z}_2$ -分次代数. 数学上, Fermi 子奇偶对称性指的是 $[\hat{H}, \hat{P}_f] = 0$, 这个式子成立的原因是因为一个合法的封闭 Fermi 子系统, 其 Hamilton 量每一项的产生湮灭算符数目必然是偶数 (不要求粒子数守恒), 否则对 Fock 空间上任何态的期望都是 0 即非物理的. 从而, 这种对称性不会自发或非自发地破缺.

Proposition 20.1. 设 $\hat{P}_f$ 是 Fermi 子奇偶算符, 则 $\hat{c}_i^\dagger$ 和 $\hat{c}_i$ 是模式 i 的产生和湮灭算符, 则

$$\hat{P}_f \hat{c}_i \hat{P}_f^{-1} = -\hat{c}_i, \quad \hat{P}_f \hat{c}_i^\dagger \hat{P}_f^{-1} = -\hat{c}_i^\dagger.$$

Proof.

□

20.1 神奇的 Fermi 子旋转

在量子力学中, 自旋空间上的旋转操作会影响 Fermi 子的相位, 例如电子作为一种 $\frac{1}{2}$ -自旋的 Fermi 子, 经过 2π 的旋转后, 波函数不是回到自身, 而是差了一个 -1 的相位! 我本人习惯于将整个过程理解为一个代表自旋的「箭头」在一个 Möbius 带上移动了一周, 移动 2π 后恰好反向. 这

Chapter 20. Fermi 子双群

个现象十分地抽象, 涉及的物理和数学概念也很繁杂, 本节旨在阐明清楚旋转的代数本质, 以便后文.

在量子力学中, 什么是旋转? 让我们先回到经典力学, 在经典理论中, 粒子被视作理想化的具有内在属性 (如电荷量, 质量等) 的、实空间体积无限小的几何点, 所谓的旋转, 毫无歧义地被定义为实空间上的变换操作: $R \in \text{SO}(3)$, $\mathbf{r} \mapsto R\mathbf{r}$. 而在量子力学中, 描述粒子使用的是其相应的 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$, 因此所谓旋转作用, 应当定义为在 Hilbert 空间上的某种作用, 即「旋转是在 Hilbert 空间上的一种表示」, $\hat{U} : \text{SO}(3) \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H})$, $R \mapsto \hat{U}(R)$, $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}$, $|\psi\rangle \mapsto \hat{U}(R)|\psi\rangle$. 当然, 我们希望量子力学中的旋转尽可能符合我们经典力学的直觉, 考虑某态的实空间部分 $|\mathbf{r}\rangle$, 命 $\hat{U}(R)|_{\mathbf{r}}|\mathbf{r}\rangle = |R\mathbf{r}\rangle$, 其中 $\hat{U}(R)|_{\mathbf{r}}$ 表示 $\hat{U}(R)$ 限制在实空间部分. 其次, 我们还要求表示 $(\hat{U}, \mathcal{H})$ 是么正的, 比方说考虑内积 $\langle\psi|\psi\rangle$, 其变换后不变唯有么正. 以上条件说明 $\hat{U}$ 不是任取的, 需要满足一些条件, 目前仍没有完全确定 $\hat{U}$.

Proposition 20.2. 考虑旋转表示 $\hat{U} : \text{SO}(3) \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H})$, 其在实表象下即对波函数的作用为 $(\hat{U}(R)|_{\mathbf{r}}\psi)(\mathbf{r}) = \psi(R^{-1}\mathbf{r})$.

Proof. 利用么正性, $(\hat{U}(R)|_{\mathbf{r}}\psi)(\mathbf{r}) = \langle\mathbf{r}|\hat{U}(R)|_{\mathbf{r}}|\psi\rangle = \langle R^{-1}\mathbf{r}|\psi\rangle = \psi(R^{-1}\mathbf{r})$. □

加入仅仅考虑 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$, 上述命题已经完全描述了 $\hat{U}$ 的效果, 因为此时 $\hat{U}$ 只有实空间部分. 真正区别于经典和量子的地方在于, $\hat{U}$ 在非实空间部分的效果!

21.1 拓扑相	365
21.2 非平凡相	368
21.3 xxx	368

Fermi 子拓扑分类理论

拓扑绝缘体/拓扑超导体分类理论的背景是：传统凝聚态理论主要用对称性破缺和局域序参量分类物质相，但量子 Hall 效应显示，有些相的差别不是来自普通对称性，而是来自能带波函数的全局拓扑结构。后来人们发现，在自由 Fermi 子能带体系中，只要能隙不闭合，体系可以连续变形；一旦能隙闭合，拓扑不变量才可能改变。因此人们希望回答：给定空间维数和时间反演、粒子-空穴、手征等对称性，一个有隙自由 Fermi 子体系到底有多少种拓扑相？哪些相是平凡的，哪些相具有稳定的边界态？

这个理论的重要成果就是所谓**拓扑周期表**：它把十个 **Altland–Zirnbauer 对称类** 和空间维数结合起来，给出每一类体系的拓扑分类群，例如 $\mathbb{Z}$ 、 $\mathbb{Z}_2$ 或 0。它解决的问题是：在自由 Fermi 子近似下，系统性地列出所有可能的稳定拓扑绝缘体和拓扑超导体。核心思想可以自然地说成：一个有隙 Hamilton 量的负能态形成一个「占据态矢量丛」，拓扑相就是这个矢量丛在保持能隙和对称性条件下的等价类；而在 Dirac 低能模型中，动量项和质量项必须彼此反对易，所以它们生成 Clifford 代数，分类问题转化为「能否加入质量项」的 Clifford 扩张问题，最终由 K 理论和 Bott 周期性统一描述。

21.1 拓扑相

晶格体系中，动量空间里的一次量子化 Hamilton 量写成 $\hat{H}(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \text{BZ}$, 其中 BZ 表示 **Brillouin 区 (Brillouin zone)**, 并用 1BZ 表示第一 Brillouin 区。物理上常假设配以 **Born–von Karman 边界条件 (Born–von Karman boundary condition)**, 即 $\text{BZ} \cong T^d$, 也就是倒空间每个 Euclid 维度方向均首位相接, 构成 d -维环面。热力学极限下不同的边界条件给出相同的物理, 而该边界条件是最好用的。

Chapter 21. Fermi 子拓扑分类理论

我们称 Hamilton 量 $\hat{H}$ 是有能隙的 (gapped), 若存在有限大小的能量区间 $(E_1, E_2) \subseteq \mathbb{R}$ 使得 $(E_1, E_2) \cap \text{Spec}(\hat{H}) = \emptyset$, 其中 $\text{Spec}(\cdot)$ 表示求取自伴算符的谱. Fermi 子体系的 **Fermi 能 (Fermi energy)** E_F 被定义为零温时最高占据态的能量, 若存在有限大小的 $\varepsilon > 0$ 使得 $(E_F - \varepsilon, E_F + \varepsilon) \cap \text{Spec}(\hat{H}) = \emptyset$. 我们就说 $\hat{H}$ 在 Fermi 面处存在能隙. 时常通过平移能量使得 $E_F = 0$, 那么定义的等价条件为 $0 \notin \text{Spec}(\hat{H})$. 在晶格系统中, 我们取倒空间的 Bloch Hamilton 量 $\hat{H}(\mathbf{k})$, 那么能隙存在的条件就是 $0 \notin \text{Spec}(\hat{H}(\mathbf{k})), \forall \mathbf{k} \in \text{BZ}$.

Convention 21.1. 若无特殊说明, 约定 Fermi 子系统的 Fermi 能 $E_F = 0$.

遵循如上约定, 我们称负能态为占据态, 正能态为非占据态. 对 $\mathbf{k} \in \text{BZ}$, 进行分解

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_-(\mathbf{k}) \oplus \mathcal{H}_+(\mathbf{k}), \quad (21.1)$$

其中 $\mathcal{H}_-(\mathbf{k}) := \bigoplus_{E_n(\mathbf{k}) < 0} \ker(\hat{H}(\mathbf{k}) - E_n(\mathbf{k}))$, 同理定义 $\mathcal{H}_+(\mathbf{k})$. 当 $\mathbf{k}$ 走遍 BZ 后, 所有的 $\mathcal{H}_-(\mathbf{k})$ 拼接为矢量丛 (总空间)

$$E_- := \prod_{\mathbf{k} \in \text{BZ}} \mathcal{H}_-(\mathbf{k}). \quad (21.2)$$

就严格数学概念而言, 占据态矢量丛是三元组 (E_-, π, BZ) , 其中 E_- 为如上定义的总空间, $\pi : E_- \rightarrow \text{BZ}$ 为投影映射, 定义为「取出纤维对应的 $\mathbf{k}$ 点」, BZ 是底流形.

若 $\hat{H}(\mathbf{k})$ 存在能隙, 我们考虑谱分解

$$\hat{H}(\mathbf{k}) = \sum_{E_n(\mathbf{k}) < 0} E_n(\mathbf{k}) \hat{P}_n + \sum_{E_n(\mathbf{k}) > 0} E_n(\mathbf{k}) \hat{P}_n,$$

然后用符号函数 sgn 进行符号演算,

$$\hat{Q}(\mathbf{k}) := \text{sgn}(\hat{H}(\mathbf{k})) = \sum_{E_n(\mathbf{k}) < 0} (-1) \hat{P}_n + \sum_{E_n(\mathbf{k}) > 0} (+1) \hat{P}_n, \quad (21.3)$$

这相当于进行了一次能带的形变. 我们称进行了如此形变的 Hamilton 量为**平坦 Hamilton 量**, 等价的定义为 $\hat{Q}(\mathbf{k})^2 = 1$.

Definition 21.1 [Hamilton 量的拓扑等价]. 两个 Fermi 子晶格体系有能隙一次量子化 Bloch Hamilton 量 $\hat{H}_1(\mathbf{k})$ 和 $\hat{H}_2(\mathbf{k})$ 称为拓扑等价的, 若存在连续同伦 $\hat{H}_t(\mathbf{k}), t \in [0, 1]$ 连接两者, 且形变过程中能隙不关闭, 即 $0 \notin \text{Spec}(\hat{H}_t(\mathbf{k})), \forall t \in [0, 1], \forall \mathbf{k} \in \text{BZ}$.

21.1. 拓扑相

Definition 21.2 [拓扑相 (topological phase)]. 一个拓扑相是一个 Fermi 子晶格体系有能隙一次量子化 Bloch Hamilton 量的拓扑等价类.

Example 38. 证明 $\hat{H}_m(k) = k\sigma_x + m\sigma_z$, $m, k \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$ 与平坦 Hamilton 量拓扑等价.

Proof. 容易解得 $E_{\pm}(k) = \pm\sqrt{k^2 + m^2}$, 显然能带不是平坦的, 但是

$$\hat{Q}(k) := \frac{k\sigma_x + m\sigma_z}{\sqrt{k^2 + m^2}}$$

使得 $\hat{Q}(k)^2 = 1$, 且 $\hat{H}_t(\mathbf{k}) = (1-t)\hat{H}_m(\mathbf{k}) + t\hat{Q}(\mathbf{k})$ 是一个能隙不关闭的同伦路径,

$$E_{\pm}^{(t)}(\mathbf{k}) = \pm \left((1-t)\sqrt{k^2 + m^2} + t \right),$$

满足 $|E_{\pm}^{(t)}(\mathbf{k})| > 0$ 恒成立. □

容易想象, 实际上任意有能隙 Hamilton 量均拓扑等价于一个拓扑平坦的 Hamilton 量, 这个结果称为**谱平坦化定理 (spectral flattening theorem)**. 为了证明这个定理, 我们只需证明函数演算 $\hat{H}_t(\mathbf{k}) = f_t(\hat{H}(\mathbf{k}))$ 不关闭能隙, 其中 $f_t(x) = (1-t)x + t \operatorname{sgn}(x)$, $t \in [0, 1]$. 取 $\lambda \in \operatorname{Spec}(\hat{H}(\mathbf{k}))$, 于是 $f_t(\lambda) = (1-t)\lambda + t \operatorname{sgn}(\lambda)$, 若 $\lambda > 0$, 则 $f_t(\lambda) > 0$; 若 $\lambda < 0$, 则 $f_t(\lambda) < 0$. 据此说明能隙不会关闭, 证毕.

根据谱平坦化定理, 我们可以直接选择平坦化 Hamilton 量 $\hat{Q}(\mathbf{k})$ 作为代表元, 于是分类有限能隙 Hamilton 量就等价于分类平坦 Hamilton 量. 而 $\hat{Q}(\mathbf{k}) = 1 - 2\hat{P}_-(\mathbf{k})$, 因此 $\hat{Q}(\mathbf{k})$ 又等价于投影族 $\hat{P}_-(\mathbf{k})$, 而投影族又等价于占据态矢量丛 $E_- = \coprod_{\mathbf{k} \in \text{BZ}} \operatorname{Im} \hat{P}_-(\mathbf{k})$, 注意我们谈论分类问题是在

给定底流形 BZ 的前提下. 所以分类问题, 实际上是在研究「在同一个 Brillouin 环面上可以存在多少种互不同伦的占据态矢量丛」.

Chapter 21. Fermi 子拓扑分类理论

21.2 非平凡相

21.3 xxx

Definition 21.3 [Dirac Hamilton 量 (Dirac Hamiltonian)]. 设 V 是 d 维度实内积空间, $\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间, 给定一组 Hermite 算符 $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_d \in \text{End}(\mathcal{H})$ 构成 Clifford 代数 $\{\Gamma_i, \Gamma_j\} = 2\delta_{ij}, i, j = 0, 1, \dots, d$, 定义

$$\hat{H}(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^d k_i \Gamma_i + m \Gamma_0$$

为 d -维质量 m 的 Dirac Hamilton 量, 其中 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) \in V^*, m \in \mathbb{R}$.

Example 39. 考虑正方晶格上的紧束缚电子模型:

$$\hat{H} = -t \sum_{\langle ij \rangle, \alpha} \left(\hat{c}_{i\alpha}^\dagger \hat{c}_{j\alpha} + \text{h.c.} \right) - t' \sum_{\langle\langle ij \rangle\rangle, \alpha} \left(\hat{c}_{i\alpha}^\dagger c_{j\alpha} + \text{h.c.} \right),$$

其中 $\langle ij \rangle$ 与 $\langle\langle ij \rangle\rangle$ 分别代表最近邻和次近邻格点, t 和 t' 分别为最近邻和次近邻跃迁矩阵元, $\alpha = \uparrow, \downarrow$ 代表电子的自旋.

- 计算上述模型中电子的色散关系 $\hat{H}(\mathbf{k})$;
- 证明当 $t' = 0$ 时, 该模型具有如下的粒子-空穴对称性: $\mathcal{C} \hat{c}_{i\alpha} \mathcal{C}^{-1} = (-1)^i \hat{c}_{i\alpha}^\dagger$, 并写出该粒子-空穴对称性变换在一次量子化下的形式;
- 讨论在粒子-空穴变换下, t' 项如何变化.

Solution. (1) 考虑 Fourier 变换

$$\hat{c}_{i\alpha} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_i} \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}, \quad \hat{c}_{i\alpha}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_i} \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger,$$

代入二次量子化 Hamilton 量公式, 化简得到

$$\hat{H} = -2t \sum_{\mathbf{k}\alpha} (\cos k_x a + \cos k_y a) \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha} - 4t' \sum_{\mathbf{k}\alpha} \cos k_x a \cos k_y a \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha},$$

观察知, 此时 *Hamilton* 量已经是对角的了, 所以

$$E(\mathbf{k}) = -2t(\cos k_x a + \cos k_y a) - 4t' \cos k_x a \cos k_y a.$$

(2) 当 $t' = 0$, 考虑 $\hat{c}_{i\alpha} \mapsto (-1)^i \hat{c}_{i\alpha}^\dagger$, $\hat{c}_{i\alpha}^\dagger \mapsto (-1)^i \hat{c}_{i\alpha}$,

$$\left(\hat{H} = -t \sum_{\langle ij \rangle, \alpha} \left(\hat{c}_{i\alpha}^\dagger \hat{c}_{j\alpha} + \text{h.c.} \right) \right) \mapsto \left(t \sum_{\langle ij \rangle, \alpha} \left(\hat{c}_{i\alpha} \hat{c}_{j\alpha}^\dagger + \text{h.c.} \right) = -t \sum_{\langle ij \rangle, \alpha} \left(\hat{c}_{j\alpha}^\dagger \hat{c}_{i\alpha} + \text{h.c.} \right) = \hat{H} \right),$$

因此说明了电子-空穴对称性. 下面先证明一个关系:

$$\mathcal{C} \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha} \mathcal{C}^{-1} = \hat{c}_{\mathbf{Q}-\mathbf{k}\alpha}^\dagger,$$

其中 $\mathbf{Q} = \left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a} \right)$. 将 *Fourier* 变换公式代入左侧, 得到

$$\mathcal{C} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_i} \hat{c}_{i\alpha} \right) \mathcal{C}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i (-1)^i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_i} \hat{c}_{i\alpha}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{i(\mathbf{Q}-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}_i} \hat{c}_{i\alpha}^\dagger = \hat{c}_{\mathbf{Q}-\mathbf{k}\alpha}^\dagger.$$

以上已经证明完毕, 下面使用这个公式. 对动量表象下二次量子化 *Hamilton* 量进行电子-空穴变换, 得到

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \hat{H} \mathcal{C}^{-1} &= \sum_{\mathbf{k}\alpha} \left[-2t(\cos k_x a + \cos k_y a) - 4t' \cos k_x a \cos k_y a \right] \hat{c}_{\mathbf{Q}-\mathbf{k}\alpha} \hat{c}_{\mathbf{Q}-\mathbf{k}\alpha}^\dagger \\ &= \sum_{\mathbf{k}\alpha} \left[2t(\cos k_x a + \cos k_y a) + 4t' \cos k_x a \cos k_y a \right] \hat{c}_{\mathbf{Q}-\mathbf{k}\alpha}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{Q}-\mathbf{k}\alpha} + \text{Const} \\ &= \sum_{\mathbf{k}\alpha} \left[2t(\cos(\pi - k_x) a + \cos(\pi - k_y) a) + 4t' \cos(\pi - k_x) a \cos(\pi - k_y) a \right] \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha} + \text{Const} \\ &= \sum_{\mathbf{k}\alpha} \left[-2t(\cos k_x a + \cos k_y a) + 4t' \cos k_x a \cos k_y a \right] \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha} + \text{Const}, \end{aligned}$$

读出一次量子化 *Hamilton* 量的变化为

$$\begin{aligned} (h_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} [-2t(\cos k_x a + \cos k_y a) - 4t' \cos k_x a \cos k_y a]) \\ &\mapsto (\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} [-2t(\cos k_x a + \cos k_y a) + 4t' \cos k_x a \cos k_y a]) \end{aligned}$$

(3) 由 (2) 可知, $t' \mapsto -t'$. □

Chapter 21. Fermi 子拓扑分类理论

Example 40. 考虑一个一维无自旋电子构成的 p 波超导体, 其二次量子化的 *Hamilton* 量在 $k = 0$ 附近的形式为:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \hat{c}_k^\dagger & \hat{c}_{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & k \\ k & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_k \\ \hat{c}_{-k}^\dagger \end{pmatrix},$$

相应的一次量子化 *Hamilton* 量为

$$\hat{h}(k) = k\sigma_x + m\sigma_z,$$

其中 $\sigma_{x,y,z}$ 为 *Pauli* 矩阵, m 为不随动量 k 变化的常数.

- 证明上述 *Hamilton* 量具有粒子-空穴对称性 $C = U_C \mathcal{K}$, 其中 $\mathcal{K}$ 代表复共轭操作, 并找出幺正矩阵 U_C 的形式;
- 证明通过一个幺正变换, 可以将上述 *Hamilton* 量写成如下形式:

$$\hat{h}(k) = k\sigma_x + imi\sigma_y,$$

并求出在该幺正变换之后粒子-空穴对称性的形式, 即 $C = U_C \mathcal{K}$ 中的幺正矩阵 U_C .

Solution. (1) 展开 $\hat{H}$ 的定义式,

$$\hat{H} = m\hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k + k\hat{c}_k^\dagger \hat{c}_{-k}^\dagger + k\hat{c}_{-k} \hat{c}_k - m\hat{c}_{-k} \hat{c}_{-k}^\dagger,$$

并考虑如此变换 $\hat{c}_k \mapsto \hat{c}_{-k}^\dagger$, 于是

$$\hat{H} \mapsto m\hat{c}_{-k} \hat{c}_{-k}^\dagger + k\hat{c}_{-k} \hat{c}_k + k\hat{c}_k^\dagger \hat{c}_{-k}^\dagger - m\hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k = -m\hat{c}_{-k}^\dagger \hat{c}_{-k} + k\hat{c}_{-k} \hat{c}_k + k\hat{c}_k^\dagger \hat{c}_{-k}^\dagger + m\hat{c}_k \hat{c}_k^\dagger + \dots = \hat{H} + \dots,$$

其中省略的部分是与色散关系无关的常数, 从而说明了该变换是一个粒子-空穴对称性. 因此要找的矩阵为

$$U_C = \sigma_x = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

(2) 注意到, 我们的目标是 $\sigma_z \mapsto -\sigma_y$, 同时保证 σ_x 不变, 于是取旋转算符

$$U\left(\hat{\mathbf{x}}, \frac{\pi}{2}\right) = e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_x},$$

那么

$$U\left(\hat{\mathbf{x}}, \frac{\pi}{2}\right) \sigma_z U\left(\hat{\mathbf{x}}, \frac{\pi}{2}\right)^{\dagger} = -\sigma_y, \quad U\left(\hat{\mathbf{x}}, \frac{\pi}{2}\right) \sigma_x U\left(\hat{\mathbf{x}}, \frac{\pi}{2}\right)^{\dagger} = \sigma_x,$$

所以

$$U\left(\hat{\mathbf{x}}, \frac{\pi}{2}\right) = e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_x} = \left(\cos \frac{\pi}{4} - i\sigma_x \sin \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

就是所求变换.

$$U_C \mapsto U\left(\hat{\mathbf{x}}, \frac{\pi}{2}\right) U_C U\left(\hat{\mathbf{x}}, \frac{\pi}{2}\right)^{\dagger*} = U\left(\hat{\mathbf{x}}, \frac{\pi}{2}\right) U_C U\left(\hat{\mathbf{x}}, \frac{\pi}{2}\right)^T = \begin{pmatrix} -i & \\ & -i \end{pmatrix}.$$

□

Part VIII

附录



有限单群分类

Contents

A.1 陈述	375
A.1.1 单群族	375
A.1.2 散在单群	378
A.2 推论	380
A.2.1 关于阶	380
A.2.2 关于结构	382
A.2.3 其他应用	384
A.3 历史	385

本文节选自[香蕉空间](#).

有限单群分类是群论中的一项深刻复杂且意义非凡的浩大工作. 它表明, 对任何有限单群, 其要么归属于 18 个无穷的单群族, 要么是 26 个散在单群之一. 有限单群是有限群结构的基本构件, 这一点由 Jordan–Hölder 定理保证.

A.1 陈述

A.1.1 单群族

具体来说, 18 个单群族中除了素数阶循环群 Z_p 、交错群 A_n 以外, 剩下的 16 族都是 Lie 型单群, 它们都有对应的根系. 如 [Tab. A.1](#) 所示.

Table A.1: 有限单群分类与性质表

名称	记号	阶数	重复
素数阶循环群	$Z_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p 是素数	p	$Z_3 \cong \mathfrak{A}_3$

交错群	$\mathfrak{A}_n, n > 1$ $n \neq 2, 4$	$\frac{1}{2}n!$	$\mathfrak{A}_3 \cong Z_3$ $\mathfrak{A}_5 \cong A_1(4) \cong A_1(5)$ $\mathfrak{A}_6 \cong A_1(9)$ $\mathfrak{A}_8 \cong A_3(2)$
A_n 根系典型 Chevalley 群	$A_n(q), n > 0$ $(n, q) \neq (1, 2), (1, 3)$	$\frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(n+1, q-1)} \prod_{i=1}^n (q^{i+1} - 1)$	$A_1(4) \cong A_1(5) \cong \mathfrak{A}_5$ $A_1(7) \cong A_2(2)$ $A_1(9) \cong \mathfrak{A}_6$ $A_3(2) \cong \mathfrak{A}_8$
B_n 根系典型 Chevalley 群	$B_n(q), n > 1$ $(n, q) \neq (2, 2)$	$\frac{q^{n^2}}{(2, q-1)} \prod_{i=1}^n (q^{2i} - 1)$	$B_n(2^m) \cong C_n(2^m)$ $B_2(3) \cong {}^2A_3(2^2)$
C_n 根系典型 Chevalley 群	$C_n(q), n > 2$	$\frac{q^{n^2}}{(2, q-1)} \prod_{i=1}^n (q^{2i} - 1)$	$C_n(2^m) \cong B_n(2^m)$
D_n 根系典型 Chevalley 群	$D_n(q), n > 3$	$\frac{q^{n(n-1)}(q^n - 1)}{(4, q^n - 1)} \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2i} - 1)$	无
E_6 根系例外 Chevalley 群	$E_6(q)$	$\frac{q^{36}}{(3, q-1)} \prod_{i \in \{2, 5, 6, 8, 9, 12\}} (q^i - 1)$	无
E_7 根系例外 Chevalley 群	$E_7(q)$	$\frac{q^{63}}{(2, q-1)} \prod_{i \in \{2, 6, 8, 10, 12, 14, 18\}} (q^i - 1)$	无
E_8 根系例外 Chevalley 群	$E_8(q)$	$q^{120} \prod_{i \in \{2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30\}} (q^i - 1)$	无
F_4 根系例外 Chevalley 群	$F_4(q)$	$q^{24} \prod_{i \in \{2, 6, 8, 12\}} (q^i - 1)$	无
G_2 根系例外 Chevalley 群	$G_2(q)$ $q \neq 2$	$q^6 \prod_{i \in \{2, 6\}} (q^i - 1)$	无
A_n 根系典型 Steinberg 群	${}^2A_n(q^2), n > 0$ $n \neq 1, (n, q) \neq (2, 2)$	$\frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(n+1, q+1)} \prod_{i=1}^n (q^{i+1} - (-1)^{i+1})$	${}^2A_3(2^2) \cong B_2(3)$

D_n 根系典型 Steinberg 群	${}^2D_n(q^2), n > 3$	$\frac{q^{n(n-1)}}{(4, q^n + 1)}(q^n + 1) \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2i} - 1)$	无
E_6 根系例外 Steinberg 群	${}^2E_6(q^2)$	$\frac{q^{36}}{(3, q + 1)} \prod_{i \in \{2, 5, 6, 8, 9, 12\}} (q^i - 1)$	无
D_4 根系例外 Steinberg 群	${}^3D_4(q^3)$	$q^{12}(q^8 + q^4 + 1)(q^6 - 1)(q^2 - 1)$	无
Suzuki 群	${}^2B_2(q), q = 2^{2n+1}$ $n > 0$	$q^2(q^2 + 1)(q - 1)$	无
F_4 根系 Ree 群	${}^2F_4(q), q = 2^{2n+1}$ $n > 0$	$q^{12}(q^6 + 1)(q^4 - 1)(q^3 + 1)(q - 1)$	无
Tits 群 *	${}^2F_4(2)', q = 2$	$\frac{1}{2}2^{12}(2^6 + 1)(2^4 - 1)(2^3 + 1)(2 - 1)$ $= 17971200$	无
G_2 根系 Ree 群	${}^2G_2(q), q = 3^{2n+1}$ $n > 0$	$q^3(q^3 + 1)(q - 1)$	无

Tab. A.1 中最右侧的「重复」一列, 指在一些特别的指标情形下会有一些巧合的单群同构. 注意我们已经在第二列的记号中排除了根系本身同构的情况 (例如排除了 B_2, C_2 根系的同构), 所以这些同构是真正有意义的.

Remark. 按照传统我们把 *Tits* 群也视作特殊的 F_4 根系 *Ree* 群, 所以上面的表格具有 19 行. 不过也有人认为 *Tits* 群应该是散在单群.

关于这些群的其他叫法以及记号, 补充信息见下面的表格:

Table A.2: Lie 型单群记号与别名对照表

Lie 型单群记号	单群别称	通俗记号
A_n	线性群	$L_{n+1}, \text{PSL}_{n+1}$
2A_n	酉群	$U_{n+1}, \text{PSU}_{n+1}$
B_n	(奇数阶) 正交群	O_{2n+1}, Ω_{2n+1}
C_n	辛群	Sp_{2n}, PSp_{2n}

D_n	(偶数阶) 正型正交群	$O_{2n}^+, \text{P}\Omega_{2n}^+$
2D_n	(偶数阶) 负型正交群	$O_{2n}^-, \text{P}\Omega_{2n}^-$
G_2, F_4, E_n	G_2, F_4, E_n (例外) 群	G_2, F_4, E_n
2B_2	Suzuki 群	${}^2C_2, Sz, Suz$
3D_4	三重 D_4 群	3D_4
2E_6	扭 E_6 群	2E_6
2F_4	扭 F_4 群	2F_4
2G_2	Ree 群	Ree

A.1.2 散在单群

下面的表格记录了散在的 26 个单群,「散在」指它们不同构于上面单群族中的任何一个.

Table A.3: 26 个散在单群基本性质表

名称、记号与别名	外自同构	$\dim(V)$	阶数
Mathieu 群 M_{11}	1	10	7920
Mathieu 群 M_{12}	2	11	95040
Mathieu 群 M_{22}	2	21	443520
Mathieu 群 M_{23}	1	22	10200960
Mathieu 群 M_{24}	1	23	244823040
Janko 群 J_1	1	56	175560
Janko 群 J_2	2	14	604800
Janko 群 J_3	2	85	50232960
Janko 群 J_4	1	1333	86775571046077562880
Conway 群 Co_3	1	23	495766656000

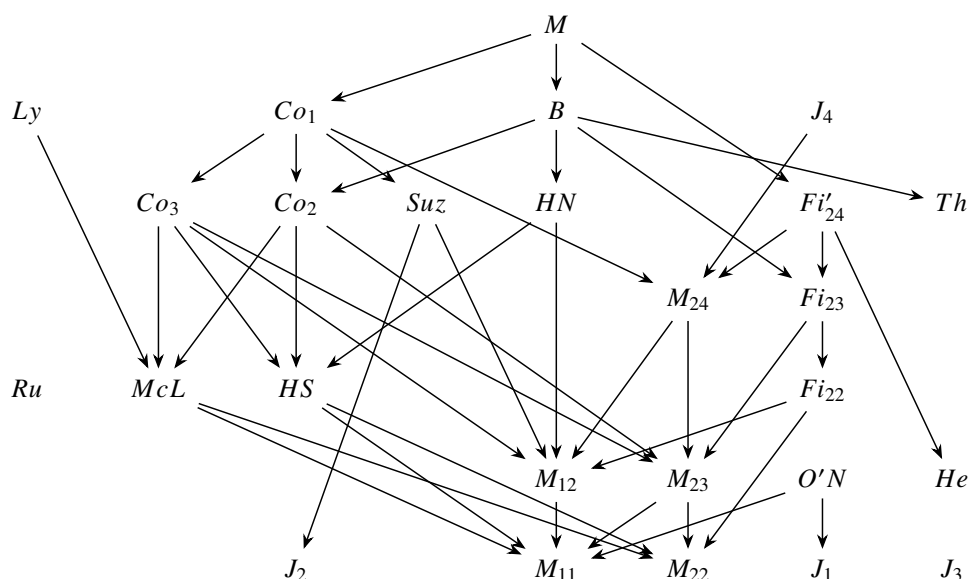
Conway 群 Co_2	1	23	42305421312000
Conway 群 Co_1	1	276	4157776806543360000
Fischer 群 Fi_{22}	2	78	64561751654400
Fischer 群 Fi_{23}	1	782	4089470473293004800
Fischer 群 Fi'_{24}	2	8671	1255205709190661721292800
Higman–Sims 群 HS	2	22	44352000
McLaughlin 群 McL	2	22	898128000
Held 群 He	2	51	4030387200
Rudvalis 群 Ru	1	378	145926144000
Suzuki 散在群 Suz	2	143	448345497600
O’Nan 群 $O’N$	2	10944	460815505920
Harada–Norton 群 HN	2	133	273030912000000
Lyons 群 Ly	1	2480	51765179004000000
Thompson 群 Th	1	248	90745943887872000
小魔群 B	1	4371	4154781481226426191177580544000000
魔群 M	1	196883	808017424794512875886459904961710757005 754368000000000

值得一提的是,除了 $J_1, J_3, J_4, O’N, Ru, Ly$ 这 6 者以外,其他 20 个散在单群都能实现为 (大)魔群 M 的子商. 根据这一关系,人们将这 20 个魔群的子商称为**快乐一族 (Happy Family)**,而将剩下 6 个单群称为**被流放者 (Pariahs)**.

而这 20 个群又被进一步细分为三代:

- 第一代是 $M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}$ 这 5 个 Mathieu 群,它们都是 M_{24} 的子商,和 Steiner 系统的自同构密切相关.
- 第二代是 $Co_1, Co_2, Co_3, Suz, McL, HS, J_2$ 这 7 个群,它们都是 Co_1 的子商,它们和 Leech 格的自同构密切相关.
- 第三代是 $M, B, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}, Th, HN, He$ 这 8 个群,它们是魔群 M 的子商,基本能实现为魔群中一些低阶元素的中心化子.

在子商偏序 (即 $A \leq B$ 当且仅当 A 是 B 的子群的商) 下, 这 26 个散在单群构成下面的完整图表:



此外, 除了未知是否可行的 M_{23} 以外, 其他 25 个散在单群都已被实现为 $\mathbb{Q}$ 有限扩张的 Galois 群.

A.2 推论

A.2.1 关于阶

关于单群的阶, 首先是其具有的不同素因子数量的分析. 素数 p 阶群都是循环群, 素数幂次 p^a 阶群都是幂零群, 由 Burnside 定理我们知道阶具有两个不同素因子的 $p^a q^b$ 阶群都可解, 所以有意义的讨论从三个素因子开始. 此外, Feit–Thompson 定理指出奇数阶非循环群可解, 故不能是单群. 有趣的是除了它们以外, 单群阶数一定是 4 的倍数.

那么有哪些单群仅有三个不同的素因子, 尽管如下结论在 1968 年就被 Marcel Herzog 证明, 但是不可否认在有了分类定理之后这类定理都将具有更系统的处理办法:

A.2. 推论

Theorem A.1 [K_3 单群的分类]. 若有限单群 G 的阶恰具有 3 个素因子, 则该群称为 K_3 单群, 这种群一共只有 8 个:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{A}_5| &= 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5, & |\mathfrak{A}_6| &= 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, \\ |A_1(7)| &= 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7, & |A_1(8)| &= 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7, \\ |A_2(17)| &= 2448 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 17, & |A_2(3)| &= 5616 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 13, \\ |{}^2A_2(3^2)| &= 6048 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7, & |{}^2A_3(2^2)| &= 25920 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5. \end{aligned}$$

类似的我们能定义 K_4 单群就是阶恰具有 4 个素因子的单群, 这基本是这种分类能做的上限. 在有限单群分类被证明之后, 人们确实得到了 K_4 单群的分类.

Theorem A.2 [K_4 单群的分类]. 若 G 是 K_4 单群, 则 G 同构于下面之一:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}_7, \mathfrak{A}_8, \mathfrak{A}_9, \mathfrak{A}_{10}, M_{11}, M_{12}, J_2, A_1(q), \\ &A_2(4), A_2(5), A_2(7), A_2(8), A_2(17), A_3(3), B_2(4), B_2(5), B_2(7), \\ &B_2(9), B_3(2), D_4(2), G_2(3), {}^2A_2(4^2), {}^2A_2(5^2), {}^2A_2(7^2), {}^2A_2(8^2), \\ &{}^2A_2(9^2), {}^2A_3(3^2), {}^2A_4(2^2), {}^2B_2(2^3), {}^2B_2(2^5), {}^3D_4(2^3), {}^2F_4(2)'. \end{aligned}$$

其中 q 使得 $q(q^2 - 1)/(2, q - 1)$ 具有四个素因子.

人们猜测这个列表是无限的, 因为 q 可以取无限多不同的值. 实际上小于 10^8 的 q 的合理取值从小到大有:

$$\begin{aligned} &11, 13, 16, 19, 23, 25, 27, 31, 32, 37, 47, 49, 53, 73, 81, 97, \\ &107, 127, 128, 163, 193, 243, 257, 383, 487, 577, 863, 1153, \\ &2187, 2593, 2917, 4373, 8192, 8747, 131072, 524288, 995327, \\ &1492993, 1594323, 1990657, 5308417, 28311553, 86093443. \end{aligned}$$

至此, 很容易想象没有单群分类定理, 这样的结果基本是极难被做出的.

然后是小单群的列表, 考虑到篇幅, 我们列出阶不超过 10^5 的单群如下:

Theorem A.3 [小阶单群分类]. 若 G 是一个阶数不超过 10^5 的单群, 则 G 必同构下面列表

之一:

$$\begin{array}{llll}
|\mathfrak{A}_5| = 60, & |A_1(7)| = 168, & |\mathfrak{A}_6| = 360, & |A_1(8)| = 504, \\
|A_1(11)| = 660, & |A_1(13)| = 1092, & |A_1(17)| = 2448, & |\mathfrak{A}_7| = 2520, \\
|A_1(19)| = 3420, & |A_1(16)| = 4080, & |A_2(3)| = 5616, & |{}^2A_2(3^2)| = 6048, \\
|A_1(23)| = 6072, & |A_1(25)| = 7800, & |M_{11}| = 7920, & |A_1(27)| = 9828, \\
|A_1(29)| = 12180, & |A_1(31)| = 14880, & |\mathfrak{A}_8| = 20160 & |A_2(4)| = 20160, \\
|{}^2A_3(2^2)| = 25920, & |{}^2B_2(2^3)| = 29120, & |A_1(32)| = 32736, & |A_1(41)| = 34440, \\
|A_1(47)| = 51888, & |A_1(49)| = 58800, & |{}^2A_2(4^2)| = 62400, & |A_1(53)| = 74412, \\
|A_1(37)| = 25308, & |A_1(43)| = 39732, & |M_{12}| = 95040.
\end{array}$$

注意其中 20160 阶的单群有两个不同的同构类.

此外从上面特殊的 20160 阶数出发, 我们可以反问哪些情况下单群的阶能决定群结构呢? 我们有如下的定理:

Theorem A.4. 若两个互不同构的有限单群具有相同的阶, 则恰为以下两种情况之一:

- 两个群分别是 $\mathfrak{A}_8 \cong A_3(2)$ 和 $A_2(4)$, 它们的阶都是 20160.
- 两个群分别是 $B_n(q)$ 和 $C_n(q)$, 其中 q 是奇素数, $n \geq 3$ 是正整数, 它们的阶都是

$$\frac{q^{n^2}}{2} \prod_{i=1}^n (q^{2i} - 1).$$

值得重申的是, 我们已经在前面单群族列表的重复一列中见到 $B_n(2^m) \cong C_n(2^m)$. 包括它在内的其他重复都指的是两个群真的同构, 所以不会在该定理中出现.

A.2.2 关于结构

此外是单群的结构, 首先是关于生成元的讨论. 大概在分类定理完成前, 人们就已经确认了当时已发现的每个单群都能用两个 (至多两个, 循环群只需一个元素) 元素生成. 而在 2000 年 Guralnick 和 Kantor 证明了如下更强的结果:

Theorem A.5 [有限单群都是 $\frac{3}{2}$ -生成的]. 每个有限单群都是 $\frac{3}{2}$ -生成的. 一个群 G 是 $\frac{3}{2}$ -生成的是指任给定 G 中的非平凡元素 $g_1 \neq e$, 总能找到 $g_2 \in G$ 使得 g_1, g_2 生成 G .

由此出发, 在 2008 年 Breuer, Guralnick 和 Kantor 提出了 $\frac{3}{2}$ -生成猜想:

Conjecture A.1. 一个有限群 G 是 $\frac{3}{2}$ -生成的当且仅当对每个非平凡正规子群 $\{1\} \neq H \trianglelefteq G$ 都有 G/H 是循环群.

经过一些数学家们的努力, 这一猜想已经对可解群证明, 并且对不可解群, 情况已经被化归到「几乎单群」的情形.

关于单群中元素形式的论断还有 Ore 猜想, 随着分类定理的证明也已经得证:

Theorem A.6. 若 G 是有限单群, 则 G 中每个元素都能被写成交换子 $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$, $a, b \in G$.

此外, 单群的外自同构也已经被完全讨论清楚, Schreier 在 1926 年提出的猜想随着有限单群分类定理的诞生自然得到了证明:

Theorem A.7. 有限单群的外自同构群总是可解的. 准确地说:

- 对于素数阶循环群 Z_p , 其外自同构群是 $\mathbb{F}_p^\times$ 即 $p-1$ 阶的循环群;
- 对于交错群 $\mathfrak{A}_n$, 外自同构群对 $n \neq 6$ 是循环群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 对 $n = 6$ 时则是 *Klein* 群 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$;
- 对 26 个散在单群, 其中 12 个具有外自同构 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; 剩余 14 个外自同构平凡;
- 对 *Lie* 型单群, 它的外自同构群具有正规子群 D , 商为 $F \times \Gamma$, 这三个群都是可解群; 其中 D 是对角自同构, 该群是循环群, 粗略地说其阶数是原单群阶数的“分母”(一般地, 即最大公因子那部分; 特别地, *Tits* 群时是 2); F 是 $\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_p$ 的基域自同构, 其必然是循环群; Γ 则大抵是 *Dynkin* 图的自同构, 必然是 S_3 的一个子群.

很可惜目前这一结果除了使用分类定理以外没有其他证明. 关于自同构, 如下的无固定点自同构定理也是单群分类的一个推论:

Theorem A.8. 一个有限群如果存在一个只固定单位元的自同构, 则它可解.

还有如下关于阶的非平方素因子的结果:

Theorem A.9. 如果 G 是单群, p 是素数, 且 $p^2 \nmid |G|$, 那么 $p^2 \nmid |\text{Aut}(G)|$.

A.2.3 其他应用

单群分类对特征标理论也有贡献, 例如:

Theorem A.10. 对任意有限群 G 和素数 p , G 的度数和 p 互质的不可约特征标的数目等于 $N_G(P)$ 的度数和 p 互质的不可约特征标的数目. 其中 P 是 G 的一个 Sylow p -子群.

在 Galois 理论中, 单群分类也有许多应用, 例如对素数次有理系数三项式的 Galois 群:

Theorem A.11. 多项式 $f(x) = x^p + ax^k + b \in \mathbb{Q}[x]$, 其中 p 是素数, $1 \leq k \leq p-1$, 则其在 $\mathbb{Q}$ 上的 Galois 群 G 必符合下列其一:

- G 是可解群.
- G 是置换群 $\mathfrak{A}_p$ 或者对称群 $\mathfrak{S}_p$.
- $p = 7$ 且 $G = A_1(7)$.
- $p = 11$ 且 $G = A_1(11)$ 或 $G = M_{11}$.
- $p = 2^n + 1 > 5$ 是 Fermat 素数且 G 同构于一个介于 $A_1(2^n)$ 和 $\text{Aut}(A_1(2^n))$ 间的子群.

单群分类在一些看起来和它不那么相关的领域, 也有一些奇妙的结果:

Theorem A.12. 假设 $f, g \in \mathbb{C}[x]$ 都是不可分解的多项式, 换言之它们都不能被写成 $h_1(h_2(x))$ 的形式, 其中 $\deg h_i \geq 2$. 那么如果 $f(x) - g(y) \in \mathbb{C}[x, y]$ 能被因式分解, 则下面至少其一成立:

- (1) $g(x) = f(ax + b)$ 对合适的 a, b .
- (2) $\deg f = \deg g \in \{7, 11, 13, 15, 21, 31\}$.

且对 (2) 中的六个数, 确实具有 (1) 不符合的例子.

Theorem A.13. 对整体域 $K \subseteq L$, 我们有相对 Brauer 群 $\text{Br}(L/K)$ 是无限群.

该结果乍看起来和分类定理没有关系, 而且看似不困难. 实际上其证明依赖于下面的命题:

Proposition A.1. 若 $H < G$ 是有限群的真子群, 则存在素数 p 和一个 p -元素使得它的共轭不落在 H 中.

然而这个命题目前已知的唯一证明是把 G 化归到单群, 然后进行分类讨论.

A.3 历史

I. 缘起: 概念与孤立群 (1832–1893)

1832	Galois 提出了正规子群和单群的概念, 并找到单群族 $\mathfrak{A}_n$ ($n \geq 5$) 以及 $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$ ($p \geq 5$). 也就是列表中的交错群以及 $A_1(p)$ ($p \geq 5$). 他最早用交错群研究代数方程的根式可解性.
1854	Cayley 抽象出了群的概念, 给出了严谨的定义.
1861	Mathieu 在研究可迁群的过程中, 发现了两个散在单群 M_{11}, M_{12} , 并声称 M_{24} 存在. 这也是最早被发现的几个散在单群.
1870	Jordan 阐述了寻找有限单群的重要性, 因为 Jordan–Holder 定理可以将一般有限群的研究通过合成群列转化为对有限单群的研究. 不过实际上在那时完整的 Jordan–Holder 定理尚未诞生, Jordan 只指出群列中相邻项的商是单群且是某种重要的不变量.
1870	同年 Jordan 还指出可以在素域上研究线性群 $A_n(p), B_n(p), C_n(p), D_n(p)$. 在此之前人们只在 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 这样的域上研究这些群.
1872	Sylow 证明了 Sylow 定理, 提供了分析有限 p -群的重要工具.
1873	Mathieu 发现了另外三个散在单群 M_{22}, M_{23}, M_{24} . 实际上 Mathieu 发现的这五个群都反映了某些 Steiner 系统的自同构.

1892	Holder 证明了非交换单群的阶必须是至少 4 个（可以相同）的素数乘积，并提出需要将有限单群的分类提上日程.
1893	Cole 用完全初等的方法分类了所有阶数不超过 660 的单群，共 5 个，其中包括 504 阶的 $\text{PSL}_2(8)$ ，也就是 $A_1(8) = {}^2G_2(3)'$.

II. 萌芽：表示论与典型群 (1896–1950)

1896	Frobenius 和 Burnside 开始研究有限群的特征标理论.
1899	Burnside 给出了每个对合的中心化子都是非平凡的基本 Abel 2-群（指数 2）的偶数阶单群分类，它们必须是 $A_1(2^q)$. 该定理也被认为是单群系统分类的第一个定理.
1901	Frobenius 使用特征标理论证明了 Frobenius 群不是单群，特别地它们必须具有 Frobenius 核与 Frobenius 补并且形如半直积.
1901	Dickson 定义了一般有限域上的典型群，即 $A_n(q), B_n(q), C_n(q), D_n(q)$ ，并定义了 $E_6(q)$ 以及 $G_2(q)$ ($2 \nmid q$). 不过「典型群」这一名称实则在 1939 年才由 Weyl 提出.
1901	Dickson 出版了《Linear groups, with an exposition of the Galois field theory》并试图在其中列举阶小于 10^6 的单群，不出意外地漏掉了 Suzuki 群 $\text{Sz}(8)$ 和两个散在单群 J_1, J_2 . 正确的列表及完整证明将在约 70 年后出现.
1904	Burnside 使用特征标理论证明了 Burnside 定理，即 $p^a q^b$ 阶的群都可解. 换言之，非交换有限单群的阶至少含有 3 个不同的素因子.
1905	Dickson 定义了 $G_2(q)$ ($2 \mid q$)，因而该群有时也被称为 Dickson 群.
1911	Burnside 猜测每个非交换有限单群都是偶数阶的，等价地每个奇数阶群都可解.
1914–1918	第一次世界大战.
1928	Hall 证明了可解群都具有 Hall 子群，这是他关于可解群的一系列论文中的第一篇.
1933	Hall 开始研究 p -群.
1937	Hall 提出了关于 π -子群的若干定理，可以看作 Sylow 定理对可解群的重要推广，对可解群的研究非常有帮助.

1935	Brauer 开始研究模特征. 虽然 Dickson 在研究有限域上的典型群时已经注意到特征 p 表示与特征 0 表示有许多相似之处, 但关于特征 p 表示的系统研究是由 Brauer 开启的. 1942 年他进一步具体描述了一个群的某些模特征.
1936	Zassenhaus 分类了有限 3-强可迁群, 并在另一篇论文中修正了 Burnside 关于可迁群的一些错误处理.
1938	Fitting 证明了 Fitting 定理并引入 Fitting 子群, 证明了对可解群 Fitting 子群包含其中心化子. 这一工具能够帮助人们猜测某些单群定义在哪些有限域上, 因而也是有限单群分类的重要理论工具.
1939–1945	第二次世界大战.

III. 发展: 对合中心化子与 Lie 型群 (1954–1961)

1954	Brauer 分类了以 $GL_2(q)$ 为某个对合的中心化子的单群.
1955	Brauer–Fowler 定理被证明. 具体来说, 具有给定对合中心化子的有限单群是有限的. 尽管具体界很大而缺乏实效性, 但它启发人们通过研究对合的中心化子来进行有限单群的分类. 此后有限单群分类成果井喷式出现, 标志着该研究进入全盛期.
1955	Chevalley 定义了 Chevalley 群, 成功将所有有限域上的 Lie 型群统一处理, 并由此引入了 $F_4(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$.
1956	Hall–Higman 定理被证明. 它分类了 p -可解群的表示中素数幂阶元素最小多项式的所有情况, 为研究可解群以及特征 p 的抛物子群提供了重要的线性代数工具.
1957	Suzuki 证明奇数阶单 CA 群 (每个非平凡元的中心化子都是 Abel 群的群) 必为素数阶循环群. 这一方法为奇数阶群的研究提供了重要工具, 但距离证明所有奇数阶群可解仍然较远.
1958	Brauer–Suzuki–Wall 定理被证明. 它分类了有限域上的一维射影特殊线性群, 同时也分类了一切单 CA 群.
1959	Steinberg 发现了典型 Steinberg 群 ${}^2A_n(q^2)$, ${}^2D_n(q^2)$ 以及例外 Steinberg 群 ${}^3D_4(q^3)$, ${}^2E_6(q^2)$, 其中 ${}^2E_6(q^2)$ 也几乎同时被 Tits 发现. 这些群可以看作 Chevalley 构造的轻微变形, 因而也被称为扭 Chevalley 群.
1959	Brauer–Suzuki 定理被证明. 它指出若群具有四元数 Sylow 2-子群 Q_8 且没有非平凡奇数阶正规子群, 则该群必具有 2 阶中心, 因而不是单群.

1960	Thompson 证明具有素数阶无不动点自同构的群必为幂零群.
1960	Feit, Hall 和 Thompson 证明所有奇数阶单 CN 群 (每个非平凡元的中心化子都是幂零群的群) 都是素数阶循环群, 这是 Suzuki 定理的重要推广.
1960	Suzuki 发现 Suzuki 群 ${}^2B_2(q)$ 并研究了它们的复表示. 这些群也是偶数阶有限单群中唯一阶数不是 3 的倍数的一类.
1961	Ree 发现了 Ree 群 ${}^2F_4(q)$, ${}^2G_2(q)$, 可以看作 Suzuki 群的另一种推广. 它们也是最后被发现的 Lie 型单群族, 至此所有无限单群族都已发现.

IV. 高潮: 奇数阶定理与散在群复兴 (1963–1971)

1963	Feit–Thompson 定理终于得证, 宣告所有奇数阶群都是可解的. 这篇数百页的证明后来被群论学家逐步拆解并优化了大量细节. 尽管其思想已被研究透彻, 该定理至今仍未找到一个较为简短的初等证明.
1964	Tits 引入了 Lie 型单群的 BN 对, 同时发现了 Tits 群 ${}^2F_4(2)'$, 从而补上了 Lie 型单群列表的最后一块拼图.
1965	Gorenstein–Walter 定理得证, 它分类了具有二面体群作为 Sylow 2-子群的有限群.
1966	Glauberman 证明了 Z^* 定理, 推广了 Brauer–Suzuki 定理.
1966	Janko 发现了散在单群 J_1 并预测了 J_2, J_3 的存在. 距离 Mathieu 群地发现已经接近一个世纪, 散在单群的研究重新被激活. 由于该群阶仅为 175560, 在单群中相对较小, 因而重新激起了人们寻找新的散在单群的热情.
1968	Glauberman 证明了 ZJ 定理, 进一步加深了人们对奇数阶群结构的理解.
1968	Higman 和 Sims 发现了散在单群 HS . 同年 Conway 发现了三个 Conway 群 Co_3, Co_2, Co_1 , 它们与 Leech 格的自同构群密切相关.
1969	Suzuki 发现了 Suzuki 散在群 Suz .
1969	Hall 和 Wales 构造了 Janko 群 J_2 .
1969	Higman 和 McKay 构造了 Janko 群 J_3 .
1969	McLaughlin 发现了散在群 McL , 这些群大多与格的自同构结构密切相关.
1969	Held 发现了散在群 He , 它与 Monster 群结构密切相关.

A.2. 推论

1969	Walter 定理分类了所有具有 Abel Sylow 2-子群的有限群. 后来经 Thompson 等人分析, 该分类中会出现 Janko 群 J_1 以及 Ree 群 ${}^2G_2(3^{2n+1})$.
1969	Gorenstein 基于 Thompson 的想法引入了信号函子, 这一方法成为有限单群分类中的关键工具之一.
1970	MacWilliams 证明没有秩 3 正规 Abel 子群的 2-群具有特殊结构. 具有此类 Sylow 2-子群的有限单群后来被 Gorenstein 和 Harada 分类.
1970	Bender 引入了 Fitting 子群的推广并发展了 Bender 方法. 该方法研究推广 Fitting 子群的结构及其嵌入, 在信号函子方法失效或无法分析补群结构时尤为重要.
1970	Alperin–Brauer–Gorenstein 定理被证明, 讨论了具有特定 Sylow 2-子群的群结构, 完成了 2-秩至多为 2 的有限单群分类, 其中会出现 M_{11} .
1971	Fischer 发现了三个 Fischer 群 $Fi_{22}, Fi_{23}, Fi_{24}$, 其中 Fi_{24} 需要取导群 Fi'_{24} 才是单群. 类似于 Mathieu 群, 它们也与某些组合结构的自同构密切相关.
1971	Thompson 完成了二次对的分类, 其中大部分得到的群都是 Lie 型单群.
1971	Bender 扩展了 Suzuki 的工作并分类了具有强嵌入子群的群, 该分类中会出现 Suzuki 群 ${}^2B_2(q)$.

V. 冲锋: Gorenstein 纲领 (1972–1982)

1972	Gorenstein 提出了有限单群分类的「16 步走」方针, 吹响了单群分类的冲锋号, 随后其框架的具体细节被迅速填充.
1972	Hall 给出了非循环且阶数不超过 10^6 的 56 个单群的列表. 这些群的特征标表随后在 1979 年由 John McKay 给出.
1972	Lyons 和 Sims 发现了散在单群 Ly .
1973	Rudvalis 发现了散在单群 Ru , 其具体构造由 Conway 与 Wales 完成.
1973	Fischer 发现了小魔群 B , 并与 Thompson 一起据此发现了大魔群 M .
1973	Thompson 进一步发现了 Thompson 群 Th .
1973	Norton 发现了 Harada–Norton 群 HN , 其中 Harada 也以另一种方法独立发现了该群.

- 1974 Thompson 分类了 N -群 (即所有非平凡 p -子群的正规化子均可解的群). 整个证明分布在六篇论文中 (1968, 1970, 1971, 1973, 1974, 1974b), 共约 400 页.
- 1974 Gorenstein–Harada 定理被证明, 将一大类 2-秩单群的分类细分为补群类型与特征 2 类型两种情况.
- 1974 Tits 证明了具有 BN 对且秩至少为 3 的群必为 Lie 型单群.
- 1974 Aschbacher 分类了具有恰当 2-生成核的群, 这是 Bender 对强嵌入子群分类工作的推广.
- 1975 Gorenstein 和 Walter 证明了 L -平衡定理, 从而证明具有连通 Sylow 2-子群的有限单群能够被分类.
- 1976 O’Nan 发现了散在单群 $O’N$.
- 1976 Janko 发现了 Janko 群 J_4 , 这是最后一个被发现的散在单群. 至此所有有限单群均已被发现.
- 1976 Glauberman 证明了可解信号函子定理.
- 1976 Aschbacher 证明了补群定理, 对一类有限单群建立了标准补群. 随后其他数学家对这些标准补群进行了系统分类.
- 1977 Aschbacher 分类了奇特征的 Lie 型群. 在此之后, 某种意义上大多数有限单群已被分类, 人们开始看到整个分类完成的希望.
- 1978 Timmesfeld 证明了 O_2 例外定理, 将 $\mathbb{F}_2$ -类型的有限单群分成 8 个小类, 其中主要是 Lie 型单群. 随后这些小类也逐步被完全分类.
- 1978 Aschbacher 分类了有限薄群, 这些群大致对应于特征 2 有限域上的秩 1 的 Lie 型群, 也是 Gorenstein「16 步」中的重要一步.
- 1978 McKay 发现了魔群月光现象: j 函数 Fourier 级数的系数与魔群 M 的不可约表示维数存在深刻联系.
- 1979 Conway 和 Norton 总结并提出了精确的「魔群月光猜想」, 并正式提出「Monstrous Moonshine」这一名称.
- 1980 Larissa Queen 进行了大量计算, 并在其他散在单群上发现了类似的月光现象.
- 1981 Bombieri 使用消去理论完成了 Thompson 关于 Ree 群刻画的关键步骤, 这是整个有限单群分类中最困难的步骤之一.

1982	McBride 证明了所有有限群的信号函子定理, 从而完成了 Gorenstein 有限单群分类「16 步」中的关键一步.
1982	Griess 手动构造了魔群.
1983	三分定理被证明. 该定理将特征 2 类型且秩至少为 3 的有限单群分为三类: 一部分由 Gilman–Griess 定理刻画, 另一部分由 Aschbacher, Gorenstein 和 Lyons 完全解决.

VI. 功成: 二代证明与机器验证 (1983–至今)

1983	Gorenstein 宣称有限单群分类的初代证明大体完成. 整个证明涉及的工作极其繁多且冗长, 并且仍有许多细节尚不完善. 随后 Gorenstein 将精力投入到寻找更加精简的证明上, 这些工作被称为「修正」(revision), 新的证明也被称为二代证明. 这标志着后分类定理时代的到来, 同时随着分类定理的完成, 群论的发展似乎也逐渐走出了全盛期.
1985	Conway, Curtis, Norton, Parker, Wilson 和 Thackray 出版了 <i>Atlas of Finite Groups</i> 一书, 书中汇集了 93 个有限单群的大量基本信息.
1987	Norton 结合 Queen 和他自己的计算提出了推广的月光猜想.
1988	Dixon, Ginsparg 和 Harvey 给出了该推广月光猜想的物理解释.
1992	有限单群分类的领军人物 Gorenstein 逝世.
1992	Borcherds 证明了魔群月光猜想, 其方法具有深刻的弦论与数学物理背景.
1994	在 Gorenstein 逝世两年后, 由 Gorenstein, Lyons 和 Solomon 合作的有限单群分类二代证明系列开始出版, 称为 GLS 系列, 计划共出版十卷.
2004	Aschbacher 和 Smith 出版了关于拟薄群 (quasithin groups) 的重要工作, 填补了分类定理中的关键空白. 这一类群包含若干典型群以及多个散在单群, 如 Mathieu 群、Janko 群、 HS , He , Ru . 相关结果随后被纳入 GLS 系列.
2008	Harada 和 Solomon 修复了分类证明中的一个小漏洞. 由于早期对 M_{22} 的 Schur 乘子计算存在错误, 一小类情形曾被忽略.
2012	Gonthier 及其合作者在 Coq 系统中完成了 Feit–Thompson 定理的形式化证明, 即奇数阶群可解的证明已被计算机完全验证.

The Periodic Table Of Finite Simple Groups

Dynkin Diagrams of Simple Lie Algebras

G_2, F_4
1
1

$A_1(6), A_1(5)$	$A_1(2)$
A_5	$A_1(7)$
60	168
$A_1(9), B_1(2)$	$F_{4/24}$
$A_1(8)$	$A_1(8)$
360	361

A_7	$A_1(11)$	$E_6(2)$	$F_4(2)$	$G_2(2^3)$	$F_4(2^2)$	$2B_2(2^3)$	$2F_4(2^2)$	$2C_2(2^3)$	$B_2(2)$	$C_3(3)$	$D_4(2)$	$2D_4(2^2)$	$2A_2(9)$	$G_2(2^2)$
2320	660	2448 2448												

Figure A.1: 有限单群分类表格 (仿元素周期表); Figure Credit: [click here](#)

B

能带论

Contents

B.1 Bloch 波	394
B.2 能带的近似求解	398
B.2.1 平面波	398
B.2.2 近自由电子	400
B.2.3 紧束缚	403
B.3 Bloch 电子半经典动力学	407
B.3.1 电子波包	407
B.3.2 动力学	408

能带论是一个对固体 — 包含众多粒子实和电子的复杂多体系统 — 的一种近似理论.

Assumption B.1. 能带论基本假设:

- **绝热近似:** 解电子时, 假定粒子实固定在格点不动;
- **单电子近似:** 用一个平均场来描写电子之间的复杂相互作用;
- **周期势假设:** 假设平均场是一个严格的周期性函数;

另外还有一些量子力学的基本假设, 例如电子是 Fermi 子, 得到的电子定态服从 Fermi–Dirac 分布. 从而我们得到基本问题:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}), \\ V(\mathbf{r} + \mathbf{R}_l) = V(\mathbf{R}_l), \quad \mathbf{R}_l = \sum_i l_i \mathbf{a}_i. \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

这依然是一个研究「波在周期场中传播」的问题, 不过这里是 de Broglie 波即物质波.

Appendix B. 能带论

B.1 Bloch 波

在量子力学中, 我们称标记与 Hamilton 量对易的物理量的本征值的指标为量子数, 例如对自由粒子, 波矢 $\mathbf{k}$ 与 Hamilton 量对易, 为守恒量, 与 Hamilton 量共享本征波函数, 我们可以选 $\mathbf{k}$ 为量子数标记不同的量子态. 而在周期场中运动的粒子, $\mathbf{k}$ 不再与 Hamilton 量对易, 从而不是「好量子数」. 我们需要寻找新的与 Hamilton 量对易的算符.

Definition B.1 [平移算符 (translation operator)]. 定义平移算符 $\hat{T}(\mathbf{a}_i), i = 1, 2, 3$, 其对任意的实空间函数 $\phi(\mathbf{r})$ 满足 $\hat{T}(\mathbf{a}_i)\phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r} + \mathbf{a}_i)$.

根据定义, 容易验证 $[\hat{T}(\mathbf{a}_i), \hat{T}(\mathbf{a}_j)] = 0, \hat{T}(\mathbf{a}_i)^N = \hat{T}(N\mathbf{a}_i), \hat{T}(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j) = \hat{T}(\mathbf{a}_i)\hat{T}(\mathbf{a}_j)$. 下面的命题说明了平移算符是一个与 Hamilton 量对易的算符:

Proposition B.1. 对 $i = 1, 2, 3$ 有

$$[\hat{H}, \hat{T}(\mathbf{a}_i)] = 0.$$

Proof. 我们分别计算

$$\hat{T}(\mathbf{a}_i)\hat{H}\psi(\mathbf{r}) = \hat{T}(\mathbf{a}_i)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\right] = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}_i) + V(\mathbf{r} + \mathbf{a}_i)\psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}_i),$$

$$\hat{H}\hat{T}(\mathbf{a}_i)\psi(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})\right]\psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}_i),$$

并注意周期势假设, 所以两个计算结果相同. 因为 $\psi(\mathbf{r})$ 是任取的, 所以 $[\hat{H}, \hat{T}(\mathbf{a}_i)] = 0$. $\square$

所以说, 平移算符和 Hamilton 量共享本征函数, 我们寻找平移算符的本征函数和相应的量子数, 并凭此分类电子态. 考虑 $\psi(\mathbf{r})$ 是某平移算符和 Hamilton 量的共同本征函数, 则 $\hat{H}\psi(\mathbf{r}) = E_n\psi(\mathbf{r})$, 这里 E_n 被设置为本征能量, $\hat{T}(\mathbf{a}_i)\psi(\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{a}_i)\psi(\mathbf{r})$, 这里 $\lambda(\mathbf{a}_i)$ 被设置为平移算符的本征值, 于是 $\hat{H}\hat{T}(\mathbf{a}_i)\psi(\mathbf{r}) = \hat{H}\lambda(\mathbf{a}_i)\psi(\mathbf{r}) = E_n\lambda(\mathbf{a}_i)\psi(\mathbf{r})$, 这说明 $\psi(\mathbf{r})$ 和 $\hat{T}(\mathbf{a}_i)\psi(\mathbf{r})$ 是 Hamilton 量同一个能量本征值的本征函数. 因为晶体的周期性, 波函数在 $\mathbf{r} + \mathbf{a}_i$ 与 $\mathbf{r}$ 处的模方应该相同:

$$|\hat{T}(\mathbf{a}_i)\psi(\mathbf{r})|^2 = |\lambda(\mathbf{a}_i)|^2 |\psi(\mathbf{r})|^2 = |\psi(\mathbf{r})|^2,$$

说明 $\lambda(\mathbf{a}_i) = e^{i\theta(\mathbf{a}_i)}$. 根据 $\hat{T}(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j) = \hat{T}(\mathbf{a}_i)\hat{T}(\mathbf{a}_j)$ 的性质, 得到 $e^{i\theta(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j)} = e^{i\theta(\mathbf{a}_i)}e^{i\theta(\mathbf{a}_j)}$, 也就是

$$\theta(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j) = \theta(\mathbf{a}_i) + \theta(\mathbf{a}_j). \quad (\text{B.2})$$

B.1. Bloch 波

从而根据线性代数, 必有某个 $\mathbf{k}$ 使得 $\theta(\mathbf{a}_i) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_i$, 这个矢量就是我们要找的「好量子数」, 称为粒子在晶体中的**准动量 (quasimomentum)**.

为了数学上方便, 我们引入一些额外的假设:

Assumption B.2 [Born-von Karman 边界条件 (Born-von Karman boundary condition)].
对一块有限大小晶体, 假设 $\hat{T}(\mathbf{a}_i)^{N_i} = 1, i = 1, 2, 3$.

这纯粹是为了数学上方便, 没有特殊含义. 物理上, 当 $N_i \rightarrow \infty$ 时, 热力学极限保证了不同的边界条件给出相同的物理解, 这保证了假设的合理性. 把 Born-von Karman 条件代入 (B.2), 得到 $N_i \theta(\mathbf{a}_i) = 2\pi h_i, h_i \in \mathbb{Z}$, 从而 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_i = \frac{2\pi h_i}{N_i}$. 将 $\mathbf{k}$ 用倒格矢 $\mathbf{b}_i$ 展开, 给出:

Proposition B.2. 平移算符的好量子数准动量具有形式

$$\mathbf{k} = \frac{h_1}{N_1} \mathbf{b}_1 + \frac{h_2}{N_2} \mathbf{b}_2 + \frac{h_3}{N_3} \mathbf{b}_3$$

且 $h_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3$.

我们用 $\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 表示属好量子数 n 和 $\mathbf{k}$ 的那个本征子空间中的波函数, 相应的本征值记作 $E_n(\mathbf{k})$, 注意符号 $E_n(\mathbf{k})$ 表示的是一系列分立的值, 用两个参数 n 与 $\mathbf{k}$ 标记, 尤其注意此时我们没有说明好量子数 n 的含义. 目前仍未说明 $\hat{T}(\mathbf{a}_i), i = 1, 2, 3$ 和 $\hat{H}$ 构成力学量完全集, 不排除好量子数 n 和 $\mathbf{k}$ 标记的本征子空间仍有简并的可能.

Theorem B.1 [Bloch 定理 (Bloch's theorem)]. $\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 是调幅平面波, 且调幅因子是严格的晶格周期函数, 即 $\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}), u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}_l) = u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$.

Proof. 对 $\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 作用平移算符,

$$\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}_l) = \hat{T}(\mathbf{R}_l) \psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \hat{T}(\mathbf{a}_1)^{l_1} \hat{T}(\mathbf{a}_2)^{l_2} \hat{T}(\mathbf{a}_3)^{l_3} \psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot (l_1 \mathbf{a}_1 + l_2 \mathbf{a}_2 + l_3 \mathbf{a}_3)} \psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}).$$

也就是说 $\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}_l) = e^{i\mathbf{k} \cdot (l_1 \mathbf{a}_1 + l_2 \mathbf{a}_2 + l_3 \mathbf{a}_3)} \psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, 这就说明了 $\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 是一个调幅平面波. $\square$

这样, 对电子的求解, 就转移为了对 $u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 的求解. 我们试图寻找其应该满足的本征方程. 将 Bloch 定理代入 Schrödinger 方程,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = E_n(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}),$$

Appendix B. 能带论

展开计算左边,

$$\begin{aligned}
 & \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \\
 &= -\frac{\hbar^2}{2m} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \nabla^2 u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) - \frac{\hbar^2}{2m} u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \nabla^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \frac{\hbar^2}{m} \nabla e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \cdot \nabla u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \\
 &= -\frac{\hbar^2}{2m} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \nabla^2 u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) - \frac{\hbar^2}{2m} u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) (-\mathbf{k}^2) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \frac{\hbar^2}{m} i\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \cdot \nabla u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}),
 \end{aligned}$$

也就是

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \frac{i\hbar^2}{m} \mathbf{k} \cdot \nabla \right] u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = E_n(\mathbf{k}) u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (\text{B.3})$$

这就是 $u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 满足的本征方程. 定义规范变换后的 Hamilton 量为

$$\hat{H}_{\mathbf{k}} = e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{H} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \hat{H} + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \frac{i\hbar^2}{m} \mathbf{k} \cdot \nabla \quad (\text{B.4})$$

也就是

Proposition B.3.

$$\hat{H}_{\mathbf{k}} = \frac{(\mathbf{p} + \hbar \mathbf{k})^2}{2m} + V(\mathbf{r}).$$

从而原 Schrödinger 方程的简洁写法为 $\hat{H}_{\mathbf{k}} u_{n\mathbf{k}} = E_n(\mathbf{k}) u_{n\mathbf{k}}$, 该方程和原方程具有相同的本征值, 但是因为配备了严格的周期性边界条件, 所以可以局域在一个元胞内求解. 根据本征值问题理论, 给定 $\mathbf{k}$ 后, 这个方程的解对应无穷多分离的本征值 $E_n(\mathbf{k})$ 和相应的本征解 $u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, 此处我们说明好量子数 n 的含义为上述方程给定 $\mathbf{k}$ 后的本征值和本征解的索引. 当要图示表达我们的本征值 $E_n(\mathbf{k})$ 时, 只需要考虑一个倒点阵元胞, 通常选择第一 Brillouin 区 $\mathbf{k} \in 1\text{BZ}$, 即简约波矢.

Proposition B.4. 对任意的倒格矢 $\mathbf{K}_h$, 均有 $E_n(\mathbf{k} + \mathbf{K}_h) = E_n(\mathbf{k})$ 和 $u_{n, \mathbf{k} + \mathbf{K}_h}(\mathbf{r}) = e^{-i\mathbf{K}_h \cdot \mathbf{r}} u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, $\psi_{n, \mathbf{k} + \mathbf{K}_h}(\mathbf{r}) = \psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$.

Proof. 考虑

$$\psi_{n, \mathbf{k} + \mathbf{K}_h}(\mathbf{r}) = e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{K}_h) \cdot \mathbf{r}} u_{n, \mathbf{k} + \mathbf{K}_h}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \bar{u}_{n, \mathbf{k} + \mathbf{K}_h}(\mathbf{r}),$$

这里 $\bar{u}_{n, \mathbf{k} + \mathbf{K}_h}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{K}_h \cdot \mathbf{r}} u_{n, \mathbf{k} + \mathbf{K}_h}(\mathbf{r})$, 则原 Schrödinger 方程 $\hat{H} \psi_{n, \mathbf{k} + \mathbf{K}_h}(\mathbf{r}) = E_n(\mathbf{k} + \mathbf{K}_h) \psi_{n, \mathbf{k} + \mathbf{K}_h}(\mathbf{r})$ 为

$$\hat{H} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \bar{u}_{n, \mathbf{k} + \mathbf{K}_h}(\mathbf{r}) = E_n(\mathbf{k} + \mathbf{K}_h) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \bar{u}_{n, \mathbf{k} + \mathbf{K}_h}(\mathbf{r}),$$

B.1. Bloch 波

两侧除以 $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ 就是 $\hat{H}_{\mathbf{k}}\bar{u}_{n,\mathbf{k}+\mathbf{K}_h}(\mathbf{r}) = E_n(\mathbf{k}+\mathbf{K}_h)\bar{u}_{n,\mathbf{k}+\mathbf{K}_h}(\mathbf{r})$, 注意这个方程就是 $\hat{H}_{\mathbf{k}}u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = E_n(\mathbf{k})u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, 只是表示「待解本征函数」的符号不同! 所以 $\bar{u}_{n,\mathbf{k}+\mathbf{K}_h}(\mathbf{r}) = u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$. $\square$

Proposition B.5. 对于具有时间反演对称性的晶体, $E_n(-\mathbf{k}) = E_n(\mathbf{k})$.

Proof. 考虑 (B.3), 如果有时间反演对称性, 则对此方程取共轭再 $\mathbf{k} \mapsto -\mathbf{k}$ 后解不变, 即

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) + \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m} - \frac{i\hbar^2}{m}\mathbf{k}\cdot\nabla \right] u_{n,-\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) = E_n(-\mathbf{k})u_{n,-\mathbf{k}}^*(\mathbf{r})$$

与原方程同解, 注意能量本征值必须是实数. 所以 $E_n(-\mathbf{k}) = E_n(\mathbf{k})$, $u_{n,-\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) = u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$. $\square$

在以 n 和 $\mathbf{k}$ 为轴的坐标系中放置代表本征值的点 $(n, \mathbf{k}, E_n(\mathbf{k}))$, 可以想象整体呈现离散架势. 取 $N_i \rightarrow \infty, i = 1, 2, 3$, 则此时固定 n 看到的诸多 $(n, \mathbf{k}, E_n(\mathbf{k}))$ 点就会越来越多也越来越密集, 直到连成线. 此时, 我们称对于固定的 n , 对 $\mathbf{k}$ 的「连续」函数 $E(\mathbf{k})$ 就是一条能带 (energy band). 把上述图投影到横截 n 轴的一个 $\mathbf{k}$ -平面内, 得到的图就称作能带示意图. Fig. B.1 就是一个一维晶体能带示意图.

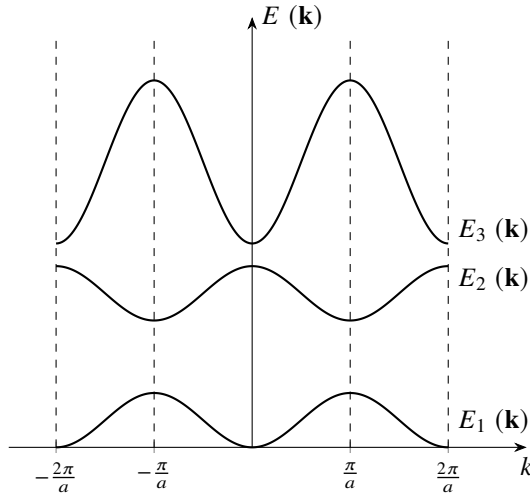


Figure B.1: 一维晶体能带示意图

定义等能面: 在 $\mathbf{k}$ 空间中, 对固定的能带指标 n 与能量 E , 所有满足 $E_n(\mathbf{k}) = E$ 的 $\mathbf{k}$ 点所构成的曲面, 称为第 n 条能带在能量 E 处的等能面.

Appendix B. 能带论

Proposition B.6. 等能面垂直于 *Brillouin* 区界面.

Proof. *Brillouin* 区界面是 $\mathbf{K}_h$ 的中垂面, 因此对应于 $\mathbf{K}_h$ 和 $-\mathbf{K}_h$ 有一对 *Brillouin* 区界面, 且该对界面具有镜面对称性. 设 A 与 B 为这两个界面, m 为镜面反演面, a 与 b 是 A 与 B 上关于 m 对称的两个点, 相差一个倒格矢 $\mathbf{K}_h$. 过 a 与 b 的等能面, 因性质 $E(\mathbf{k}) = E(\mathbf{k} + \mathbf{K}_h)$ (Prop. B.4), 有

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k})_{\perp}|_a = \nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k})_{\perp}|_b \\ \nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k})_{\parallel}|_a = \nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k})_{\parallel}|_b \end{cases},$$

又因为是关于 m 对称的, 所以还应该

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k})_{\perp}|_a = -\nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k})_{\perp}|_b \\ \nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k})_{\parallel}|_a = \nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k})_{\parallel}|_b \end{cases},$$

综合两个第一式, 有 $\nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k})_{\perp}|_a = \nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k})_{\perp}|_b = 0$. □

B.2 能带的近似求解

我们现在就是要求解每个给定的 $\mathbf{k}$ 下的本征值问题 $\hat{H}_{\mathbf{k}} u_{n\mathbf{k}} = E_n(\mathbf{k}) u_{n\mathbf{k}}$, 解出来有无穷多个 $u_{n\mathbf{k}}$, $n = 1, 2, \dots$. 一般来说都没办法严格求解, 只能发展一些近似理论.

B.2.1 平面波

根据 Bloch 定理 Thm. B.1, 在周期性势场中, 电子的波函数是一个调幅平面波, 调幅因子 $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 是严格的周期函数, 可以按照倒格矢展开:

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \sum_h a_{\mathbf{k}}(\mathbf{K}_h) e^{i\mathbf{K}_h \cdot \mathbf{r}}.$$

Proposition B.7. 调幅因子 $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 的 Fourier 系数 $a_{\mathbf{k}}(\mathbf{K}_h)$ 是 $\mathbf{k} + \mathbf{K}_h$ 的函数, 从而可以记 $a(\mathbf{k} + \mathbf{K}_h) := a_{\mathbf{k}}(\mathbf{K}_h)$.

Proof.

$$a_{\mathbf{k}}(\mathbf{K}_h) = \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \int_V u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{K}_h \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \int_V \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{K}_h) \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

B.2. 能带的近似求解

$$= \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \int_V \psi_{\mathbf{k}+\mathbf{K}_h}(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{K}_h)\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} =: a(\mathbf{k}+\mathbf{K}_h).$$

以上使用了 *Prop. B.4*. □

于是, Bloch 态波函数可以写成 $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \sum_h a(\mathbf{k}+\mathbf{K}_h) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{K}_h)\cdot\mathbf{r}}$. 褪去实表象, 得 $|\psi_{\mathbf{k}}\rangle = \sum_h a(\mathbf{k}+\mathbf{K}_h) |\mathbf{k}+\mathbf{K}_h\rangle$. 这说明 Bloch 态函数是一系列相差倒格矢的平面波的叠加. 我们希望求解系数 $a(\mathbf{k}+\mathbf{K}_h)$, 把上面的表达式代回 Schrödinger 方程, 得到

$$\sum_h a(\mathbf{k}+\mathbf{K}_h) (\hat{T} + \hat{V} - E) |\mathbf{k}+\mathbf{K}_h\rangle = 0.$$

因为周期势可以 Fourier 展开:

$$V(\mathbf{r}) = \langle V \rangle + \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \sum_{h \neq 0} \tilde{V}(\mathbf{K}_h) e^{i\mathbf{K}_h \cdot \mathbf{r}},$$

其中 $\tilde{V}(\mathbf{K}_h) = \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \int_V V(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{K}_h \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}$, 而 $\langle V \rangle$ 是平均势, 可以取为 0. 用 $\langle \mathbf{k}+\mathbf{K}_h |$ 内积原方程, 注意 $\langle \mathbf{k}+\mathbf{K}_h | \mathbf{k}+\mathbf{K}_h \rangle = \delta_{hh'}$, $\hat{T} |\mathbf{k}+\mathbf{K}_h\rangle = \frac{\hbar^2}{2m} (\mathbf{k}+\mathbf{K}_h)^2 |\mathbf{k}+\mathbf{K}_h\rangle$, 得到方程

$$\sum_{h'} \left\{ \left[\frac{\hbar^2}{2m} (\mathbf{k}+\mathbf{K}_h)^2 - E(\mathbf{k}) \right] \delta_{hh'} + \langle \mathbf{k}+\mathbf{K}_h | \hat{V} | \mathbf{k}+\mathbf{K}_{h'} \rangle \right\} a(\mathbf{k}+\mathbf{K}_h) = 0.$$

其中, $\langle \mathbf{k}+\mathbf{K}_h | \hat{V} | \mathbf{k}+\mathbf{K}_{h'} \rangle = \frac{1}{N\Omega} \int_V V(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{K}_h-\mathbf{K}_{h'})\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \sqrt{N\Omega} \tilde{V}(\mathbf{K}_h - \mathbf{K}_{h'})$. 于是有:

Proposition B.8. 平面波展开下能带方程为

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} (\mathbf{k}+\mathbf{K}_h)^2 - E(\mathbf{k}) \right] a(\mathbf{k}+\mathbf{K}_h) + \sum_{h' \neq h} \left(\sqrt{N\Omega} \tilde{V}(\mathbf{K}_h - \mathbf{K}_{h'}) \right) a(\mathbf{k}+\mathbf{K}_{h'}) = 0.$$

上面方程组的久期方程为

$$\det \left(\left[\frac{\hbar^2}{2m} (\mathbf{k}+\mathbf{K}_h)^2 - E(\mathbf{k}) \right] \delta_{hh'} + \sqrt{N\Omega} \tilde{V}(\mathbf{K}_h - \mathbf{K}_{h'}) \right) = 0.$$

$\mathbf{K}_h$ 要取遍所有的倒格矢, 所以实际上是一个 $\infty \times \infty$ 的行列式, 无法计算. 实际计算时只能取有限截断, 比如截断至 $n_{\max}$ 阶, 解出 $n = 1, 2, \dots, n_{\max}$ 个能带.

Appendix B. 能带论

B.2.2 近自由电子

平面波方法涉及到高阶行列式的求解, 收敛性差. 近自由电子近似将周期性势场的变化视作微扰, 从而原理上不需要求解高阶行列式.

零级近似 取 $\Delta V = 0$ 也就是均匀势场, 电子完全自由, 此时电子的波函数就是平面波 $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, 色散关系就是普通的动能 $E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}$. 这里依旧采用 Born-von Karman 边界条件 **Assump. B.2**, 所以可以采取的平面波只有 $\mathbf{k} = \frac{h_1}{N_1} \mathbf{b}_1 + \frac{h_2}{N_2} \mathbf{b}_2 + \frac{h_3}{N_3} \mathbf{b}_3$ 这些.

Proposition B.9. 近自由电子零级近似下的波函数族构成标准正交函数族.

Proof. 设 $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ 褪去实表象后的 Dirac 符号表示为 $|\mathbf{k}\rangle \equiv |h_1 h_2 h_3\rangle$.

- 正交性关系: $\langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle = \frac{1}{N\Omega} \int_V e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k});$
- 完备性关系: $\sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}| = 1$ 等价于证明 $\frac{1}{N\Omega} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

□

非简并微扰 现在考虑一阶 ΔV 的微扰给 Bloch 态的修正. 因为

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \sum_{h \neq 0} a(\mathbf{k} + \mathbf{K}_h) e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{K}_h)\cdot\mathbf{r}}$$

中除了 $\mathbf{K}_h = 0$ 外都是 ΔV 的修正, 也就是除了 $a(\mathbf{k}) \simeq 1$ 外其他的 $a(\mathbf{k} + \mathbf{K}_h)$ 都是小量, 也就是 $\tilde{V}(\mathbf{K}_h - \mathbf{K}_{h'})$ 除了 $\mathbf{K}_h - \mathbf{K}_{h'} = 0$ 时外都是小量. 我们考虑计算时保留到一阶即可.

在 **Prop. B.8** 中, 取 $E(\mathbf{k}) \simeq \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}$, 第二项则只计及一阶扰动, 也就是 $\mathbf{K}_{h'} = 0$ 的部分的贡献, 所以

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} (\mathbf{k} + \mathbf{K}_h)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{k}^2 \right] a(\mathbf{k} + \mathbf{K}_h) + \sqrt{N\Omega} \tilde{V}(\mathbf{K}_h) \simeq 0,$$

所以有

B.2. 能带的近似求解

Proposition B.10. Bloch 态波函数 Fourier 展开的分量系数一阶近似

$$a(\mathbf{k} + \mathbf{K}_h) \simeq \frac{\sqrt{N\Omega}\tilde{V}(\mathbf{K}_h)}{\frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{K}_h)^2)}.$$

并得到

Proposition B.11. Bloch 态一级近似波函数:

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \left[1 + \sum_{h \neq 0} \frac{\sqrt{N\Omega}\tilde{V}(\mathbf{K}_h)}{\frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{K}_h)^2)} \right],$$

并可见 $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 仍然是周期函数.

在 Prop. B.4 中, 取 $\mathbf{K}_h = 0$ 的方程考究, 第二项则采用 $a(\mathbf{k} + \mathbf{K}_h)$ 的一阶近似表达式, 给出

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m}\mathbf{k}^2 - E(\mathbf{k}) \right] + \sum_{h \neq 0} \sqrt{N\Omega}V(-\mathbf{K}_h) \frac{\sqrt{N\Omega}\tilde{V}(\mathbf{K}_h)}{\frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{K}_h)^2)} = 0,$$

并解出

Proposition B.12. 能量二级近似表达式

$$E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2}{2m}\mathbf{k}^2 + \sum_{h \neq 0} \frac{N\Omega|\tilde{V}(\mathbf{K}_h)|^2}{\frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{K}_h)^2)}.$$

从 Bloch 态波函数的一级近似波函数可以看出, 电子波函数的零阶部分是自由电子, 一阶部分是所有可能的散射波的叠加, 相应的可想到高阶部分就是更复杂过程的散射. 散射的振幅取决于 $|\tilde{V}(\mathbf{K}_h)|^2$ 也就是势场有没有相应的周期性/动量. 因为势场具有周期性, 所以可以提供的可能的动量应该是倒格矢, 也就是下面的命题:

Appendix B. 能带论

Proposition B.13. 设 $V(\mathbf{r})$ 是晶格周期势, 则 $\langle \mathbf{k}' | \hat{V} | \mathbf{k} \rangle = \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \sum_h \tilde{V}(\mathbf{K}_h) \delta_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}, \mathbf{K}_h}$.

Proof.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}' | \hat{V} | \mathbf{k} \rangle &= \frac{1}{N\Omega} \int V(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} = \frac{1}{N\Omega} \int \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \sum_h \tilde{V}(\mathbf{K}_h) e^{-i[(\mathbf{k}'-\mathbf{k})-\mathbf{K}_h]\cdot\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \sum_h \tilde{V}(\mathbf{K}_h) \left(\frac{1}{N\Omega} \int e^{-i[(\mathbf{k}'-\mathbf{k})-\mathbf{K}_h]\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \right) = \frac{1}{\sqrt{N\Omega}} \sum_h \tilde{V}(\mathbf{K}_h) \delta_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}, \mathbf{K}_h}. \end{aligned}$$

□

这样对散射过程的要求叫做**选择定则**, 可能的非零散射取决于体系的对称性.

简并微扰 当 $\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{K}_h)^2 = 0$, 上面的简并微扰实效, 分母趋于 0 而发散. 这是因为当两个态简并时, 任何微小扰动都会引起它们的强烈耦合, 因为沟通两个态不需要任何能量.

当出现简并的时候, **Prop. B.8** 中只需要考虑 $a(\mathbf{k} + \mathbf{K}_h)$ 处的贡献即可, 其他成分作为小量省略.

$$\begin{cases} \left[\frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{k}^2 - E(\mathbf{k}) \right] a(\mathbf{k}) + \sqrt{N\Omega} \tilde{V}(-\mathbf{K}_h) a(\mathbf{k} + \mathbf{K}_h) \simeq 0, \\ \left[\frac{\hbar^2}{2m} (\mathbf{k} + \mathbf{K}_h)^2 - E(\mathbf{k}) \right] a(\mathbf{k} + \mathbf{K}_h) + \sqrt{N\Omega} \tilde{V}(\mathbf{K}_h) a(\mathbf{k}) \simeq 0. \end{cases}$$

由此得到二阶的久期行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{k}^2 - E(\mathbf{k}) & \sqrt{N\Omega} \tilde{V}(-\mathbf{K}_h) \\ \sqrt{N\Omega} \tilde{V}(\mathbf{K}_h) & \frac{\hbar^2}{2m} (\mathbf{k} + \mathbf{K}_h)^2 - E(\mathbf{k}) \end{vmatrix} \simeq 0.$$

解得

Proposition B.14. 简并微扰得能级分裂为 $E_{\pm}(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{k}^2 \pm \sqrt{N\Omega} |\tilde{V}(\mathbf{K}_h)|$.

能带结构 对于满足简并条件 $\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{K}_h)^2 = 0$ 的 $\mathbf{k}$ 点, 有等价条件

$$\mathbf{K}_h \cdot \left(\mathbf{k} + \frac{1}{2} \mathbf{K}_h \right) = 0.$$

B.2. 能带的近似求解

根据解析几何可知, 该方程刻画的 $\mathbf{k}$ 组成的 $-\mathbf{K}_h$ 的垂直平分线. 由此可知, 当 $\mathbf{k}$ 穿越 Brillouin 区的边界时, 就会发生一次简并微扰, 电子能量突变 $E_g := 2|V(\mathbf{K}_h)|$. 总的来看, 就是在远离边界的区域近自由电子近似良好, 穿越边界时近似不佳, 用简并微扰论修正可知突变 E_g 能量. 所以 E_g 就被称为**能隙**, Brillouin 区内部 $E(\mathbf{k})$ 准连续分布就被称为**能带**.

Proposition B.15. 每个能带所能容纳的状态数为 $2N$.

Proof. 一个能带对应一个 Brillouin 区内部, 体积倒空间元胞的体积 Ω^* , 所以

$$\# = 2 \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V dx dy dz \int_{\Omega^*} dk_x dk_y dk_z = 2 \frac{1}{(2\pi)^3} N \Omega \Omega^* = 2N.$$

系数 2 是考虑电子自旋的结果. □

B.2.3 紧束缚

平面波方法将 Bloch 波函数展开为平面波 $|\psi_{\mathbf{k}}\rangle = \sum_h a(\mathbf{k} + \mathbf{K}_h) |\mathbf{k} + \mathbf{K}_h\rangle$, 实际上是把 $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 看作是实空间上的周期函数. 但是 Prop. B.4 又说明了 $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 也可以视作倒空间上的周期性函数 (严格来说应该是数列, 因为 $\mathbf{k}$ 只能取 von-Karman 边界条件 Assump. B.2 允许的离散值), 所以也可以进行 Fourier 展开:

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_l a(\mathbf{R}_l, \mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_l},$$

其中分量为 $a(\mathbf{R}_l, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_l}$. 注意 $\mathbf{k}$ 的离散取值周期在三个倒格矢方向分别是 N_1, N_2, N_3 , 所以归一化系数为 $\frac{1}{\sqrt{N_1 N_2 N_3}} = \frac{1}{\sqrt{N}}$. 因为

$$a(\mathbf{R}_l, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_l} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_l)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_l)},$$

我们上面使用了调幅因子 $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 的周期性. 从而可见 $a(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l) := a(\mathbf{R}_l, \mathbf{r})$ 只依赖总量 $\mathbf{r} - \mathbf{R}_l$.

Definition B.2 [??]. 称 $a_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_l)}$ 为 Bloch 波函数的 **Wannier 函数**, 并令其态矢表示为 $|a_{nl}\rangle$, 使得 $\langle \mathbf{r} | a_{nl} \rangle = a_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l)$.

Appendix B. 能带论

利用 Bloch 定理 Thm. B.1 中 Bloch 波函数和调幅因子的关系, 得到

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_l a(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_l)}.$$

这个式子非常类似 $|\psi_{\mathbf{k}}\rangle = \sum_h a(\mathbf{k} + \mathbf{K}_h) |\mathbf{k} + \mathbf{K}_h\rangle$! 我们希望把上面的式子也写为 Dirac 态矢的优雅形式, 令 $|(\mathbf{k})\rangle := \sqrt{\Omega} |\mathbf{k}\rangle$, 从而 $\langle(\mathbf{k})|\mathbf{r} - \mathbf{R}_l\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_l)}$, 令 $|u(\mathbf{r})\rangle := \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) |\mathbf{k}\rangle$, 从而 $\langle(\mathbf{k})|u(\mathbf{r})\rangle = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \equiv \langle\mathbf{r}|u_{\mathbf{k}}\rangle$, 于是

$$|u(\mathbf{r})\rangle = \sum_l a(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l) |\mathbf{r} - \mathbf{R}_l\rangle.$$

Proposition B.16. Wannier 函数构成一组标准正交基.

Proof. 我们利用 Bloch 态矢 $|\psi_{n\mathbf{k}}\rangle$ 的正交完备性, 证明 $|a_{nl}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} |\psi_{n\mathbf{k}}\rangle e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_l}$ 的正交完备性.

• 正交性:

$$\begin{aligned} \langle a_{nl} | a_{mh} \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \langle \psi_{n\mathbf{k}} | \psi_{m\mathbf{k}'} \rangle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_l - i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{R}_h} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{nm} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_l - i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{R}_h} \\ &= \frac{\delta_{nm}}{N} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_h)} = \delta_{nm} \delta_{lh}; \end{aligned}$$

• 完备性:

$$\begin{aligned} \sum_{nl} |a_{nl}\rangle \langle a_{nl}| &= \frac{1}{N} \sum_{nl} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} |\psi_{n\mathbf{k}}\rangle \langle \psi_{n\mathbf{k}'}| e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{R}_l} \\ &= \sum_n \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} |\psi_{n\mathbf{k}}\rangle \langle \psi_{n\mathbf{k}'}| \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \sum_n \sum_{\mathbf{k}} |\psi_{n\mathbf{k}}\rangle \langle \psi_{n\mathbf{k}}| = 1. \end{aligned}$$

□

展开式 $|\psi_{n\mathbf{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_l} |a_{nl}\rangle$, 其中 $\langle\mathbf{r}|a_{nl}\rangle = a_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l)$ 说明我们可以把 Bloch 波函数展开为完备正交的局域波函数. 直到目前都是严格的, 关键的近似在于如何选择 Wannier 函数作为近似?

B.2. 能带的近似求解

Assumption B.3 [??]. 选取孤立原子的定域波函数 $\varphi_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l)$ 作为 Wannier 函数, 近似认为不同孤立原子的定域波函数正交

$$\int_V \varphi_n^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l) \varphi_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}_h) d\mathbf{r} \simeq \delta_{lh}.$$

Remark. 这里的 n 指的就是原子轨道 $1s, 2p_x, 3d_{z^2}$ 等.

于是, Bloch 波函数近似为 $\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_l e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_l} \varphi_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l)$, 代入 Schrödinger 方程得

$$\sum_l \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) - E(\mathbf{k}) \right] \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_l} \varphi_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l) \simeq 0.$$

而势能满足 $V(\mathbf{r}) = \sum_{l'} U(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{l'})$, 且单原子局域定态波函数 $\varphi_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l)$ 满足局域的定态方程

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l) \right] \varphi_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l) = E_n \varphi_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l),$$

所以方程变形为

$$\sum_{l'} [E_n - E(\mathbf{k}) + V(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{l'})] \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{l'}} \varphi_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{l'}) \simeq 0.$$

左乘 $\varphi_n^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l)$, 积分, 利用正交关系 **Assump. B.3**, 得到

$$\frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_l} [E_n - E(\mathbf{k})] + \sum_{l'} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{l'}} \int \varphi_n^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l) \cdot [V(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{l'})] \varphi_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{l'}) d\mathbf{r} = 0.$$

记 $\xi = \mathbf{r} - \mathbf{R}_{l'}$, 上式积分部分为

$$\int \varphi_n^*(\xi - (\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_{l'})) [V(\xi) - U(\xi)] \varphi_n(\xi) d\xi =: -J(\mathbf{R}_s), \quad \mathbf{R}_s := \mathbf{R}_l - \mathbf{R}_{l'}.$$

只是格点差 $\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_{l'}$ 的函数. 代回方程得到

Appendix B. 能带论

Proposition B.17. 紧束缚近似下的电子能谱为

$$E(\mathbf{k}) \simeq E_n - \sum_s J(\mathbf{R}_s) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_s},$$

$J(\mathbf{R}_s)$ 是尚未知晓的系数.

由于紧束缚近似下, 各个点上孤立原子的波函数交叠很少, 我们可以只保留最近邻的求和项. 当 $\mathbf{R}_s = 0$, 得到

$$J(0) = - \int [V(\xi) - U(\xi)] |\varphi_n(\xi)|^2 d\xi,$$

称为**晶场劈裂**, 其一般大于 0 且数值较小, 这是因为在 $|\varphi_n(\xi)|^2$ 比较大的地方 $V(\xi) - U(\xi)$ 是接近 0 的负数. 于是

$$E(\mathbf{k}) = E_n - J(0) - \sum_{\langle s \rangle} J(\mathbf{R}_s) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_s}, \quad (\text{B.5})$$

符号 $\langle s \rangle$ 表示非 0 的最近邻.

从公式 (B.5) 可以看见, $\mathbf{k}$ 限制在第一 Brillouin 区, 取 N 个准连续的值, 于是一个孤立原子的能级分裂成由 N 个准连续分布能级构成的能带, 能带中心相对于原子能级 E_n 有一个小平移 $-J(0)$.

Example 41. 求简单立方晶格, 原子的 s 态电子构成的能带.

Solution. 简单立方晶格, 每个原子周围有 6 个最近邻原子, 所以 $\mathbf{R}_s$ 可以取 $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm a, 0)$, $(0, 0, \pm a)$, s 态电子是球对称的, 偶宇称, $\varphi_s(\mathbf{r}) = \varphi_s(-\mathbf{r})$, 最近邻交叠积分同时取为 J_1 , 得

$$\begin{aligned} E_s(\mathbf{k}) &= E_s - J_0 - J_1 \left(e^{ik_x a} + e^{-ik_x a} + e^{ik_y a} + e^{-ik_y a} + e^{ik_z a} + e^{-ik_z a} \right) \\ &= E_s - J_0 - 2J_1 (\cos(k_x a) + \cos(k_y a) + \cos(k_z a)). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

能带极小值出现在 Brillouin 区中心 $\mathbf{k} = 0$, $E_{\min} = E_s - J_0 - 6J_1$, 极大值出现在 $\mathbf{k} = \left(\pm \frac{\pi}{a}, \pm \frac{\pi}{a}, \pm \frac{\pi}{a} \right)$, $E_{\max} = E_s - J_0 + 6J_1$, 能带宽度 $\Delta E = 12J_1$. $\square$

B.3 Bloch 电子半经典动力学

本节讨论 Bloch 电子的动力学行为, 也就是电子在外场中的运动问题, 此时应该向原先的 Hamilton 量另外加入外势场 U . 原则上, 我们要求解的是包含 U 在内的含时 Schrödinger 方程

$$i\hbar\partial_t\Psi = (\hat{H} + U)\Psi,$$

并配备周期势条件 $V(\mathbf{r} + \mathbf{R}_l) = V(\mathbf{r})$.

Definition B.3 [??, ??]. 若将 Ψ 以系统的本征函数为基展开, 称为 **Bloch 表象**; 若以 Wannier 局域函数为基展开, 称为 **Wannier 表象**.

一种实用的近似方法, 是借用一些经典物理中的方程分析, 也就是把电子近似为经典粒子做动力学分析, 具体的操作方案称作 **Bloch 电子半经典动力学**: 对外场使用经典处理, 晶格周期场使用量子力学能带论计算.

然而, 经典物理和量子物理存在原则上不兼容的地方 — 在量子物理中, Heisenberg 不确定性原理断言不可能同时完全确定粒子的坐标和动量, 但我们在经典物理中列出的动力学方程又需要「确定的坐标和动量」. 如何自洽地建立我们的理论?

B.3.1 电子波包

在我们的理论中, 我们将把电子视作物质波的波包. 首先, 根据前面几节建立的能带论, 晶体中电子的本征态是一个具有确定波矢 $\mathbf{k}$ 和确定能量 $E_n(\mathbf{k})$ 的 Bloch 本征态函数, 这是一个波, 动量完全确定, 位置完全不确定. 然后, 我们把近似理论中的电子, 视作「由 $\mathbf{k}_0$ 附近 $\Delta\mathbf{k}$ 范围内的 Bloch 本征态」叠加构成的波包, 此时电子的动量/波矢不完全确定, 但位置却具备了一定的可确定性, $\Delta\mathbf{r} < \infty$.

Assumption B.4. Bloch 电子半经典动力学中, 将电子视作由 $\mathbf{k}_0$ 附近 $\Delta\mathbf{k}$ 范围内的 Bloch 本征态叠加构成的波包.

基于以上假设, 以及 Bloch 电子本征态含时波函数 $\Psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \frac{E_n(\mathbf{k})}{\hbar}t)} u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, 我们有电子波包的表达式为

$$\Phi_{n\mathbf{k}_0}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta\mathbf{k}} \int_{\mathbf{k}_0 - \frac{1}{2}\Delta\mathbf{k}}^{\mathbf{k}_0 + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{k}} d\mathbf{k} u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \frac{E_n(\mathbf{k})}{\hbar}t)}. \quad (\text{B.7})$$

然后进行下面的近似:

Appendix B. 能带论

- $u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 随 $\mathbf{k}$ 变动缓慢, 可以提到积分号外面;
- $E_n(\mathbf{k}) = E_n(\mathbf{k}_0) + [\nabla_{\mathbf{k}} E_n(\mathbf{k})]_{\mathbf{k}_0} \cdot \delta\mathbf{k} + \dots$, 只取到线性项.

于是波包近似为

$$\Phi_{n\mathbf{k}_0}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{u_{n\mathbf{k}_0}(\mathbf{r})}{\Delta\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \frac{E_n(\mathbf{k}_0)}{\hbar} t)} \int_{\frac{1}{2}\Delta\mathbf{k}}^{\frac{1}{2}\Delta\mathbf{k}} d(\delta\mathbf{k}) e^{i\delta\mathbf{k} \cdot \left(\mathbf{r} - \frac{[\nabla_{\mathbf{k}} E_n(\mathbf{k})]_{\mathbf{k}_0}}{\hbar} t \right)}. \quad (\text{B.8})$$

我们现在认定

Definition B.4.

$$\mathbf{r}_0 := \mathbf{r} - \frac{[\nabla_{\mathbf{k}} E_n(\mathbf{k})]_{\mathbf{k}_0}}{\hbar} t$$

为波包的中心位置.

Proposition B.18. Bloch 电子的经典速度为 $\mathbf{v}_n(\mathbf{k}) = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} E_n(\mathbf{k})$, 且 $\mathbf{v}(\mathbf{k}) = \langle \mathbf{k} | \hat{\mathbf{p}} | \mathbf{k} \rangle / m$.

Proof. 直接对波包中心位置求时间的导数即可证明第一式. 为了证明第二式, 考虑能量的表达式 $E(\mathbf{k}) = \langle u_{\mathbf{k}} | \hat{H}_{\mathbf{k}} | u_{\mathbf{k}} \rangle$, 等式两边同时作用 $\nabla_{\mathbf{k}}$ 得到

$$\nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k}) = \nabla_{\mathbf{k}} (\langle u_{\mathbf{k}} | \hat{H}_{\mathbf{k}} | u_{\mathbf{k}} \rangle) = \langle u_{\mathbf{k}} | \nabla_{\mathbf{k}} \hat{H}_{\mathbf{k}} | u_{\mathbf{k}} \rangle + E_{\mathbf{k}} \nabla_{\mathbf{k}} (\langle u_{\mathbf{k}} | u_{\mathbf{k}} \rangle),$$

同时因为 $\nabla_{\mathbf{k}} \hat{H}_{\mathbf{k}} = \nabla_{\mathbf{k}} \left[\frac{(\hat{\mathbf{p}} + \hbar\mathbf{k})^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right] = \frac{\hat{\mathbf{p}} + \hbar\mathbf{k}}{m}$, 则

$$\nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k}) = \left\langle u_{\mathbf{k}} \left| \frac{\hat{\mathbf{p}} + \hbar\mathbf{k}}{m} \right| u_{\mathbf{k}} \right\rangle = \left\langle \psi_{\mathbf{k}} \left| \frac{\hat{\mathbf{p}}}{m} \right| \psi_{\mathbf{k}} \right\rangle.$$

最后一步用到了依靠平移算符 $\hat{T}$ 的被动变换. □

B.3.2 动力学

我们至此说明清楚了电子和波包之间的概念关系. 下面考虑外场下的动力学. Ehrenfest 关系指出¹

$$\frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle. \quad (\text{B.9})$$

¹请对比: Heisenberg 方程 $\frac{d\hat{A}_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}_H, \hat{H}] + \left(\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right)_H$, 经典力学 Poisson 方程 $\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}$.

B.3. Bloch 电子半经典动力学

现在, 不妨先考虑一维情形, 令 $\hat{A} = \hat{T}$ 为晶格的平移算符, 并考虑添加了外力 F 的 Hamilton 量 $\hat{H} = \hat{H}_0 - Fx$, 于是

$$[\hat{H}, \hat{T}] = [\hat{H}_0, \hat{T}] - F[\hat{x}, \hat{T}].$$

Lemma B.1. 考虑一维情形, 平移算符和位置算符满足如下关系:

$$[\hat{x}, \hat{T}(a)] = -a\hat{T}.$$

本引理同理可推广到三维.

Proof. 任取 $|\psi\rangle$, 然后

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{T}(a)] |\psi\rangle &= \int dx |x\rangle \langle x| [\hat{x}, \hat{T}(a)] |\psi\rangle = \int dx |x\rangle \langle x| (\hat{x}\hat{T}(a) - \hat{T}(a)\hat{x}) |\psi\rangle \\ &= \int dx |x\rangle (\langle x| \hat{x}\hat{T}(a) |\psi\rangle - \langle x| \hat{T}(a)\hat{x} |\psi\rangle) = \int dx |x\rangle (\langle x| x\hat{T}(a) |\psi\rangle - \langle x+a| \hat{x} |\psi\rangle) \\ &= \int dx |x\rangle (\langle x+a| x |\psi\rangle - \langle x+a| (x+a) |\psi\rangle) = \int dx |x\rangle \langle x+a| (-a) |\psi\rangle \\ &= (-a) \int dx |x\rangle \langle x| \hat{T}(a) |\psi\rangle = -a\hat{T}(a) |\psi\rangle, \end{aligned}$$

因为 $|\psi\rangle$ 是任取的, 两边约去, 即可. □

根据引理, 代入 (B.9), 得到

$$\frac{d\langle\hat{T}\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle[\hat{T}, \hat{H}]\rangle = -\frac{1}{i\hbar} Fa \langle\hat{T}\rangle. \quad (\text{B.10})$$

从而

$$\langle\hat{T}\rangle^* \frac{d\langle\hat{T}\rangle}{dt} = -\frac{1}{i\hbar} Fa |\langle\hat{T}\rangle|^2, \quad \langle\hat{T}\rangle \frac{d\langle\hat{T}\rangle^*}{dt} = \frac{1}{i\hbar} Fa |\langle\hat{T}\rangle|^2,$$

两式相加就得到了

$$\frac{d|\langle\hat{T}\rangle|^2}{dt} = 0. \quad (\text{B.11})$$

这是复平面内的圆的方程, 在复平面内实轴和虚轴的分量分别为平移算符本征值的实部和虚部. 也就是说, 如果最初的 $\psi_{\mathbf{k}}$ 是满足周期边界条件的 Bloch 波, 那么 $\hat{T}$ 算符作用其上, 本征值 e^{ika} 随

Appendix B. 能带论

时间改变, 但是 $|e^{ika}|^2$ 不随时间改变! 所以 $k = k(t)$ 维持实数, 没有虚数部分. 把 $\hat{T}(a) = e^{ika}$ 带回 (B.10) (也就是把 $\psi_{\mathbf{k}}$ 同时置于方程两侧), 得

$$\hbar \dot{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{F}.$$

把我们的推导同理推广到三维, 就是下面的命题:

Proposition B.19. 对电子波包, 在线性外势下, 动量满足

$$\hbar \dot{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{F}.$$

这个方程和经典力学中的 Newton 第二定律一模一样! 这就是我们准经典近似的依据. $\hbar \mathbf{k}$ 被称为 Bloch 电子的准动量.

Proposition B.20. 电子波包群速度的加速度为

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\hbar} \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} \right) \nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k}) = \left(\mathbf{F} \cdot \frac{1}{\hbar^2} \nabla_{\mathbf{k}} \right) \nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k}).$$

Proof. 考虑对 Prop. B.18 中速度的表达式微分即可证明第一式, 代入 Prop. B.19 得到第二式. $\square$

把加速度的表达式, 对照 Newton 第二定律, 就得到了:

Definition B.5 [Bloch 电子的有效质量].

$$m^* := \left(\frac{1}{\hbar^2} \nabla_{\mathbf{k}} \nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k}) \right)^{-1}.$$

这样定义的「质量」实际上是一个对称的二阶张量, 而不是一个标量. 根据线性代数, 实对称的张量必然可以正交对角化, 总是可以选择主轴, 使得 m^* 是对角张量.

Example 42. 求解 Ex. 41 中的有效质量.

Solution. 对能谱 (B.6) 套用公式, 这里因为原能谱完全解耦 k_x, k_y, k_z , 直接选为主轴得到的有效

B.3. Bloch 电子半经典动力学

质量就是对角的,

$$m^* = \frac{\hbar^2}{2a^2 J_1} \begin{pmatrix} \cos(k_x a) & & \\ & \cos(k_y a) & \\ & & \cos(k_z a) \end{pmatrix}^{-1}.$$

注意, 这是一个和 *Brillouin* 位置有关的变量 — 有效质量不仅不是标量, 而且不是常数, 甚至可以取负值! 在鞍点 $\mathbf{k} = (\pm \frac{\pi}{a}, 0, 0)$, 有

$$m_{xx}^* = -\frac{\hbar^2}{2a^2 J_1}, \quad m_{yy}^* = m_{zz}^* = \frac{\hbar^2}{2a^2 J_1}.$$

□

可见晶体中电子对外加场的相应具有的有效质量, 不是电子的真实质量, 而且还取决于电子的状态. 这是因为, 电子除了收到外力, 还收到晶格的作用, 这些内部的作用被整合进了「有效质量」当中. 负有效质量出现在能带顶附近, 也就是 *Brillouin* 边界区域 — 在外力的作用下, 由于 Bragg 反射, 可以使电子沿外力方向的总动力减小, 表现出负质量.

外场作为一种力, 作用在波包上, 因此需要要求与波包的尺度相比, 外场是一个时间和空间的缓变场.

恒定电场

现在考虑 Bloch 电子在恒定电场中的准经典运动. 利用 Prop. B.19,

$$\hbar \dot{\mathbf{k}}(t) = -e\mathbf{E}.$$

容易得到解为 $\mathbf{k}(t) = \mathbf{k}(0) - e\mathbf{E}t/\hbar$.

Proposition B.21. 满带电子既不导电也不导热.

Proof.

□

Definition B.6 [空穴 (hole)].

恒定磁场

正交恒定电磁场

C

几何相

Contents

C.1 绝热定理	413
C.2 Berry 相位	416
C.3 Aharonov-Bohm 效应	423

量子力学中的「绝热」和热力学中的含义略有不同, 具体来说:

Definition C.1 [绝热过程 (adiabatic process)]. 量子力学中的**绝热过程**指系统的参数变化足够缓慢, 以至于不会发生量子跃迁, 系统在任意瞬时均处于本征态上.

从而, 量子力学的「绝热」更类似于热力学的准静态过程.

Example. Born-Oppenheimer 近似 (Born-Oppenheimer approximation) 就是绝热近似的例子: 快速运动的电子与慢速运动的原子核自由度分离, 分析电子运动时假定重核静止, 确定电子运动后再允许核位置缓慢调整.

C.1 绝热定理

Theorem C.1 [绝热定理 (adiabatic theorem)]. 若 Hamilton 量 $\hat{H}(t)$ 随时间缓慢变换, 且在任意时刻均无简并, 则: 若系统初态位于 $\hat{H}(0)$ 的第 n 个本征态, 在随后的时间系统将保持在 $\hat{H}(t)$ 的第 n 个本征态.

Appendix C. 几何相

Proof. 考虑含时 *Schrödinger* 方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle, \quad (\text{C.1})$$

我们的目标是在绝热近似下求解该方程. 考虑 t 时刻的 *Hamilton* 量的本征方程

$$\hat{H}_t |\phi_{nt}\rangle = E_{nt} |\phi_{nt}\rangle, \quad (\text{C.2})$$

这里 $\hat{H}_t \equiv \hat{H}(t)$, E_{nt} 和 $|\phi_{nt}\rangle$ 分别是其第 n 个本征值和本征矢. 注意这里故意区分于定态 *Schrödinger* 方程的写法, E_{nt} 和 $|\phi_{nt}\rangle$ 也不记作 $E_n(t)$ 和 $|\phi_n(t)\rangle$, 以区分于「含时 *Schrödinger* 方程的本征值和本征态」. 于是我们得到了一组完备正交基 $\{|\phi_{nt}\rangle\}$, 可以进行展开

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_{nt} e^{i\theta_{nt}} |\phi_{nt}\rangle,$$

此处

$$\theta_{nt} = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_{nt} dt \quad (\text{C.3})$$

称作**动力学相位**. 代回 (C.1), 得到

$$i\hbar \sum_n (\dot{c}_{nt} |\phi_{nt}\rangle + i\dot{\theta}_{nt} c_{nt} |\phi_{nt}\rangle + c_{nt} |\dot{\phi}_{nt}\rangle) e^{i\theta_{nt}} = \sum_n c_{nt} e^{i\theta_{nt}} \hat{H}(t) |\phi_{nt}\rangle.$$

注意等式右侧有 $\hat{H}(t) |\phi_{nt}\rangle \equiv \hat{H}_t |\phi_{nt}\rangle = E_{nt} |\phi_{nt}\rangle$, 代回原式, 化简得到

$$\sum_n \dot{c}_{nt} |\phi_{nt}\rangle e^{i\theta_{nt}} = - \sum_n c_{nt} |\dot{\phi}_{nt}\rangle e^{i\theta_{nt}}.$$

等式两边同时乘以 $\langle \phi_{mt} |$, 于是

$$\sum_n \dot{c}_{nt} \delta_{mn} e^{i\theta_{nt}} = - \sum_n c_{nt} \langle \phi_{mt} | \dot{\phi}_{nt} \rangle e^{i\theta_{nt}},$$

从而有

$$\dot{c}_{mt} = - \sum_n c_{nt} \langle \phi_{mt} | \dot{\phi}_{nt} \rangle e^{i(\theta_{nt} - \theta_{mt})}. \quad (\text{C.4})$$

为了完全求解 (C.1), 我们还需计算 $\langle \phi_{nt} | \dot{\phi}_{mt} \rangle$. 对 (C.2) 求导, 得

$$\dot{\hat{H}}_t |\phi_{nt}\rangle + \hat{H}_t |\dot{\phi}_{nt}\rangle = \dot{E}_{nt} |\phi_{nt}\rangle + E_{nt} |\dot{\phi}_{nt}\rangle,$$

C.1. 绝热定理

然后等式两侧同时乘以 $\langle \phi_{mt} |$,

$$\langle \phi_{mt} | \dot{\hat{H}}_t | \phi_{nt} \rangle + \langle \phi_{mt} | \hat{H}_t | \dot{\phi}_{nt} \rangle = \dot{E}_{nt} \langle \phi_{mt} | \phi_{nt} \rangle + E_{nt} \langle \phi_{mt} | \dot{\phi}_{nt} \rangle.$$

注意, 这里等式左侧第二项为 $\langle \phi_{mt} | \hat{H}_t | \dot{\phi}_{nt} \rangle = E_{mt} \langle \phi_{mt} | \dot{\phi}_{nt} \rangle$, 所以当 $m \neq n$ 时, 可以得到

$$\langle \phi_{mt} | \dot{\phi}_{nt} \rangle = \frac{\langle \phi_{mt} | \dot{\hat{H}}_t | \phi_{nt} \rangle}{E_{nt} - E_{mt}}. \quad (\text{C.5})$$

代回 (C.4), 于是

$$\dot{c}_{mt} = -c_{mt} \langle \phi_{mt} | \dot{\phi}_{mt} \rangle + \sum_{n \neq m} c_{nt} \frac{\langle \phi_{mt} | \dot{\hat{H}}_t | \phi_{nt} \rangle}{E_{nt} - E_{mt}} e^{i(\theta_{nt} - \theta_{mt})}. \quad (\text{C.6})$$

直至目前, 所有的计算都是严格的, 下面进行绝热近似. 设 $\dot{\hat{H}} \simeq 0$, 于是 (C.6) 变为

$$\dot{c}_{mt} \simeq -c_{mt} \langle \phi_{mt} | \dot{\phi}_{mt} \rangle,$$

解上式得到

$$c_{mt} = c_{m0} e^{i\gamma_{mt}}, \quad |\Psi(t)\rangle = \sum_n e^{i\theta_{nt}} e^{i\gamma_{nt}} |\phi_{nt}\rangle.$$

其中:

Definition C.2 [几何相位 (geometric phase)].

$$\gamma_{mt} = i \int_0^t \langle \phi_{mt} | \dot{\phi}_{mt} \rangle dt$$

称为几何相位.

Remark. 几何相位不含 $\hbar$, 说明 *Berry* 相位是纯几何效应, 而非量子效应.

最后只需要证明 γ_{mt} 是实数, 就说明了 $|\Psi(t)\rangle$ 的各个本征分量模长不变, 从而本征态之间不会交换概率, 定理即证.

Proposition C.1. γ_{mt} 是实数.

Appendix C. 几何相

根据归一化关系 $\langle \phi_{mt} | \phi_{mt} \rangle = 1$, 我们等式两边同时对时间求一次导数,

$$\frac{d}{dt} \langle \phi_{mt} | \phi_{mt} \rangle = 0,$$

然后得到

$$\langle \dot{\phi}_{mt} | \phi_{mt} \rangle + \langle \phi_{mt} | \dot{\phi}_{mt} \rangle = 0,$$

也就是说

$$(\langle \phi_{mt} | \dot{\phi}_{mt} \rangle)^* + \langle \phi_{mt} | \dot{\phi}_{mt} \rangle = 0,$$

这就说明了 $\text{Re} \langle \phi_{mt} | \dot{\phi}_{mt} \rangle = 0$. 从而 γ_{mt} 是实数. □

C.2 Berry 相位

Definition C.3 [非完整系统 (non-holonomic system), 非完整过程 (non-holonomic process)]. 若系统在沿闭合回路演化后不能恢复其状态, 称之为非完整的, 相应的过程亦称为非完整的.

Example. 设想将单摆置于北极, 令其沿指向上海的方向摆动; 再沿经过上海的经线缓慢移至赤道, 单摆将转为南北摆动; 接着沿赤道向东移动, 仍保持南北摆动; 最后沿另一条经线返回北极. 回到北极后, 单摆的摆动平面与原来不同, 存在一个夹角 Θ , 这个夹角正好与搬运路径所张的立体角 Ω 相等: $\Omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Theta}{2\pi} \cdot 4\pi = \Theta$. 这个结论对单摆在地球表面沿任意闭合回路搬运都成立: 摆动平面偏转角度与搬运路径所张立体角相等.

本章研究量子力学中的非完整过程, 对应的是 Hamilton 量中几个参数缓慢变化后回到初值, 即在参数空间中完成一个闭合回路之后, 相应的量子态不会恢复到初始量子态, 而会积累一个与路径相关的几何相位.

考虑绝热系统的 Hamilton 量通过参数 $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ 依赖于时间, 于是系统的几何相位为

$$\gamma_{nt} = i \int_0^t dt \langle \phi_{nt} | \dot{\phi}_{nt} \rangle = i \int_0^t dt \langle \phi_{nt} | \nabla_{\mathbf{R}} \phi_{nt} \rangle \frac{d\mathbf{R}}{dt} = i \int_{\mathbf{R}(0)}^{\mathbf{R}(t)} \langle \phi_{nt} | \nabla_{\mathbf{R}} \phi_{nt} \rangle d\mathbf{R}.$$

因为 $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$, Hamilton 量是通过 $\mathbf{R}$ 依赖于 t 的, 所以下面我们记 $|\phi_{nt}\rangle \equiv |\phi_n(\mathbf{R})\rangle$. 当我们取闭合回路时, 得到:

Definition C.4 [Berry 相位 (Berry phase)]. 设绝热系统的 Hamilton 量 $\hat{H}(t)$ 通过参数 $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ 依赖于时间 t , 则系统以 $\mathbf{R}$ 参数空间路径 Γ 经过时间 T 后回到自身后, 累计的几何相

C.2. Berry 相位

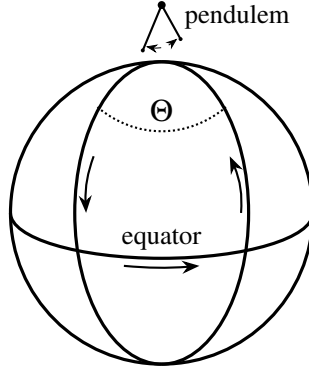


Figure C.1: 单摆的非完整过程

位为

$$\gamma_n(\Gamma) = i \oint_{\Gamma} d\mathbf{R} \langle \phi_n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} \phi_n(\mathbf{R}) \rangle,$$

称作 **Berry 相位**.

Remark. *Berry* 相位不显式地依赖 T , 因为其至多显式地依赖 $\mathbf{R}$, 因为 $\hat{H}(t) \equiv \hat{H}(\mathbf{R})$ 显式地依赖 $\mathbf{R}$ 而不是 t . 而 *Berry* 相位不显式地依赖 $\mathbf{R}$, 因为被积分掉了, 从而与 $\mathbf{R}$ 与 T 均无关.

考虑参数 $\mathbf{R}$ 是三维的情形, $\mathbf{R} = (R^1, R^2, R^3)$, 利用 Stokes 定理得到

$$\gamma_n(\Gamma) = i \oint_{\Gamma} d\mathbf{R} \langle \phi_n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} \phi_n(\mathbf{R}) \rangle = i \iint_{S: \partial S = \Gamma} dS \nabla_{\mathbf{R}} \times \langle \phi_n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} \phi_n(\mathbf{R}) \rangle.$$

这与我们熟悉的磁场, 磁通量和磁矢势的关系很像, 定义参数空间的「矢势」和「磁场」分别为

Definition C.5 [**Berry 联络 (Berry connection), Berry 曲率 (Berry curvature)**]. **Berry 联络**

$$\mathcal{A}_n(\mathbf{R}) = i \langle \phi_n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} \phi_n(\mathbf{R}) \rangle,$$

Berry 曲率

$$\Omega_n(\mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} \times \mathcal{A}_n(\mathbf{R}).$$

Berry 联络具有规范对称性, 是规范相关的. 考虑 $|\phi_n(\mathbf{R})\rangle \mapsto e^{i\alpha(\mathbf{R})} |\phi_n(\mathbf{R})\rangle$, 于是 $\mathcal{A}_n(\mathbf{R}) \mapsto$

Appendix C. 几何相

$$\mathcal{A}_n(\mathbf{R}) + \nabla_{\mathbf{R}}\alpha(\mathbf{R}).$$

Definition C.6. 考虑 $\mathbf{R}$ 的常数空间是一般的 n 维流形, 则局部 Berry 联络是一个微分 1-形式

$$\mathcal{A}_n(\mathbf{R}) = i \langle \phi_n(\mathbf{R}) | d\phi_n(\mathbf{R}) \rangle,$$

当选定局部坐标 R^μ 后,

$$(\mathcal{A}_n(\mathbf{R}))_\mu = i \langle \phi_n(\mathbf{R}) | \partial_\mu \phi_n(\mathbf{R}) \rangle.$$

局部 Berry 曲率被定义为局部 Berry 联络的外导数, 是微分 2-形式

$$\Omega_n(\mathbf{R}) = d\mathcal{A}_n(\mathbf{R}).$$

Convention C.1. 如非必要, 省略宗量依赖关系 $(\mathbf{R})$, 例如 $\mathcal{A}_n \equiv \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$.

Proposition C.2. 局部 Berry 曲率可写为 $\Omega_n = \frac{1}{2}(\Omega_n)_{\mu\nu} dR^\mu \wedge dR^\nu$, 分量满足

$$(\Omega_n)_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}(\mathcal{A}_n)_{\nu]} = 2i \langle \partial_{[\mu} \phi_n | \partial_{\nu]} \phi_n \rangle,$$

从而其为一个二阶反对称张量.

Note. 二阶反对称张量的分量的 $\frac{1}{2}$ 是为了避免双重计数, 如果定义 $\Omega_n = (\Omega_n)_{\mu\nu} dR^\mu \wedge dR^\nu$, 因为 $dR^\mu \wedge dR^\nu = -dR^\nu \wedge dR^\mu$, 对 μ 和 ν 求和时, 其实把同一个独立分量 (两者差一个正负号) 考虑了两次, (μ, ν) 和 (ν, μ) .

Proof. 根据定义直接计算

$$d\Omega_n = d\mathcal{A}_n = d\left((\mathcal{A}_n)_\mu dR^\mu\right) = d(\mathcal{A}_n)_\mu \wedge dR^\mu = \partial_\nu(\mathcal{A}_n)_\mu dR^\nu \wedge dR^\mu.$$

随后进行反对称化处理,

$$\begin{aligned} \partial_\nu(\mathcal{A}_n)_\mu dR^\nu \wedge dR^\mu &= \frac{1}{2}\partial_\nu(\mathcal{A}_n)_\mu dR^\nu \wedge dR^\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu(\mathcal{A}_n)_\nu dR^\mu \wedge dR^\nu \\ &= \frac{1}{2}\partial_\nu(\mathcal{A}_n)_\mu dR^\nu \wedge dR^\mu - \frac{1}{2}\partial_\mu(\mathcal{A}_n)_\nu dR^\nu \wedge dR^\mu = \partial_{[\nu}(\mathcal{A}_n)_{\mu]} dR^\nu \wedge dR^\mu. \end{aligned}$$

证毕. □

C.2. Berry 相位

三维参数空间下二阶反对称张量可以写作赝矢量 $\mathbf{\Omega}_n = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\eta}(\mathbf{\Omega}_n)_{\mu\nu}\hat{\mathbf{e}}_\eta$ 以及反过来 $\Omega_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\lambda}\mathbf{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{e}}^\lambda$, 所以该定义与 Def. C.5 在三维空间中说的本质上是一回事。

$$(\mathbf{\Omega}_r, \mathbf{\Omega}_\theta, \mathbf{\Omega}_\varphi)^T \leftrightarrow \begin{pmatrix} & \Omega_\varphi & -\Omega_\theta \\ -\Omega_\varphi & & \Omega_r \\ \Omega_\theta & -\Omega_r & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \Omega_{r\theta} & -\Omega_{r\varphi} \\ -\Omega_\varphi & & \Omega_{\theta\varphi} \\ \Omega_\theta & -\Omega_r & \end{pmatrix}, \quad (\text{C.7})$$

写成矢量和矩阵的形式更直观。

Lemma C.1. 暂不考虑能级简并, 则 Berry 曲率可以写作

$$(\mathbf{\Omega}_n)_{\mu\nu} = i \sum_{m \neq n} \frac{2 \langle \phi_n | \partial_{[\mu} \hat{H} | \phi_m \rangle \langle \phi_m | \partial_{\nu]} \hat{H} | \phi_n \rangle}{(E_n - E_m)^2}.$$

Proof. 也就是证明 $\langle \partial_{[\mu} \phi_n | \partial_{\nu]} \phi_n \rangle = \sum_{m \neq n} \frac{\langle \phi_n | \partial_{[\mu} \hat{H} | \phi_m \rangle \langle \phi_m | \partial_{\nu]} \hat{H} | \phi_n \rangle}{(E_n - E_m)^2}$, 为此, 考虑 Schrödinger 方程 $\hat{H} | \phi_n \rangle = E_n | \phi_n \rangle$, 等式两边同时求取偏导数

$$(\partial_\mu \hat{H}) | \phi_n \rangle + \hat{H} | \partial_\mu \phi_n \rangle = (\partial_\mu E_n) | \phi_n \rangle + E_n | \partial_\mu \phi_n \rangle,$$

然后向着 $|\phi_m\rangle$ 投影求取分量

$$\langle \phi_m | (\partial_\mu \hat{H}) | \phi_n \rangle + \langle \phi_m | \hat{H} | \partial_\mu \phi_n \rangle = \langle \partial_\mu E_n \rangle \langle \phi_m | \phi_n \rangle + E_n \langle \phi_m | \partial_\mu \phi_n \rangle,$$

从而我们得知当 $m \neq n$, 有 $\langle \phi_m | \partial_\mu \phi_n \rangle = \frac{\langle \phi_m | \partial_\mu \hat{H} | \phi_n \rangle}{E_n - E_m}$, 代回计算

$$| \partial_\mu \phi_n \rangle = | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \partial_\mu \phi_n \rangle + \sum_{m \neq n} | \phi_m \rangle \frac{\langle \phi_m | \partial_\mu \hat{H} | \phi_n \rangle}{E_n - E_m}. \quad (\text{C.8})$$

我们把这个表达式代入 $\langle \partial_{[\mu} \phi_n | \partial_{\nu]} \phi_n \rangle$, 展开计算, 注意只有相应的分量发生不正交的内积, 所以

$$\begin{aligned} \langle \partial_{[\mu} \phi_n | \partial_{\nu]} \phi_n \rangle &= \langle \partial_{[\mu} \phi_n | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \partial_{\nu]} \phi_n \rangle + \sum_{m \neq n} \frac{\langle \phi_n | \partial_{[\mu} \hat{H} | \phi_m \rangle}{E_n - E_m} \frac{\langle \phi_m | \partial_{\nu]} \hat{H} | \phi_n \rangle}{E_n - E_m} \\ &= \langle \partial_{[\mu} \phi_n | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \partial_{\nu]} \phi_n \rangle + \sum_{m \neq n} \frac{\langle \phi_n | \partial_{[\mu} \hat{H} | \phi_m \rangle \langle \phi_m | \partial_{\nu]} \hat{H} | \phi_n \rangle}{(E_n - E_m)^2}. \end{aligned}$$

Appendix C. 几何相

我们最后只需说明 $\langle \partial_\mu \phi_n | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \partial_\nu \phi_n \rangle = 0$, 于是只需说明 $\langle \partial_\mu \phi_n | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \partial_\nu \phi_n \rangle$ 是对称的二阶张量. 考虑 $\langle \phi_n | \phi_n \rangle = 1$, 等式两边同时求导

$$\langle \partial_\mu \phi_n | \phi_n \rangle + \langle \phi_n | \partial_\mu \phi_n \rangle = 0,$$

说明 $\langle \partial_\mu \phi_n | \phi_n \rangle = -\langle \phi_n | \partial_\mu \phi_n \rangle$, 于是

$$\langle \partial_\mu \phi_n | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \partial_\nu \phi_n \rangle = (-)^2 \langle \phi_n | \partial_\mu \phi_n \rangle \langle \partial_\nu \phi_n | \phi_n \rangle = (-)^2 \langle \partial_\nu \phi_n | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \partial_\mu \phi_n \rangle,$$

我们证明了 $\langle \partial_\mu \phi_n | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \partial_\nu \phi_n \rangle$ 是关于 μ 与 ν 对称的二阶张量, 从而 $\langle \partial_\mu \phi_n | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \partial_\nu \phi_n \rangle = 0$, 最终证明了

$$(\Omega_n)_{\mu\nu} = i \sum_{m \neq n} \frac{2 \langle \phi_n | \partial_\mu \hat{H} | \phi_m \rangle \langle \phi_m | \partial_\nu \hat{H} | \phi_n \rangle}{(E_n - E_m)^2}.$$

□

注意到, **Lem. C.1** 说明简并点 $E_m \rightarrow E_n$ 处 Berry 曲率发散, 这里是等效的「磁单极子」, 也就是这里是参数空间单纯的「源」或者「汇」.

Theorem C.2 [Berry 曲率局域守恒律]. 对任意的 $\mathbf{R}$, 均有 $\sum_n (\Omega_n(\mathbf{R}))_{\mu\nu} = 0$.

Proof. 注意到 $\langle \phi_n | \partial_\mu \hat{H} | \phi_m \rangle \langle \phi_m | \partial_\nu \hat{H} | \phi_n \rangle$ 关于 m 与 n 是反对称的, 从而

$$\sum_{n, m: n \neq m} \frac{\langle \phi_n | \partial_\mu \hat{H} | \phi_m \rangle \langle \phi_m | \partial_\nu \hat{H} | \phi_n \rangle}{(E_n - E_m)^2}$$

关于 m 与 n 是反对称的, 但是因为把 m 和 n 求和掉了, 所以自然关于 m 和 n 是对称的, 从而只能

$$\sum_{n, m: n \neq m} \frac{\langle \phi_n | \partial_\mu \hat{H} | \phi_m \rangle \langle \phi_m | \partial_\nu \hat{H} | \phi_n \rangle}{(E_n - E_m)^2} = 0.$$

于是

$$\sum_n (\Omega_n)_{\mu\nu} = i \sum_{n, m: n \neq m} \frac{2 \langle \phi_n | \partial_\mu \hat{H} | \phi_m \rangle \langle \phi_m | \partial_\nu \hat{H} | \phi_n \rangle}{(E_n - E_m)^2} = 0.$$

□

C.2. Berry 相位

Example 43. 考虑在磁场 $\mathbf{h}$ 中的自旋 $\frac{1}{2}$ 系统, 其 *Hamilton* 量为 $\hat{H} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{R})$, 在以下两种情况下分别计算 *Berry* 联络以及 *Berry* 曲率:

1. 设参数空间 $\mathbf{R} = (h, \theta, \phi)$, $\mathbf{h}(\mathbf{R}) = h(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$.
2. $\mathbf{R} = (x, y, z)$, $\mathbf{h}(\mathbf{R}) = h(x, y, z)$.

然后在参数空间中, 针对某一个能级计算包围原点的球面上的 *Berry* 曲率通量.

Solution. (1) 规定 z 轴为自旋 z 方向, 设 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 分别为 *Hamilton* 量的两个本征态, 于是

$$|\uparrow\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle, \quad |\downarrow\rangle = \sin \frac{\theta}{2} |+\rangle - e^{i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} |-\rangle.$$

下面计算

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_\uparrow)_r &= i \langle \uparrow | \partial_r | \uparrow \rangle = 0, \\ (\mathcal{A}_\uparrow)_\theta &= i \langle \uparrow | \partial_\theta | \uparrow \rangle = i \left(\cos \frac{\theta}{2} \langle + | + e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \langle - | \right) \left(-\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} | + \rangle + \frac{e^{i\varphi}}{2} \cos \frac{\theta}{2} | - \rangle \right) \\ &= i \left(-\frac{1}{4} \sin \theta + \frac{1}{4} \sin \theta \right) = 0, \\ (\mathcal{A}_\uparrow)_\varphi &= i \langle \uparrow | \partial_\varphi | \uparrow \rangle = i \left(\cos \frac{\theta}{2} \langle + | + e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \langle - | \right) \left(i e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} | - \rangle \right) = -\sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ (\mathcal{A}_\downarrow)_r &= i \langle \downarrow | \partial_r | \downarrow \rangle = 0, \\ (\mathcal{A}_\downarrow)_\theta &= i \langle \downarrow | \partial_\theta | \downarrow \rangle = i \left(\sin \frac{\theta}{2} \langle + | - e^{-i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} \langle - | \right) \left(\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} | + \rangle + \frac{e^{i\varphi}}{2} \sin \frac{\theta}{2} | - \rangle \right) \\ &= i \left(\frac{1}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin \theta \right) = 0, \\ (\mathcal{A}_\downarrow)_\varphi &= i \langle \downarrow | \partial_\varphi | \downarrow \rangle = i \left(\sin \frac{\theta}{2} \langle + | - e^{-i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} \langle - | \right) \left(-i e^{i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} | - \rangle \right) = -\cos^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

这里正好参数空间是三维的, 不妨写成矢量形式

$$\mathcal{A}_\uparrow = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}^T, \quad \mathcal{A}_\downarrow = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}^T,$$

Appendix C. 几何相

注意这里 $\nabla = \left(\partial_r \quad \partial_\theta \quad \partial_\varphi \right)^T$ 不是惯常的 *nabla* 算子, 然后据此利用 [Def. C.5](#) 计算 *Berry* 曲率.

$$\mathbf{\Omega}_\uparrow = \nabla \times \mathcal{A}_\uparrow = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sin \theta & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{\Omega}_\downarrow = \nabla \times \mathcal{A}_\downarrow = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin \theta & 0 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

最后根据 [\(C.7\)](#) 换算为张量的矩阵表示

$$\mathbf{\Omega}_\uparrow = \begin{pmatrix} & & \\ & -\frac{1}{2} \sin \theta & \\ \frac{1}{2} \sin \theta & & \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Omega}_\downarrow = \begin{pmatrix} & & \\ & & \frac{1}{2} \sin \theta \\ -\frac{1}{2} \sin \theta & & \end{pmatrix}.$$

(2) 根据 (1) 的结果, $\mathcal{A}_\uparrow = -\sin^2 \frac{\theta}{2} d\varphi$, $\mathcal{A}_\downarrow = -\cos^2 \frac{\theta}{2} d\varphi$, 这里采用流形语言, 得到

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}_\uparrow &= d\mathcal{A}_\uparrow = -\frac{1}{2r^3} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy), \\ \mathbf{\Omega}_\downarrow &= d\mathcal{A}_\downarrow = \frac{1}{2r^3} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy), \end{aligned}$$

稍加换算, 得到赝矢量形式为

$$\mathbf{\Omega}_\uparrow = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{2r^2}, \quad \mathbf{\Omega}_\downarrow = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{2r^2}.$$

则意味着在直角系的参数空间中, $|\uparrow\rangle$ 态的 *Berry* 曲率分布对应一个南磁单极子, $|\downarrow\rangle$ 态的 *Berry* 曲率分布对应一个北磁单极子. 原点处 *Berry* 曲率发散, 因为这个时候恰好对应 $r = h = 0$ 无外磁场的情况, 两个态简并.

(3) 最后计算给定路径下的 *Berry* 曲率通量, 设 S 为球心在原点的球面, 则

$$\begin{aligned} \Phi_\uparrow &= \iint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{\Omega}_\uparrow = \iint_S h^2 \sin \theta d\Omega \cdot \left(-\frac{1}{2h^2} \right) = -2\pi, \\ \Phi_\downarrow &= \iint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{\Omega}_\downarrow = \iint_S h^2 \sin \theta d\Omega \cdot \left(\frac{1}{2h^2} \right) = 2\pi, \end{aligned}$$

这里 $d\Omega$ 表示立体角, 符号有点重复. □

从例题的第三问可见, *Berry* 曲率在闭合流形上的积分就是参数空间中的「磁通量」, 类似高斯定理, 这个「磁通量」以 2π 为单位量子化, 等于内部净磁单极数, 该整数称为 **Chern 数 (Chern number)**.

C.3 Aharonov–Bohm 效应

1959 年, Yakir Aharonov 和 David Bohm 系统提出了 **Aharonov–Bohm 效应** (Aharonov–Bohm effect), 强调电磁势在量子理论中的物理作用: 即使带电粒子始终运动在电场 $\mathbf{E} = 0$ 和磁场 $\mathbf{B} = 0$ 的区域中, 它的波函数相位仍然可能受到电磁势的影响, 并最终在干涉条纹中表现出来. 在经典电磁学里, 人们往往把势 $\phi, \mathbf{A}$ 看成辅助量, 把 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ 看成真正「可观测」的物理量; 而 Aharonov–Bohm 效应表明, 在量子力学中, 电磁势至少通过相位这一方式具有直接物理意义. 更精确地说, 真正起作用的是规范不变量, 如回路积分 $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ 或对应的磁通, 而不仅仅是局域场强.

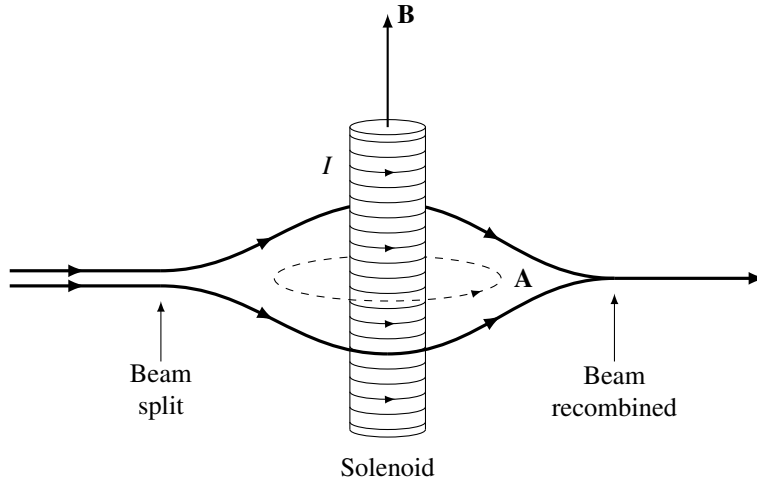


Figure C.2: Aharonov–Bohm 效应实验示意图

所以从经典图像看, 电子不该受到 Lorentz 力, 不该偏转, 也不该快一点或慢一点. 可是两路最后重合时, 干涉条纹却整体平移了. 这个现象最直观的「经典化解读」是: 空间中虽然没有局域力在推电子, 但绕着那根封闭磁通的路径会「记住」一个整体的环量信息. 这个特性是量子理论独有于经典理论的.

在经典理论中, 我们知道加入了电磁场后, 自由粒子的正则动量将修正 $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p} + q\mathbf{A}$, 从而 Hamilton 量为

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla - q\mathbf{A})^2 + V.$$

Appendix C. 几何相

Theorem C.3. 在无磁场 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ 区域, 带电粒子的 *Hamilton* 量与自由情形相差一个么正变换

$$\hat{H} = \hat{U}(\mathbf{r}) \hat{H}_0 \hat{U}^\dagger(\mathbf{r}),$$

这里 $\hat{H} = \frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla - q\mathbf{A})^2 + V$, $\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$, 么正变换为

$$\hat{U}(\mathbf{r}) = \exp \left\{ i \frac{q}{\hbar} \int^{\mathbf{r}} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right\}.$$

Remark. $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} = 0$ 保证了 $\int^{\mathbf{r}} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$ 的计算结果不依赖具体路径. 积分下限不写的意思是 不定积分, 下限是任意一个取定的点.

Proof. 记 $g(\mathbf{r}) = \frac{q}{\hbar} \int^{\mathbf{r}} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$, 为了证明这个结论, 我们先验算一个关系:

Lemma C.2. $\hat{U}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{p}} \hat{U}^\dagger(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}.$

Proof.

$$\begin{aligned} e^{ig(\mathbf{r})} (-i\hbar\nabla) e^{-ig(\mathbf{r})} &= e^{ig(\mathbf{r})} \left(-\hbar e^{-ig(\mathbf{r})} \nabla g(\mathbf{r}) - i\hbar e^{-ig(\mathbf{r})} \nabla \right) = -\hbar \nabla g(\mathbf{r}) - i\hbar \nabla \\ &= -q\mathbf{A} - i\hbar \nabla = \hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}, \end{aligned}$$

这里 $\nabla g(\mathbf{r}) = \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}.$

□

然后我们使用引理, 注意 $\hat{\mathbf{p}}$ 是么正算符,

$$\hat{U} \hat{\mathbf{p}}^2 \hat{U}^\dagger = \hat{U} \hat{\mathbf{p}} \hat{U}^\dagger \hat{U} \hat{\mathbf{p}} \hat{U}^\dagger = (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})^2,$$

所以动能部分么正变换证毕, 势能部分显然.

□

利用 **Thm. C.3**, 我们可以联系无矢势的波函数和有矢势的波函数. 根据定态 Schrödinger 方程 $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ 以及无矢势时 $\hat{H}_0|\psi_0\rangle = E_0|\psi_0\rangle$, 变形

$$\hat{U} \hat{H}_0 \hat{U}^\dagger (\hat{U}|\psi_0\rangle) = E_0 \hat{U}|\psi_0\rangle,$$

对照之下可知 $|\psi\rangle = \hat{U}|\psi_0\rangle$, 说明 $\mathbf{A}$ 的存在让波函数多了一个相位 $\frac{q}{\hbar} \int^{\mathbf{r}} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$.

C.3. Aharonov–Bohm 效应

见 Fig. C.2, 可以想象兵分两路的电子, 重新汇合时从 $\mathbf{A}$ 获得的额外相位不同, 造就了最终两束粒子相位不同, 从而有干涉效应. 相位差应当是两个路径各自积累的相位的差, 从而取决于所围成的环路上的积分.

$$\Delta\varphi = \frac{q}{\hbar} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{\hbar} \Phi,$$

这里 Φ 是螺线管内的磁通量.

现在我们从 Berry 相位视角重新理解 Aharonov–Bohm 效应: 设想将电子置于一小盒子中, 波函数为 $\phi_0(\mathbf{r} - \mathbf{R})$, $\mathbf{r}$ 是电子的绝对位置, $\mathbf{R}$ 是盒子的位置, 盒子沿着螺线管两侧的路线缓慢绕过螺线管. 盒子位于螺线管外不同位置 $\mathbf{R}$ 时, 盒子所处的矢势不同, 导致盒子内的电子波函数不一样, 即 $\phi_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})$ 是盒子位置 $\mathbf{R}$ 的函数:

$$\phi_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = \exp\{ig_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})\} \phi_0(\mathbf{r} - \mathbf{R}), \quad g_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = \frac{q}{\hbar} \int_{\mathbf{R}}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}').$$

以盒子在时空间中的位置 $\mathbf{R}$ 作为参数空间, 计算 Berry 联络:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{R}) &= i \langle \phi_{\mathbf{R}} | \nabla_{\mathbf{R}} \phi_{\mathbf{R}} \rangle \\ &= i \int d^3\mathbf{r} e^{-ig_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})} \phi_0^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}) e^{ig_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})} \left[-i \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}) \phi_0(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + \nabla_{\mathbf{R}} \phi_0(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right] \\ &= \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}) - i \int d^3\mathbf{r} \phi_0^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} \phi_0(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{R}). \end{aligned}$$

第二项是 0 因为静态波函数 ϕ_0 相对盒子没有动量. 因此, 此时的 Berry 联络 $\mathcal{A}(\mathbf{R})$ 就是真实的电磁矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{R})$. 有了 Berry 联络, 其绕螺线管一周的积分就是 Berry 相位:

$$\gamma = \oint d\mathbf{R} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{R}) = \frac{q}{\hbar} \oint d\mathbf{R} \cdot \mathbf{A} = \frac{q}{\hbar} \Phi$$

可见, Berry 相位就是真实的磁通量. 因此, 当电子绕螺线管一周之后会积累一个与磁通量相关的 Berry 相位, 导致干涉图样的变化.

D

Dirac 符号体系的数学基础

Contents

D.1 Hilbert 空间.....	428
D.2 广义函数.....	428
D.3 线性算符.....	430
D.4 Dirac 符号.....	432

量子力学中惯用的 Dirac 符号体系, 在一般物理文献中往往缺乏充分严密的数学说明. 众所周知, Dirac 创立这一符号体系时, 相关数学理论尚未发展到足以完全支撑量子力学形式化需求的程度; 反过来, 量子力学中的诸多物理动机, 也切实推动了泛函分析、广义函数论、谱理论等现代数学分支的发展. 时至今日, 量子理论的若干组成部分仍未达到完全严格的数学表述, 例如泛函积分仍缺乏普遍适用且令人满意的数学基础. 然而, Dirac 符号体系本身已经可以在相当程度上通过现代数学加以澄清和重建. 遗憾的是, 由于这一问题处在物理直觉与数学严密性之间的交界地带, 纯物理或纯数学文献中都鲜少对其作系统阐释, 因此真正将其说清楚的资料并不多见. 本附录旨在梳理这一相关体系, 从现代数学的角度重建 Dirac 符号的基本含义, 并在此基础上概述量子力学所依赖的若干数学基础. 主要参考了 LiangZhou2009 的 LiangZhou2009 [LiangZhou2009], Dixmier 的《谱理论讲义》[Dix13], Schwartz 的《广义函数论》[Sch10]. 本章所涉及数学严密性之处多不给出完整证明, 只给出确切已有的成果和大致思路.

Appendix D. Dirac 符号体系的数学基础

D.1 Hilbert 空间

Definition D.1 [Hilbert 空间]. 完备的复内积空间称为 **Hilbert 空间**.

此处, 复内积空间指的是配备了内积的复线性空间 V , 而内积是一个映射: $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, 使得 $\forall u, v, w \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ 均有

- **正定性:** $\langle v, v \rangle \geq 0$, 且 $\langle v, v \rangle = 0$ 当且仅当 $v = 0$;
- **共轭对称性:** $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle^*$;
- **线性:** $\langle u, \lambda v + \mu w \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \mu \langle u, w \rangle$.

注意以下事项: 线性配合共轭对称性, 可推知对第一个槽位满足共轭线性

$$\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda^* \langle u, w \rangle + \mu^* \langle v, w \rangle.$$

数学上, 常定义第一个槽位是线性的, 第二个槽位是共轭线性的, 和物理上的习惯相反.

完备性, 指的是每个 Cauchy 序列均收敛. 当 V 是有限维度时, 完备性自在其中, 而当 V 具备无限维度时, 谈论完备性涉及其上的拓扑. 物理学家常不关心线性空间的拓扑结构, 默认有一个「自然且足够强的拓扑」, 这个拓扑在此被显式地声明为由**内积诱导的范数拓扑**.

Definition D.2 [对偶空间]. 给定复内积空间 V , 连续的线性映射 $\eta : V \rightarrow \mathbb{C}$ 称为 V 上的**连续线性泛函**, 所有连续线性泛函全体称作 V 的**对偶空间**, 记作 V^* .

当 V 是有限维时, 线性代数告诉我们存在典范同构 $V^* \cong V$, 连续性自然地得到满足. 而当 V 是无穷维时, 谈论连续性必然索求拓扑. 此处设计的讨论如下分类:

- V 不是完备的, 我们总有 $V^* \cong \overline{V}$, 后者是 V 在内积诱导的拓扑下的闭包, 这个操作使得 V 唯一地完备化为 $\overline{V}$, 这里的延拓手法称为 **Hilbert 完备化**;
- V 是完备的从而是 Hilbert 空间, 根据泛函分析中的 **Riesz 表示定理**, $V^* \cong V$.

D.2 广义函数

物理上, 还需要广义函数, 例如著名的 Dirac δ -函数. 在 Lebesgue 积分理论中, 这样的函数是自相矛盾的, 因而不能说 δ 之类为「函数」, 必须发展「广义函数」的理论. 借用「对象由其与

D.2. 广义函数

其他对象的关系所构成」之精神, 我们可以把广义函数描述为某类对其他函数的作用. 那么「作用」何来, 前面所提到的内积恰似最佳选择.

以 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{R})$ 为例子, 其上内积为全 $\mathbb{R}$ 上的定积分¹, 我们于此定义广义函数, 为此要选用一些性质足够好的函数作为用以「探测」广义函数的「好对象」, 常用的选择为 **Schwartz 空间** $\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^m \partial^n f(x) = 0, \forall m, n \in \mathbb{N}_0 \right\}$. Schwartz 空间选用半范数²族 $\|f\|_{m,n} := \sup_x |x^m \partial^n f(x)|$ 诱导的局部凸拓扑, 成为一个**核空间**³, 使得其于 Hilbert 空间中能稠密连续嵌入⁴: $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$. 定义**缓增分布空间** $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ 为 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上的 (半范数族诱导局部凸拓扑下的) 连续线性泛函之全体. 从而同构意义下有

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad (\text{D.1})$$

这个式子是著名的 **Gelfand 三重偶**. 在更强的 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 拓扑下, 诸如 δ_x 等广义函数都成为了连续的线性泛函, 当然原先 $L^2(\mathbb{R})$ 的对偶矢量也是连续线性泛函. 同构意义下为了方便我们不区分 $L^2(\mathbb{R})$ 内的元素及其对偶, 我们称 $L^2(\mathbb{R})$ 内的元素为**函数型广义函数**, 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \setminus L^2(\mathbb{R})$ 的元素称为**非函数型广义函数**. 可见广义函数是函数的严格推广!

姑且暂停正文, 先回答若干重要问题. (1) 为什么 Schwartz 空间不选用 L^2 的子空间拓扑? 假若选用子空间拓扑, δ_x 就不是连续线性泛函, 因为我们总可以选用在 x 以有限值上不同的两个任意接近的函数, 它们与 δ_x 作用后的结果差别是有限值, 在子空间拓扑内两者却任意接近, 无法得到 δ_x 的连续性. 为此选用测试函数空间上更强的拓扑, 使得 δ_x 能连续, 在半范数族诱导拓扑下, $f_k \rightarrow f$ 意味着 $\sup_x |x^m \partial^n (f_k - f)(x)| \rightarrow 0, \forall m, n$ 均成立, 显然强过 $\int_{\mathbb{R}} |f_k - f|^2 dx \rightarrow 0$. (2) 这里我们建立的广义函数依赖测试函数空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 的选取, 试问广义函数空间的定义依赖测试函数空间吗? 答案是, 不一定得到完全相同的广义函数空间; 但物理上常用的广义本征态通常不依赖于某个唯一神圣的测试函数空间, 而是依赖于我们希望哪些算子和广义本征态合法. 通常来说, 选用 Schwartz 空间为测试空间能得到 δ_x (位置算符) 为广义本征态, 经过 Fourier 变换可以得到动量算符的本征态平面波 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, 这对大多数物理问题都足够了!

如何上我们是在一维情形建立的广义函数理论, 同理不难推广到更高的维度.

¹ $L^2(\mathbb{R})$ 的严格定义是平方可积函数在几乎处处相等关系下的等价类空间, L^2 范数无法分辨只在零测集上不同的函数. 特别的, 任意测度空间上的 $L^2(\Omega, \mu)$ 都是 Hilbert 空间, 这里 Ω 是配备了 σ -代数 $\mathcal{F}$ 的底集合, μ 是 $\mathcal{F}$ 上的测度. 该结论称为 **Riesz-Fischer 定理**.

² 半范数是指允许 $f \neq 0$ 但是 $\|f\| = 0$ 的「范数」. 所谓局部凸拓扑, 就是一个拓扑线性空间的拓扑可以由一族半范数生成.

³ 不严格地, 核空间是一类非常良好的无穷维局部凸空间, 其拓扑强到足以让许多无穷维问题表现得像有限维情形一样好.

⁴ 连续指的是在 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 内的收敛序列 (半范数族诱导拓扑下) 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中亦收敛 (内积诱导范数拓扑下). 稠密指的是任意 L^2 函数都可以用 Schwartz 函数在 L^2 -范数下逼近. 可见 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 不是 Hilbert 空间, $L^2(\mathbb{R})$ 是其 Hilbert 完备化.

Appendix D. Dirac 符号体系的数学基础

D.3 线性算符

Definition D.3 [线性算符]. Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的映射 $\hat{A} : \text{Dom}(\hat{A}) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ 被称作算符 (operator), 若 $\hat{A}$ 是线性的, 即 $\hat{A}(\lambda v + \mu w) = \lambda \hat{A}v + \mu \hat{A}w, \forall v, w \in \mathcal{H}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, 就称为线性算符.

我们记 $\hat{B} \subseteq \hat{C}$, 如果 $\text{Dom}(\hat{B}) \subseteq \text{Dom}(\hat{C})$ 且 $\hat{B}v = \hat{C}v, \forall v \in \text{Dom}(\hat{B})$, 并称 $\hat{C}$ 是 $\hat{B}$ 的延拓. 称算符 $\hat{D}$ 是稠定的, 若 $\overline{\text{Dom}(\hat{D})} = \mathcal{H}$. 算符范数 $\|\hat{E}\| := \inf \{C \geq 0 : \|\hat{E}v\| \leq C\|v\|, \forall v \in \text{Dom}(\hat{E})\}$. 称 $\hat{F}$ 是有界线性算符, 若存在 $C > 0$ 使得 $\|\hat{F}v\| \leq C\|v\|, \forall v \in \text{Dom}(\hat{F})$.

有界线性算符延拓定理断言: 设 $\text{Dom}(\hat{A})$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的稠密线性子空间, $\hat{A} : \text{Dom}(\hat{A}) \rightarrow \mathcal{H}$ 则 $\hat{A}$ 存在唯一的有界线性延拓 $\hat{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. 并且 $\|\hat{A}\| = \|\hat{A}\|$. 据此, 我们可以默认稠定有界线性算符定义在全 Hilbert 空间上.

$\mathcal{H}$ 上的有界线性算符 $\hat{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ 自然诱导出一个 $\mathcal{H}^*$ 上的线性算符 $\hat{A}^\vee$: $(\hat{A}^\vee \eta)v := \eta(\hat{A}v), \forall \eta \in \mathcal{H}^*, \forall v \in \mathcal{H}$, 称为对偶算符; $\hat{A}^\vee$ 又可以自然诱导出一个 $\mathcal{H}$ 上的线性算符 $\hat{A}^\dagger$: $\hat{A}^\dagger v := (\hat{A}^\vee v^*)^*$, $\forall v \in \mathcal{H}$, 即 $\hat{A}^\dagger := *^{-1} \circ \hat{A}^* \circ *$, 称为伴随算符. 容易验证 $(c\hat{A})^\dagger = c^* \hat{A}^\dagger$, 且 $\hat{A}^\dagger$ 也是有界的. 对于有限维度 Hilbert 空间, 显然所有线性算符都是有界的. 当 $\hat{A}$ 有界且满足 $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$, 我们称其为自伴随的, 或 Hermite 的.

那么无界线性算符呢? 考虑无界线性算符 $\hat{A}$, 我们定义满足 $\langle u, \hat{A}v \rangle = \langle \hat{A}^\dagger u, v \rangle, \forall v \in \text{Dom}(\hat{A}), \forall u \in \text{Dom}(\hat{A}^\dagger)$ 的 $\hat{A}^\dagger$ 为其伴随算符, 其中

$$\text{Dom}(\hat{A}^\dagger) := \{u \in \mathcal{H} \mid \exists! w \in \mathcal{H}, \langle u, \hat{A}v \rangle = \langle w, v \rangle\}.$$

换句话说, $\text{Dom}(\hat{A}^\dagger)$ 指的是使得形式 Hermite 式成立的、存在唯一「Hermite 像 $\exists! w = \hat{A}^\dagger u$ 」的区域.

Proposition D.1. 设 $\hat{A}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的线性算符, 则任意给定 $v \in \text{Dom}(\hat{A})$ 后满足 $\langle u, \hat{A}v \rangle = \langle w, v \rangle$ 的 $w \in \mathcal{H}$ 是唯一, 当且仅当 $\hat{A}$ 稠定.

Remark. 也就是说, 当且仅当 $\hat{A}$ 稠定, 可以把整个 $\text{Dom}(\hat{A})$ 都「Hermite」过去, 并通过 $\hat{A}$ 建立一一对应, $\hat{A}^\dagger$ 为逆映射.

Proof.

□

D.3. 线性算符

上述命题说明, 无界算符 $\hat{A}$ 只要稠定, 就可以定义 $\hat{A}^\dagger$ (不稠定也可以定义, 只不过可能不是所有的 $v \in \text{Dom}(\hat{A})$ 都有唯一的那个 w , 从而得在 $\text{Dom}(\hat{A})$ 上定义). 容易证明 $\hat{A}^\dagger$ 是线性算符. $\text{Dom}(\hat{A})$ 稠定不能保证 $\text{Dom}(\hat{A}^\dagger)$ 稠定.

Hellinger–Toeplitz 定理断言, 若 Hilbert 空间上的线性算符 $\hat{A}$ 满足 $\text{Dom}(\hat{A}) = \mathcal{H}$ 和形式 Hermite 式 $\langle u, \hat{A}v \rangle = \langle \hat{A}u, v \rangle$, 则 $\hat{A}$ 必然有界. 这说明无界线性算符的定义域必然不是全 Hilbert 空间!

注意, 对无界算符而言, Hermite 性和自伴随性的定义是不一样的. 称无界稠定线性算符 $\hat{A}$ 是 **Hermite 的**, 若 $\langle u, \hat{A}v \rangle = \langle \hat{A}u, v \rangle, \forall u, v \in \text{Dom}(\hat{A})$; 称无界稠定线性算符 $\hat{A}$ 是 **自伴的**, 如果 $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$. 显然, 自伴性强于 Hermite 性.

Proposition D.2. Hilbert 空间中的稠定线性算符 $\hat{A}$ 是 Hermite 的当且仅当 $\hat{A} \subseteq \hat{A}^\dagger$.

事实上, 对稠定 Hermite 算符有取伴随会反转包含关系 $A \subseteq B \implies B^\dagger \subseteq A^\dagger$, 且可以证明 $\hat{A} \subseteq \hat{A}^{\dagger\dagger} \subseteq \hat{A}^\dagger$.

Proof. 假设 $\hat{A}$ 是 Hermite 算符, 则 $\forall u, v \in \text{Dom}(\hat{A})$, 均有 $\langle u, \hat{A}v \rangle = \langle \hat{A}u, v \rangle$ □

Example 44. 考虑 $L^2(\mathbb{R})$ 上的位置算符 $\hat{x}$ 和动量算符 $\hat{p}$, 定义分别为 $(\hat{x}\psi)(x) = x\psi(x)$, $(\hat{p}\phi)(x) = -i\frac{d\phi}{dx}(x), \forall \psi \in \text{Dom}(\hat{x}), \forall \phi \in \text{Dom}(\hat{p})$. 试说明两者都是自伴算符.

Proof. □

经典力学中的物理量均用 (广义) 位置和 (广义) 动量表达, 一个很自然的问题是, 量子力学中将经典力学中写出的 Hamilton 量给量子化, 即替换为 Hilbert 空间上相应的算符. 一个自然的问题是, 含有位置算符和动量算符的那些表达式/函数, 它们是自伴的吗? **自伴算符的谱定理**断言, 自伴算符的实值 Borel 函数⁵ 演算, 仍然是自伴算符. 除此之外, Hamilton 量还涉及到位置算符的函数与动量算符的函数的加法组合, 实际上自伴算符的和的自伴性非常不好证明. **Kato–Rellich 定理**断言: 设 $\hat{A}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的自伴算符, $\hat{B}$ 是 Hermite 算符, 如果 $\hat{B}$ 相对于 $\hat{A}$ 是相对有界的⁶, 那么 $\hat{A} + \hat{B}$ 在定义域 $\text{Dom}(\hat{A} + \hat{B}) = \text{Dom}(\hat{A})$ 上是自伴算符. 借用此定理, 很多时候都能证明 Hamilton 量的自伴性.

⁵Bore 函数是关于 Borel σ -代数可测的函数.

⁶相对有界即 $\text{Dom}(\hat{A}) \subseteq \text{Dom}(\hat{B})$, 并且存在常数 $a, b \geq 0$, 使得 $\|\hat{B}\psi\| \leq a\|\psi\| + b\|\hat{A}\psi\|, \forall \psi \in \text{Dom}(\hat{A})$, 其中相对界 $b < 1$.

Appendix D. Dirac 符号体系的数学基础

D.4 Dirac 符号

References of this chapter

- [Dix13] J. Dixmier. 《谱理论讲义》. Chinese. Trans. by 姚一隼. 2nd ed. 法兰西数学精品译丛. 北京: 高等教育出版社, 2013. isbn: 978-7-04-036469-9.
- [Sch10] L. Schwartz. 《广义函数论》. Chinese. Trans. by 姚家燕. 法兰西数学精品译丛. 译自 *Théorie des distributions*. 北京: 高等教育出版社, Mar. 2010.

一篇对 Yang-Baxter 方程的短综述

Yang-Baxter 方程的思想背景早于这一名称本身. 1944 年, Onsager 在二维 Ising 模型中已使用后来被称为星-三角关系 (star-triangle relation) 的变换; 后来的综述通常将其视为 Yang-Baxter 方程的早期来源之一.

现代意义上的第一步来自 Yang 于 1967 年对一维排斥 δ -相互作用多体问题的研究. 他将多体散射化为两体散射的相容性条件, 从而得到后来所谓的 Yang 方程 (Yang equation), 这构成了 Yang-Baxter 方程在量子多体理论中的直接起源.

随后, Baxter 在 1971 年求解八顶点模型 (eight-vertex model) 时, 在二维格点统计模型中得到了本质相同的相容性关系, 并用它建立可交换转移矩阵 (commuting transfer matrices), 从而奠定了可积格点模型的系统理论. 因而, 同一结构一方面出现在一维量子散射中, 另一方面出现在二维统计模型中, 「Yang-Baxter 方程」这一名称也由此固定下来.

到 1970 年代末至 1980 年代, 该方程被进一步系统化为量子逆散射方法 (quantum inverse scattering method) 的核心一致性条件, 并继续推动了量子群 (quantum groups), 辫群表示 (braid group representations) 与可积自旋链等方向的发展. 这一阶段的一个关键转折是, 人们逐渐认识到 Yang-Baxter 方程本质上对应于辫群的基本关系.

在范畴论中, 这一思想先经过拓扑化, 再被结构化. Turaev 于 1988 年明确将 Yang-Baxter 算子与链环不变量 (link invariants) 及辫群表示联系起来; Freyd-Yetter 于 1989 年则把这种交叉结构纳入辫状紧闭范畴 (braided compact closed categories) 的语言.

真正系统地将其范畴化的是 Joyal-Street. 在他们关于辫张量范畴 (braided tensor categories) 的

Appendix E. 一篇对 Yang-Baxter 方程的短综述

工作中, 交换结构不是某个具体矢量空间上的矩阵方程, 而是幺半范畴中的自然同构

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$$

所满足的相容条件; 其中六角公理 (hexagon axioms) 正是 Yang-Baxter 型关系的范畴化表达. 因而, Yang-Baxter 方程在这里被提升为幺半范畴的结构数据, 而不再只是线性算子的恒等式.

此后, 这条路线又与量子群理论汇合: 量子群的拟三角结构 (quasitriangular structure) 给出 Yang-Baxter 方程的解, 而其表示范畴自然带有辫幺半结构 (braided monoidal structure). 于是, 一条清晰的发展链条便形成了:

星-三角关系 $\longrightarrow$ Yang 的多体散射 $\longrightarrow$ Baxter 的格点模型
 $\longrightarrow$ 辫群表示 $\longrightarrow$ 辫幺半范畴与量子群.

E.1 一维 δ -势多体相互作用问题的可积性

Yang (杨振宁) 于 1967 年在文章 “Some Exact Results for the Many-Body Problem in One Dimension with Repulsive Delta-Function Interaction” [Yan67] 中系统阐述了如下问题: 考虑一维全同粒子体系, 在接触势能 δ 下,

$$\hat{H} = - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 + 2c \sum_{i < j} \delta(x_i - x_j), \quad c > 0,$$

N 体量子多体系统怎样被精确求解. 特别的, 带自旋费米子时基态如何处理.

References of this chapter

- [Yan67] C. N. Yang. “Some Exact Results for the Many-Body Problem in One Dimension with Repulsive Delta-Function Interaction”. In: *Physical Review Letters* 19.23 (1967), pp. 1312–1315.

参考文献

- [李文威 23] 李文威.《代数学方法: 卷一》. 1st. 北京, China: 高等教育出版社, 2023, 约 450.
- [楼红卫 19] 楼红卫.《数学分析 (上册)》. 1st. 本科数学分析经典教材, 上册涵盖极限、连续、导数与积分. 北京, China: 高等教育出版社, 2019, 约 600.
- [GAV+72] A. Grothendieck, M. Artin, J. L. Verdier, et al. Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1: Théorie des topos. Vol. 269. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1972, pp. xix + 525.
- [陈王李 24] 陈猛, 王庆雪, and 李志远.《抽象代数》. 1st. 上海, 中国: 复旦大学出版社, 2024, p. 175.
- [戚陶 26] 戚扬 and 陶瑞宝.《固体物理中的对称性和拓扑》. Lecture notes. Version dated 2026-03-02. 2026.
- [Zha17] C. Zhang, “[Classifying Group Extensions with Not Necessarily Abelian Kernel](#)”. Bachelor’s thesis. Universität Stuttgart, June 26, 2017.
- [Bro82] K. S. Brown. [Cohomology of Groups](#). Graduate Texts in Mathematics 87. New York: Springer, 1982. isbn: 978-0-387-90688-1.
- [谢姚吴 14] 谢启鸿, 姚慕生, and 吴泉水.《高等代数》. Chinese. 4th ed. Beijing, China: 复旦大学出版社, 2014. isbn: 978-7-309-10989-4.
- [丘维声 11] 丘维声.《群表示论》. 高等教育出版社, 2011. isbn: 978-7-04-032711-3.
- [李新征 23] 李新征.《群论及其在凝聚态物理中的应用》. 北京: 北京大学出版社, 2023. isbn: 978-7-301-34211-4.
- [黎冯 14] 黎景辉 and 冯绪宁. 拓扑群引论. 2nd ed. 北京: 科学出版社, 2014.
- [Tu11] L. W. Tu. [An Introduction to Manifolds](#). 2nd. Universitext. New York: Springer, 2011. isbn: 978-1-4419-7399-3.

参考文献

- [Tu17] L. W. Tu. [Differential Geometry: Connections, Curvature, and Characteristic Classes](#). Vol. 275. Graduate Texts in Mathematics. Cham: Springer, 2017. isbn: 978-3-319-55083-1.
- [黄宣国 24] 黄宣国.《李群基础》. 3rd ed. 上海: 复旦大学出版社, 2024. isbn: 9787309169447.
- [刘玉鑫 22] 刘玉鑫.《物理学家用李群李代数》. 中外物理学精品书系. 北京: 北京大学出版社, 2022. isbn: 9787301331804.
- [李张 86] 李元熹 and 张国匡. 拓扑学. Chinese. 复旦大学数学系主编. 上海: 上海科学技术出版社, 1986.
- [贺伟 06] 贺伟.《范畴论》. 1st ed. 北京: 科学出版社, 2006. isbn: 7-03-017096-2.
- [黎白周 14] 黎景辉, 白正简, and 周国晖, eds.《高等线性代数学》. 北京: 高等教育出版社, 2014. isbn: 9787040410570.
- [郑浩] 郑浩.《范畴论讲义》. PDF lecture notes. Unpublished lecture notes.
- [Lan98] S. M. Lane. Categories for the Working Mathematician. 2nd ed. Vol. 5. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 1998. isbn: 978-0-387-98403-2.
- [HV19] C. Heunen and J. Vicary. [Categories for Quantum Theory: An Introduction](#). Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford: Oxford University Press, 2019. isbn: 978-0-19-873962-3.
- [Ohm24] K. Ohmori. “An Introduction to Symmetries in Quantum Field Theory”. In: Simons Lectures on Categorical Symmetries, Volume 1. Ed. by D. Costa et al. Lecture notes by Robert Moscrop. 2024.
- [Dix13] J. Dixmier.《谱理论讲义》. Chinese. Trans. by 姚一隽. 2nd ed. 法兰西数学精品译丛. 北京: 高等教育出版社, 2013. isbn: 978-7-04-036469-9.
- [Sch10] L. Schwartz.《广义函数论》. Chinese. Trans. by 姚家燕. 法兰西数学精品译丛. 译自 *Théorie des distributions*. 北京: 高等教育出版社, Mar. 2010.
- [Yan67] C. N. Yang. “[Some Exact Results for the Many-Body Problem in One Dimension with Repulsive Delta-Function Interaction](#)”. In: *Physical Review Letters* 19.23 (1967), pp. 1312–1315.

词汇表

Numbers

- 1-上链 (1-cochain) 64
- 1-上链集 (set of 1-cochains) 64
- 2-上边边界 (2-coboundary) 65
- 2-上边界群 (group of 2-coboundaries) 65
- 2-上闭链 (2-cocycle) 64
- 2-上闭链群 (group of 2-cocycles) 64
- 2-上链 (2-cochain) 62
- 2-上链集 (set of 2-cochains) 62
- 2-上同调群 (2-cohomology group) 66

A

- Abel 范畴 (Abelian category) 332
- Abel Lie 代数 (Abelian Lie algebra) 294
- Abel 群 (Abelian group) 14
- Abel–Ruffini 定理 (Abel–Ruffini theorem) 34
- Ado 定理 (Ado’s theorem) 296
- Aharonov–Bohm 效应 (Aharonov–Bohm effect) 423
- Artin 辫群 (Artin braid group) 346, 348

B

- Baker–Campbell–Hausdorff 公式 (Baker–Campbell–Hausdorff formula) 307
- 半单代数 (semisimple algebra) 168
- 半单模 (semisimple module) 166

- 半群 (semigroup) 14
- 伴随 (adjoint) 208
- 伴随表示 (adjoint representation) 303
- 半直积 (semidirect product) 56
- 本原幂等元 (primitive idempotent) 138
- Berry 联络 (Berry connection) 417
- Berry 曲率 (Berry curvature) 417
- Berry 相位 (Berry phase) 416
- 表示 (representation) 303
- 表示的张量积 (tensor product of representations) 247
- 并集公理 (axiom of union) 2
- Bloch 定理 (Bloch’s theorem) 395
- Borel 测度 (Borel measure) 282
- Born–Oppenheimer 近似 (Born–Oppenheimer approximation) 413
- Born–von Karman 边界条件 (Born–von Karman boundary condition) 365, 395
- 波矢星 (star of $\mathbf{k}$) 362
- Brillouin 区 (Brillouin zone) 361, 365
- 不变补空间 (invariant complementary space) 225
- 不变子空间 (invariant subspace) 225
- 不动点集 (fixed-point set) 48
- 不可约表示 (irreducible representation) 226
- 不可约模 (irreducible module) 165
- 补群 (complement) 59

词汇表

Burnside 公式 (Burnside's formula) 170, 235, 255, 262
Burnside 引理 (Burnside's lemma) 50

C

Cantor 定理 (Cantor's theorem) 8
Cardano 公式 (Cardano's formula) 33
Cartan 度规 (Cartan metric) 304
Cartan–Killing 判别法 (Cartan–Killing criterion) 319
Cartan 内积 (Cartan inner product) 303
Cartan 判别法 (Cartan criterion) 319
Cartesius 图表 (Cartesius diagram) 218
Cauchy 定理 (Cauchy's theorem) 85
Cauchy–Frobenius 引理 (Cauchy–Frobenius lemma) 50
超限归纳法 (transfinite induction) 5
乘子 (multiplier) 251
Chern 数 (Chern number) 422
抽象核 (abstract kernel) 73
传递群作用 (transitive group action) 53
C-类 (C-class) 265
Clifford 代数 (Clifford algebra) 179

D

代数闭域 (algebraically closed field) 137
代数同构 (algebra isomorphism) 127
代数同态 (algebra homomorphism) 127
代数学基本定理 (fundamental theorem of algebra) 137
单参数子群 (one-parameter subgroup) 300
单代数 (simple algebra) 168
单模 (simple module) 165
单群 (simple group) 31
导群 (derived subgroup) 24
大正交定理 (the Great Orthogonality Theorem) 239, 257, 264

等值子 (equalizer) 215
点群 (point group) 357, 361
Dirac Hamilton 量 (Dirac Hamiltonian) 368
短正合列 (short exact sequence) 57
对称代数 (symmetric algebra) 178
对换 (transposition) 27
对偶表示 (dual representation) 232
对偶原理 (duality principle) 190
对象 (object) 186
多重标架 (vielbein) 292

E

Hausdorff 空间 (Hausdorff space) 281
二面体群 (dihedral group) 32
二元运算 (binary operation) 13
Euclid 整区 (Euclidean domain) 134

F

泛包络代数 (universal enveloping algebra) 295
逆变函子 (contravariant functor) 192
范畴 (category) 186
泛对象 (universal element) 206
泛性质 (universality) 206
泛元素 (universal element) 206
非分裂扩张 (non-split extension) 62
非完整过程 (non-holonomic process) 416
非完整系统 (non-holonomic system) 416
分次代数 (graded algebra) 173
分次模 (graded module) 173
分裂 (split) 58
分裂截面 (splitting section) 58
分离公理 (axiom of separation) 2
分圆多项式 (cyclotomic polynomial) 140
Fermi 能 (Fermi energy) 366
Ferrari 方法 (Ferrari's method) 33
Fitting 引理 (Fitting's lemma) 95
Fréchet 空间 (Fréchet space) 281

Frobenius 定理 (Frobenius theorem) 121
复类型 (complex type) 269

G

Gell-Mann 矩阵 (Gell-Mann matrices) 311, 313
根理想 (radical ideal) 310
协变函子 (covariant functor) 192
共表示 (corepresentation) 260
共表示特征标 (corepresentation character) 264
共轭表示 (conjugate representation) 233
Goursat 引理 (Goursat's lemma) 45
Grothendieck 宇宙 (Grothendieck universe) 9
惯性群 (inertia group) 233
轨道 (orbit) 48
轨道-稳定子定理 (orbit-stabilizer theorem) 49
骨架 (skeleton) 197

H

Haar 测度 (Haar measure) 287
Hamel 基 (Hamel basis) 149
函子 (functor) 192
函子范畴 (functor category) 201
核 (kernel) 328
合成群列 (composition series) 87
Hom-函子 (Hom-functor) 198
Hom-集 (Hom-set) 39
后继 (successor) 5
环同构 (ring isomorphism) 127
环同态 (ring homomorphism) 127
换位子群 (commutator subgroup) 24

J

Jacobi 恒等式 (Jacobi identity) 294
积 (product) 216
降链条件 (descending chain condition) 93
交叉积代数 (crossed product algebra) 262

交错群 (alternating group) 29
交结映射 (intertwining map) 224
加性范畴 (additive category) 331
加性函子 (additive functor) 328
极大理想 (maximal ideal) 125
阶 (order) 15
结构常数 (structure constants) 294
结构张量 (structure constant tensor) 294
几何相位 (geometric phase) 415
极化公式 (polarization formula) 179
基数 (cardinal number) 8
极限序数 (limit ordinal) 5
Jones 矢量 (Jones vector) 182
Jordan-Hölder 定理 (Jordan-Hölder theorem) 87
Joyal-Street 融贯定理 (Joyal-Street coherence theorem) 348
局部流 (local flow) 292
绝热定理 (adiabatic theorem) 413
绝热过程 (adiabatic process) 413
矩阵表示 (matrix representation) 224

K

开核 (open kernel) 285
可表函子 (representable functor) 206
可分解理想 (decomposable ideal) 139
可解 Lie 代数 (solvable Lie algebra) 309
可解群 (solvable group) 88
Kelly 相干性定理 (Kelly's coherence theorem) 337
可迁作用 (transitive action) 48
可约表示 (reducible representation) 226
可约模 (reducible module) 165
Killing 方程 (Killing equation) 292
Killing 矢量场 (Killing vector field) 292
Killing 型 (Killing form) 303
Klein 四元群 (Klein four-group) 31
Kolmogorov 空间 (Kolmogorov space) 281
空穴 (hole) 411

词汇表

Koszul 符号规则 (Koszul sign rule) 175
Krull–Schmidt 定理 (Krull–Schmidt Theorem) 97
扩张类 (extension classes) 69

L

Lagrange 定理 (Lagrange theorem) 25
拉回 (pullback) 199, 217, 291
类函数 (class function) 236
Levi-Civita 符号 (Levi-Civita symbol) 292
Levi–Malcev 分解 (Levi–Malcev decomposition) 321
良序集 (well-ordered set) 4
联络 (connection) 292
连续统假设 (continuum hypothesis) 9
Lie 变换群 (Lie group of transformations) 302
Lie 代数 (Lie algebra) 294
Lie 导数 (Lie derivative) 292
Lie 定理 (Lie’s theorem) 308
Lie 括号 (Lie bracket) 294
Lie 群 (Lie group) 293
零对象 (zero object) 190
理想 (ideal) 122, 294
力旋量 (wrench) 183
Lorentz 流形 (Lorentzian manifold) 292
轮换 (cycle) 27
螺旋量 (twist) 183
滤过偏序集 (filtered partially ordered set) 4

M

MacLane 严格化定理 (MacLane’s strictification theorem) 341
Maschke 定理 (Maschke’s theorem) 228, 254, 261
幂集公理 (axiom of power) 2
幂零 Lie 代数 (nilpotent Lie algebra) 309
幂零自同态 (nilpotent endomorphism) 96

Mitchell 嵌入定理 (Mitchell’s embedding theorem) 333
模 (module) 143
不变基数条件 (invariant basis number, IBN) 150
模函数 (modular function) 288
模同构 (module isomorphism) 145
模同态 (module homomorphism) 145

N

挠表示 (twisted representation) 232
挠元 (torsion element) 89
挠子 (torsor) 53
挠子群 (torsion subgroup) 89
内积 (inner product) 237
内直积 (internal direct product) 44
内自同构 (inner automorphism) 39
能带 (energy band) 397
逆步表示 (contragredient representation) 232
Nielsen–Schreier 定理 (Nielsen–Schreier theorem) 105
扭曲群代数 (twisted group algebra) 254

P

配对公理 (axiom of pairing) 2
陪集 (coset) 21
偏序集 (partially ordered set) 4
平衡映射 (balanced map) 154
平移算符 (translation operator) 394
Plücker 坐标 (Plücker coordinates) 182
Poincaré–Birkhoff–Witt 定理 (Poincaré–Birkhoff–Witt theorem) 295
 p -群 (p -group) 51
谱平坦化定理 (spectral flattening theorem) 367

Q

强不可达基数 (strongly inaccessible cardinal) 8
 切丛 (tangent bundle) 291
 切空间 (tangent space) 291
 齐性空间 (homogeneous space) 283
 全序集 (totally ordered set) 4
 群 (group) 14
 群代数 (group algebra) 120
 群函数 (group function) 236
 群环 (group ring) 120
 群扩张 (extension of group) 58
 群上同调 (group cohomology) 73
 群同构 (group isomorphism) 37
 群同态 (group homomorphism) 37
 群展示 (group presentation) 103
 群直积的表示 (representations of direct product of groups) 248
 群作用 (group action) 47

R

Radon 测度 (Radon measure) 282
 融合积 (amalgamated product) 105

S

三角形公理 (triangle axiom) 337
 Schreier–Morandi 分类定理 (Schreier–Morandi classification theorem) 69
 Schröder–Bernstein 定理 (Schröder–Bernstein theorem) 7
 Schur 定理 (Schur’s theorem) 249
 Schur–Frobenius 指标 (Schur–Frobenius indicator) 270
 Schur 完备关系 (Schur completeness relation) 240, 244, 257, 259, 264, 266
 Schur 引理 (Schur’s lemma) 165, 235, 255, 261
 Schur 正交关系 (Schur orthogonality relations) 238, 244, 257, 259, 263, 265
 上面算子 (coface operator) 75

商群 (quotient group) 23
 上同调的广义 2-上闭链 (cohomologous generalized 2-cocycles) 69
 生成元 (generator) 20
 升链条件 (ascending chain condition) 93
 射影函子 (projection functor) 193
 射影线性群 (projective linear group) 251
 始对象 (initial object) 190
 实类型 (real type) 269
 实现 (realization) 303
 双函子 (bifunctor) 193
 双积 (biproduct) 330
 素理想 (prime ideal) 125
 Sylow 定理 (Sylow’s theorem) 85
 Sylow p -子群 (Sylow p -group) 85
 Sylvester 惯性定理 (Sylvester’s law of inertia) 291

T

态射 (morphism) 186
 tetrad-四标架 (tetrad) 292
 特征标 (character) 241
 特征标反演公式 (character inversion formula) 245
 替换公理 (axiom of substitution) 3
 投影表示 (projective representation) 251
 投影交结映射 (projective intertwining map) 253
 投影特征标 (projective character) 258
 图 (chart) 291
 图册 (atlas) 291
 推前 (pushforward) 199, 217, 291
 拓扑流形 (topological manifold) 291
 拓扑群 (topological group) 282
 拓扑群同构 (isomorphism of topological groups) 282
 拓扑群同态 (homomorphism of topological groups) 282
 拓扑相 (topological phase) 367

词汇表

Tychonoff 空间 (Tychonoff space) 281

V

vierbein-四标架 (vierbein) 292

von Neumann 宇宙 (von Neumann universe) 2

W

外代数 (exterior algebra) 178

外延公理 (axiom of extensionality) 2

外直积 (external direct product) 43

外自同构群 (outer automorphism) 39

外作用 (outer action) 73

Walsh–Hadamard 变换 (Walsh–Hadamard transformation) 246

完全可约表示 (completely reducible representation) 226

完全可约模 (completely reducible module) 166

Wedderburn–Artin 定理 (Wedderburn–Artin theorem) 170

Wedderburn 小定理 (Wedderburn’s little theorem) 141

微分结构 (differentiable structure) 291

微分流形 (differential manifold) 291

伪 Riemann 流形 (pseudo Riemannian manifold) 292

稳定子 (stabilizer) 48

Weyl 完全可约性定理 (Weyl’s complete reducibility theorem) 323

Whitehead 引理 (Whitehead’s lemma) 322

五边形公理 (pentagon axiom) 336

无穷公理 (axiom of infinity) 3

无穷小生成元 (infinitesimal generator) 301

Wyckoff 位置 (Wyckoff position) 362

X

线性表示 (linear representation) 223

小旁群 (little cogroup) 362

小群 (little group) 362

选择公理 (axiom of choice) 3

循环群 (cyclic group) 20

序数 (ordinal number) 5

Y

赝实类型 (pseudoreal type) 269

幺半范畴 (monoidal category) 335

幺半群 (monoid) 14

因子系 (factor system) 251

Yoneda 嵌入 (Yoneda embedding) 207

Yoneda 引理 (Yoneda lemma) 202

诱导表示 (induced representation) 249

有限 Abel 群标准分解定理 (structure theorem for finite abelian groups) 92

有限生成 Abel 群结构定理 (structure theorem for finitely generated abelian groups) 90

余核 (cokernel) 146, 328

余积 (coproduct) 216

余切丛 (cotangent bundle) 291

余切空间 (cotangent space) 291

预序集 (preordered set) 4

Z

Zermelo 良序定理 (Zermelo’s well-ordering theorem) 6

ZFC 公理系统 (ZFC axiom system) 2

张量积 (tensor product) 156

正八面体 (octahedron) 55

正二十面体 (icosahedron) 56

正规化子 (normalizer) 24

正规子群 (normal subgroup) 23

正规自同态 (normal endomorphism) 94

正六面体 (hexahedron) 55

整区 (integral domain) 120

正十二面体 (dodecahedron) 56

正四面体 (tetrahedron) 55

正则表示 (regular representation) 234
 正则公理 (axiom of regularity) 3
 正则基数 (regular cardinal) 8
 秩 (rank) 20
 置换 (permutation) 27
 指数 (index) 25
 指数映射 (exponential map) 302
 终对象 (terminal object) 190
 重排定理 (rearrangement theorem) 16
 忠实群作用 (faithful group action) 53
 中心 (center) 18
 中心化子 (centralizer) 18
 中心扩张 (central extension) 61
 主理想 (principal ideal) 123
 主理想整区 (principal ideal domain, PID) 134
 准动量 (quasimomentum) 395
 准加性范畴 (preadditive category) 328
 主齐性空间 (principal homogeneous space) 53
 子群 (subgroup) 17
 自然变换 (natural transformation) 194
 自同构 (automorphism) 39
 自同态幺半群 (endomorphism monoid) 39
 自由积 (free product) 101
 自由群 (free group) 102
 自由群作用 (free group action) 53
 Zorn 引理 (Zorn's lemma) 6